SOLUZIONI ESERCIZI ASSEGNATI

Contents

[B] Dispense a cura del docente.

1. SOLUZIONI ESERCIZI DEL §8.

Il seguente Teorema generalizza al caso delle funzioni il corrispondente Teorema di confronto per successioni divergenti (vedere **[B]** §7.3).

TEOREMA

Per ogni $\alpha > 0$, per ogni $a > 1$, e per ogni $\beta > 0$, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log_a x)^\beta}{x^\alpha} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{(\log_a x)^\beta} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^{\beta x}} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{a^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^{\beta x}}{x^{\alpha x}} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha x}}{a^{\beta x}} = +\infty;$$

La dimostrazione di questo Teorema si può ottenere usando il Teorema suddetto valido per le successioni divergenti e la definizione di limite di funzione (vedere **[B]** §8.1, Definizione 8.3).

§8.1

ESERCIZI CONSIGLIATI. Calcolare i seguenti limiti.

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2 + 5^{-x}), \; \lim_{x\to+\infty} \frac{4^x + x^3 + 3^{-x}}{5x^x + (\log(x))^7 - 6^x + x}, \; \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^5 - 4x^2), \; \lim_{x\to-\infty} \frac{x^5 + x^4 + (\log(|x|))x}{4x^5 + (\cos(\log(|x|)))x}, \; \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x} + x}{e^{\frac{|x|}{2}} + \sin(x)}, \; \lim_{x\to-\infty} \frac{3^{-x} - x^2}{2^{-x} + x^3} - \frac{3^{-x} + x^2}{2^{-x} - x^3}.$$

Soluzione:

- $\lim_{x\to+\infty}(x^2 + 5^{-x}) = +\infty.$

  Si ha,

$$x^2 + 5^{-x} = x^2(1 + x^{-2} \cdot 5^{-x}) \longrightarrow +\infty \cdot (1 + 0 \cdot 0) = +\infty.$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4^x+x^3+3^{-x}}{5x^x+(\log(x))^7-6^x+x} = 0.$

  È chiaro che, per $x \to +\infty$, si ha,
$$\frac{4^x}{x^x} \to 0,\ \frac{x^3}{4^x} \to 0,\ \frac{6^x}{x^x} \to 0,\ \frac{(\log(x))^7}{x^x} = \frac{(\log(x))^7}{x^3}\frac{x^3}{x^x} \to 0,$$
  Quindi, per $x \to +\infty$, si ha,
$$\frac{4^x+x^3+3^{-x}}{5x^x+(\log(x))^7-6^x+x} = \frac{4^x}{x^x}\frac{1+4^{-x}\cdot x^3+4^{-x}3^{-x}}{5+x^{-x}\cdot(\log(x))^7-x^{-x}\cdot 6^x+x^{1-x}} \to 0\cdot\frac{1+0+0}{5+0-0+0} = 0.$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = 1.$

  Si ha
$$\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x}\frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} \longrightarrow 1^+,\ x \longrightarrow +\infty,$$
  dove si è osservato che $\frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} > 1$, $\forall\, x > 0$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^5-4x^2) = -\infty.$

  Si ha,
$$x^5-4x^2 = x^5(1-4x^{-3}) \longrightarrow -\infty\cdot(1+0) = -\infty.$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^5+x^4+(\log(|x|))x}{4x^5+(\cos(\log(|x|)))x} = \frac{1}{4}.$

  Si ha,
$$\frac{\log(|x|)}{x^4} \longrightarrow 0,\ x \longrightarrow -\infty.$$
  Inoltre, per il teorema del confronto, le disuguaglianze
$$-\frac{1}{x^4} \leq \frac{\cos(\log(|x|))}{x^4} \leq \frac{1}{x^4},$$
  implicano che
$$\frac{\cos(\log(|x|))}{x^4} \longrightarrow 0,\ x \longrightarrow +\infty.$$
  Si ha allora,
$$\frac{x^5+x^4+(\log(|x|))x}{4x^5+(\cos(\log(|x|)))x} = \frac{x^5}{x^5}\frac{1+x^{-1}+x^{-4}\cdot(\log(|x|))}{4+x^{-4}\cdot(\cos(\log(|x|)))} \longrightarrow \frac{1}{4},\ x \longrightarrow +\infty.$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}+x}{e^{\frac{|x|}{2}}+\sin(x)} = +\infty.$

  Dato che per ogni $x < 0$ si ha $-x = |x|$, per $x \to -\infty$, si ha,
$$\frac{e^{-x}+x}{e^{\frac{|x|}{2}}+\sin(x)} = \frac{e^{|x|}+x}{e^{\frac{|x|}{2}}+\sin(x)} = \frac{e^{|x|}}{e^{\frac{|x|}{2}}}\frac{1+xe^{-|x|}}{1+\sin(x)e^{-\frac{|x|}{2}}} = e^{\frac{|x|}{2}}\frac{1+xe^{-|x|}}{1+\sin(x)e^{-\frac{|x|}{2}}} \longrightarrow +\infty\frac{1+0}{1+0} = +\infty,$$
  dove si è usato nuovamente il teorema del confronto per dimostrare che
$$\frac{\sin(x)}{e^{\frac{|x|}{2}}} \to 0,\ x \longrightarrow -\infty.$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3^{-x}-x^2}{2^{-x}+x^3} - \frac{3^{-x}+x^2}{2^{-x}-x^3} = 0.$

  Questo esercizio è più delicato. Non è difficile verificare che si tratta di una forma indeterminata del tipo $(+\infty)-(+\infty)$. Mettendo in evidenza i termini dominanti a numeratore e denominatore di entrambe le frazioni otterremmo il termine $\frac{3^{-x}}{2^{-x}}$ a moltiplicare due frazioni che tendono entrambe a 1 per $x \to -\infty$. Mettendo nuovamente in comune il termine $\frac{3^{-x}}{2^{-x}}$ otterremmo un forma indeterminata del tipo $+\infty \cdot (1-1) = +\infty \cdot 0$, e saremmo allora costretti a calcolare la somma delle frazioni sperando in qualche semplificazione. Dunque è meglio in questo caso fare subito il minimo comune multiplo, per ottenere

$$\frac{3^{-x}-x^2}{2^{-x}+x^3} - \frac{3^{-x}+x^2}{2^{-x}-x^3} = \frac{\left(3^{-x}-x^2\right)\left(2^{-x}-x^3\right) - \left(3^{-x}+x^2\right)\left(2^{-x}+x^3\right)}{\left(2^{-x}+x^3\right)\left(2^{-x}-x^3\right)} =$$

$$\frac{3^{-x}2^{-x} - 3^{-x}x^3 - x^2 2^{-x} + x^5 - 3^{-x}2^{-x} - 3^{-x}x^3 - x^2 2^{-x} - x^5}{2^{-2x} - x^6} =$$

$$\frac{-2\cdot 3^{-x}x^3 - 2\cdot x^2 2^{-x}}{2^{-2x}-x^6} = -2\frac{3^{-x}x^3 + x^2 2^{-x}}{4^{-x}-x^6}.$$

  Quindi, dato che per ogni $x<0$ si ha $-x = |x|$, concludiamo che

$$\frac{3^{-x}-x^2}{2^{-x}+x^3} - \frac{3^{-x}+x^2}{2^{-x}-x^3} = -2\frac{3^{|x|}x^3 + x^2 2^{|x|}}{4^{|x|}-x^6} = -2\frac{3^{|x|}x^3}{4^{|x|}} \cdot \left(\frac{1+x^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{|x|}}{1-4^{-|x|}x^6}\right) =$$

$$-2\frac{x^3}{\left(\frac{4}{3}\right)^{|x|}}\left(\frac{1+x^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{|x|}}{1-4^{-|x|}x^6}\right) \longrightarrow -2\cdot 0\frac{1+0}{1+0} = 0,\ x\to-\infty.$$

§8.2

ESERCIZI CONSIGLIATI: Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-x}+x,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^x 3^{x^x} - 5^{x^x}}{\left[x^x\right]^4}.$$

Soluzione:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-x}+x = \frac{1}{2}.$

  Razionalizzando, si ha, per $x\to-\infty$,

$$\sqrt{x^2-x}+x = \frac{x^2-x-x^2}{\sqrt{x^2-x}-x} = \frac{-x}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}-x} = \frac{|x|}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}+|x|} =$$

$$\frac{|x|}{|x|}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1}. \tag{1.1}$$

  Dato che la radice quadrata $\sqrt{y}$ è una funzione continua in $[0,+\infty)$, in particolare è continua in $y_0 = 1$ e quindi $\sqrt{y}\to 1$, $y\to 1$. Dato che $1+\frac{1}{x}\to 1$, $x\to-\infty$, concludiamo che $\sqrt{1+\frac{1}{x}}\to 1$, $x\to-\infty$. Quindi,

$$\sqrt{x^2-x}+x = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1} \to \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2},\ x\to-\infty.$$

Una volta ottenuta la (1.1), si sarebbe anche potuto scrivere direttamente

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x}+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1}=\lim_{y\to 1}\frac{1}{\sqrt{y}+1}=\frac{1}{2}.$$

- $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^x 3^{x^x}-5^{x^x}}{[x^x]^4}$.

  Ponendo $y=x^x\to+\infty$, $x\to+\infty$, si ha

  $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^x 3^{x^x}-5^{x^x}}{(x^x)^4}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y3^y-5^y}{y^4}=\lim_{y\to+\infty}\frac{5^y}{y^4}\left(y\left(\frac{3}{5}\right)^y-1\right)=+\infty(0-1)=-\infty.$$

  Interpretando questo esercizio con "$[\cdot\,]$ = funzione parte intera", si ottiene lo stesso risultato osservando che se $y>0$, si ha $y\le[y]<y+1$ e quindi $y^4\le[y]^4<(y+1)^4$. Si ottiene allora

  $$\frac{5^y}{[y]^4}\left(y\left(\frac{3}{5}\right)^y-1\right)\le\frac{5^y}{(y+1)^4}\left(y\left(\frac{3}{5}\right)^y-1\right),\ \text{definitivamente per}\, y\to+\infty$$

  dove si è usato il fatto che l' argomento della parentesi tonda è definitivamente negativo. La tesi segue allora dal Teorema di confronto.

ESERCIZI: Per le seguenti funzioni determinare il dominio naturale e calcolare i limiti possibili corrispondenti a tutti gli estremi del dominio determinato. Dire poi se e in quali punti le funzioni date si possono estendere per continuità .

$$\arctan(\log(|x|)),\ \log(|\cos x|),\ e^{\frac{1}{x}},\ e^{-\frac{1}{|x|}},\ e^{\frac{1}{|x|-4}},$$
$$\frac{|x|}{|x|-1},\ \log\left(\left|\frac{|x|}{|x|-1}\right|\right),\ \arctan\left|\frac{|x|}{|x|-1}\right|.$$

Soluzione:

- $f(x)=\arctan(\log(|x|))$.

  Dato che la funzione arcotangente ha dominio naturale $\mathbb{R}$ e la funzione logaritmo ha dominio naturale $(0,+\infty)$, si ha $\mathrm{dom}(f)=\{x\in\mathbb{R}:|x|>0\}=\mathbb{R}\setminus\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.
  Si tratta quindi di calcolare i limiti di $f(x)$ per $x\to\pm\infty$ e $x\to 0^{\pm}$.
  Dato che f è pari si ha

  $$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x),$$

  e

  $$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^-}f(x),$$

  e quindi è sufficiente calcolare i limiti per $x\to+\infty$ e $x\to 0^+$.
  Dato che $\log|x|\to+\infty$, $x\to+\infty$, si ha

  $$\lim_{x\to+\infty}\arctan(\log(|x|))=\lim_{y\to+\infty}\arctan y=\frac{\pi}{2}.$$

  Dato che $\log|x|\to-\infty$, $x\to 0^+$, si ha

  $$\lim_{x\to 0^+}\arctan(\log(|x|))=\lim_{y\to-\infty}\arctan y=-\frac{\pi}{2}.$$

  Dato che

  $$\lim_{x\to 0^\pm}\arctan(\log(|x|))=-\frac{\pi}{2},$$

  concludiamo che f si può estendere per continuità in $x_0=0$, ponendo $f(0)=-\frac{\pi}{2}$. In particolare, dato che $|\cdot|$, $\log(\cdot\,)$ e $\arctan(\cdot\,)$ sono continue nei loro domini di definizione, per il Teorema in

[B] §8.2, $\arctan(\log(|\cdot|))$ è continua in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Allora, per il Teorema in **[B]** §8.2, la funzione estesa

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(\log(|x|)), & x \neq 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, \end{cases}$$

è continua in $\mathbb{R}$.

- $f(x) = \log(|\cos x|)$.

Si ha $\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : |\cos x| > 0\} = \mathbb{R} \setminus \{(2n+1)\frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}\}$.
Dato che $|\cos(\cdot)|$ è periodica di periodo π, è sufficiente studiare i limiti corrispondenti ad un qualunque intervallo di ampiezza π. Se scegliamo $[0,\pi]$, f sarà definita in $[0,\pi]\setminus\{\frac{\pi}{2}\}$ e si tratterà di calcolare i limiti per $x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\pm}$. Se scegliamo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, f sarà definita in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e si tratterà di calcolare i limiti per $x \to \left(\pm\frac{\pi}{2}\right)^{\mp}$. Scegliamo per esempio l' ultimo caso.
Dato che $|\cos(x)| \to 0^+$, per $x \to \pm\frac{\pi}{2}$, si ha

$$\lim_{x\to\pm\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\mp}} \log(|\cos x|) = \lim_{y\to 0^+} \log y = -\infty.$$

Come sopra f è continua nel suo insieme di definizione. In questo caso, ogni punto appartenente a $\{(2n+1)\frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}\}$ è di asintoto verticale per f. Quindi f non si può estendere per continuità.

- $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

Si ha $\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R}\setminus\{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
Si tratta quindi di calcolare i limiti di $f(x)$ per $x \to \pm\infty$ e $x \to 0^{\pm}$.

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{+\infty}} = e^{0^+} = 1^+,$$

$$\lim_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = 0^+,$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{-\infty}} = e^{0^-} = 1^-.$$

Come sopra, f è continua nel suo insieme di definizione. $x_0 = 0$ è di asintoto verticale e quindi f non si può estendere per continuità. D' altra parte, ponendo

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

si ottiene una funzione continua da sinistra in $x_0 = 0$.

- $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}}$.

Si ha $\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : |x| \neq 0\} = \mathbb{R}\setminus\{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
Si tratta quindi di calcolare i limiti di $f(x)$ per $x \to \pm\infty$ e $x \to 0^{\pm}$.
Dato che f è pari, è sufficiente calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{|x|}} = \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{+\infty}} = e^{0^-} = 1^-,$$

$$\lim_{x\to0^+} e^{-\frac{1}{|x|}} = \lim_{x\to0^+} e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{0^+}} = e^{-\infty} = 0^+.$$

Come sopra, f è continua nel suo insieme di definizione. In questo caso $\lim_{x\to 0^\pm} e^{-\frac{1}{|x|}} = 0$ e quindi f si può estendere per continuità in $x_0 = 0$ ponendo

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

- $f(x) = e^{\frac{1}{|x|-4}}$.

Si ha $\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : |x| - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\} = (-\infty, -4) \cup (-4, 4) \cup (4, +\infty)$.
Si tratta quindi di calcolare i limiti di $f(x)$ per $x \to \pm\infty$ e $x \to -4^\pm$ e $x \to 4^\pm$.
Dato che f è pari, è sufficiente calcolare i limiti per $x \to +\infty$ e $x \to 4^\pm$.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{|x|-4}} &= \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x-4}} = e^{\frac{1}{+\infty}} = e^{0^+} = 1^+, \\ \lim_{x\to 4^+} e^{\frac{1}{|x|-4}} &= \lim_{x\to 4^+} e^{\frac{1}{x-4}} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty, \\ \lim_{x\to 4^-} e^{\frac{1}{|x|-4}} &= \lim_{x\to 4^-} e^{\frac{1}{x-4}} = e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = 0^+. \end{aligned}$$

Come sopra, f è continua nel suo insieme di definizione. $x_0 = \pm 4$ sono di asintoto verticale e quindi f non si può estendere per continuità. D' altra parte, ponendo

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|-4}}, & x \notin \{-4, 4\} \\ 0, & x \in \{-4, 4\}, \end{cases}$$

si ottiene una funzione continua da sinistra in $x_0 = 4$ e continua da destra in $x_0 = -4$. Notare che f è continua da destra (e non da sinistra) in $x_0 = -4$ perché se f è una funzione pari e $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$, si ha sempre

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to -x_0^-} f(x).$$

- $f(x) = \frac{|x|}{|x|-1}$.

Si ha $\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : |x| - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.
Si tratta quindi di calcolare i limiti di $f(x)$ per $x \to \pm\infty$ e $x \to -1^\pm$ e $x \to 1^\pm$.
Dato che f è pari, è sufficiente calcolare i limiti per $x \to +\infty$ e $x \to 1^\pm$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|x|}{|x|-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} = 1^+,$$

dove si è osservato che $\frac{x}{x-1} > 1 \ \forall\, x > 1$.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{|x|}{|x|-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{|x|}{|x|-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

Dato che f è pari, segue che

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{|x|}{|x|-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{|x|}{|x|-1} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{|x|}{|x|-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{|x|}{|x|-1} = -\infty.$$

Come sopra, f è continua nel suo insieme di definizione. $x_0 = \pm 1$ sono di asintoto verticale e quindi f non si può estendere per continuità.

- $f(x) = \log\left(\left|\frac{|x|}{|x|-1}\right|\right)$.

  Si ha
  $$\mathrm{dom}(f) = \left\{x \in \mathbb{R} : \left|\frac{|x|}{|x|-1}\right| > 0\right\} \cap \{x \in \mathbb{R} : |x| - 1 \neq 0\} =$$
  $$= \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty).$$
  Si tratta quindi di calcolare i limiti di $f(x)$ per $x \to \pm\infty$, $x \to 0^{\pm}$, $x \to -1^{\pm}$ e $x \to 1^{\pm}$.
  Dato che f è pari, è sufficiente calcolare i limiti per $x \to +\infty$ e $x \to 1^{\pm}$ e $x \to 0^{+}$.
  Dato che $\left|\frac{|x|}{|x|-1}\right| \to 1^+$, $x \to +\infty$, si ha
  $$\lim_{x\to+\infty} \log\left(\left|\frac{|x|}{|x|-1}\right|\right) = \lim_{y\to 1^+} \log(y) = \log(1^+) = 0^+.$$
  Dato che $\left|\frac{|x|}{|x|-1}\right| \to +\infty$, $x \to 1^{\pm}$, si ha
  $$\lim_{x\to 1^{\pm}} \log\left(\left|\frac{|x|}{|x|-1}\right|\right) = \lim_{y\to+\infty} \log(y) = +\infty.$$
  Dato che $\left|\frac{|x|}{|x|-1}\right| \to 0^+$, $x \to 0^+$, si ha
  $$\lim_{x\to 0^+} \log\left(\left|\frac{|x|}{|x|-1}\right|\right) = \lim_{y\to 0^+} \log(y) = -\infty.$$
  Come sopra, f è continua nel suo insieme di definizione. $x_0 = 0, \pm 1$ sono di asintoto verticale e quindi f non si può estendere per continuità.

- $f(x) = \arctan\left|\frac{|x|}{|x|-1}\right|$.
  Si ha $\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : |x| - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.
  Si tratta quindi di calcolare i limiti di $f(x)$ per $x \to \pm\infty$, $x \to -1^{\pm}$ e $x \to 1^{\pm}$.
  Dato che f è pari, è sufficiente calcolare i limiti per $x \to +\infty$ e $x \to 1^{\pm}$.
  $$\lim_{x\to+\infty} \arctan\left|\frac{|x|}{|x|-1}\right| = \lim_{x\to+\infty} \arctan\left|\frac{x}{x-1}\right| = \lim_{y\to 1^+} \arctan|y| = \arctan(1^+) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^+,$$
  $$\lim_{x\to 1^{\pm}} \arctan\left|\frac{|x|}{|x|-1}\right| = \lim_{y\to+\infty} \arctan y = \left(\frac{\pi}{2}\right)^-,$$
  dove si è osservato che $\arctan y < \frac{\pi}{2}$ $\forall\, y \in \mathbb{R}$.
  Come sopra, f è continua nel suo insieme di definizione. Ponendo
  $$f(x) = \begin{cases} \arctan\left|\frac{|x|}{|x|-1}\right|, & x \notin \{-1, 1\} \\ \frac{\pi}{2}, & x \in \{-1, 1\}, \end{cases}$$
  si ottiene una funzione continua in $\mathbb{R}$.