SOLUZIONI ESERCIZI ASSEGNATI

Contents

[B] Dispense a cura del docente.

1. SOLUZIONI ESERCIZI DEL §7.

§7.2

ESERCIZI: Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_n \frac{2^{-2n}+\frac{1}{n!}}{5n^n+(\log_4 n)^7-3}, \qquad \lim_n \frac{5n^n+(\log_4 n)^7-3}{2^{-2n}+\frac{1}{n!}+1},$$

$$\lim_n \frac{(\log_4 n)^{-3}+\frac{1}{n!}-9}{n^7+2^{-2n}+1+n^n}, \qquad \lim_n \frac{n^7+2^{-n}+1+n^{4n}}{(\log_8 n)^{-5}+\frac{1}{(n!)^5}},$$

$$\lim_n \left(2^{-2n}+\frac{1}{n!}-\left(5n^n+(\log_4 n)^7-3\right)\right),$$

$$\lim_n \left(n^7+2^{-2n}+1+n^n-(\log_4 n)^{-3}+\frac{1}{n!}-9\right),$$

$$\lim_n \frac{4+n^{-2}}{3+(\log_2 n)^{-5}}, \qquad \lim_n \left(4+n^{-2}-3+(\log_2 n)^{-5}\right).$$

Soluzione:

- $\lim_n \frac{2^{-2n}+\frac{1}{n!}}{5n^n+(\log_4 n)^7-3}=0.$
  Infatti, ragionando come nel §7.2, si ha,
$$\frac{2^{-2n}+\frac{1}{n!}}{5n^n+(\log_4 n)^7-3} \longrightarrow \frac{0+0}{5(+\infty)+\infty-3}=\frac{0}{+\infty}=0.$$

- $\lim_n \frac{5n^n+(\log_4 n)^7-3}{2^{-2n}+\frac{1}{n!}+1}=+\infty.$
  Infatti, ragionando come nel §7.2, si ha,
$$\frac{5n^n+(\log_4 n)^7-3}{2^{-2n}+\frac{1}{n!}+1} \longrightarrow \frac{5(+\infty)+\infty-3}{0+0+1}=\frac{+\infty}{1}=+\infty.$$

- $\lim_n \frac{(\log_4 n)^{-3}+\frac{1}{n!}-9}{n^7+2^{-2n}+1+n^n} = 0.$
Infatti, ragionando come nel §7.2, si ha,
$$\frac{(\log_4 n)^{-3}+\frac{1}{n!}-9}{n^7+2^{-2n}+1+n^n} \longrightarrow \frac{0+0-9}{+\infty+0+1+\infty} = \frac{-9}{+\infty} = 0.$$

- $\lim_n \frac{n^7+2^{-n}+1+n^{4n}}{(\log_8 n)^{-5}+\frac{1}{(n!)^5}} = +\infty.$
Questo limite è più delicato. Dato che
$$\frac{n^7+2^{-n}+1+n^{4n}}{(\log_8 n)^{-5}+\frac{1}{(n!)^5}} \longrightarrow \frac{+\infty+0+1+\infty}{0+0} = \frac{+\infty}{0},$$
usando l' Osservazione seguente il Teorema sul calcolo dei limiti (vedere **[B]** §7.2 equazione (7.8)), possiamo solo concludere che
$$\lim_n \left|\frac{n^7+2^{-n}+1+n^{4n}}{(\log_8 n)^{-5}+\frac{1}{(n!)^5}}\right| = +\infty.$$
Tuttavia, possiamo anche osservare che
$$n^7+2^{-n}+1+n^{4n} > 0,\ \forall n\in\mathbb{N}, \qquad (\log_8 n)^{-5}+\frac{1}{(n!)^5} > 0,\ \forall n \geq 2.$$
Si è usata la proprietà ben nota: $a>1,\ x>1 \Longrightarrow \log_a(x) > 0$. Quindi
$$\left|\frac{n^7+2^{-n}+1+n^{4n}}{(\log_8 n)^{-5}+\frac{1}{(n!)^5}}\right| = \frac{n^7+2^{-n}+1+n^{4n}}{(\log_8 n)^{-5}+\frac{1}{(n!)^5}},\ \forall n\geq 2.$$
È chiaro che due successioni che <u>coincidono</u> per ogni $n \geq 2$, hanno lo stesso limite, e quindi
$$\lim_n \frac{n^7+2^{-n}+1+n^{4n}}{(\log_8 n)^{-5}+\frac{1}{(n!)^5}} = \lim_n \left|\frac{n^7+2^{-n}+1+n^{4n}}{(\log_8 n)^{-5}+\frac{1}{(n!)^5}}\right| = +\infty.$$

- $\lim_n \left(2^{-2n}+\frac{1}{n!}-\left(5n^n+(\log_4 n)^7-3\right)\right) = -\infty.$
Infatti, ragionando come nel §7.2, si ha,
$$2^{-2n}+\frac{1}{n!}-\left(5n^n+(\log_4 n)^7-3\right) \longrightarrow 0+0-(5\cdot(+\infty)+\infty-3) = -(+\infty) = -\infty.$$

- $\lim_n \left(n^7+2^{-2n}+1+n^n-(\log_4 n)^{-3}+\frac{1}{n!}-9\right) = +\infty.$
Infatti, ragionando come nel §7.2, si ha,
$$n^7+2^{-2n}+1+n^n-(\log_4 n)^{-3}+\frac{1}{n!}-9 \longrightarrow +\infty+0+1+\infty-0+0-9 = +\infty.$$

- $\lim_n \frac{4+n^{-2}}{3+(\log_2 n)^{-5}} = \frac{4}{3}.$
Infatti, ragionando come nel §7.2, si ha,
$$\frac{4+n^{-2}}{3+(\log_2 n)^{-5}} \longrightarrow \frac{4+0}{3+0} = \frac{4}{3}.$$

- $\lim_n \left(4+n^{-2}-3+(\log_2 n)^{-5}\right)=1.$
  Infatti, ragionando come nel §7.2, si ha,
$$4+n^{-2}-3+(\log_2 n)^{-5} \longrightarrow 4+0-3+0=1.$$

$\blacksquare$

§7.3

ESERCIZI: Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_n \frac{4n^3-n^{\frac{7}{2}}}{1-\sqrt{n}}, \qquad \lim_n \frac{n^{\frac{5}{3}}-n+1}{n-n^2+1}, \qquad \lim_n \frac{n^{\frac{1}{10}}-n^2+1}{n^{\frac{8}{5}}+2\sqrt{n}-1},$$
$$\lim_n \frac{4n^3-n^{-\frac{7}{2}}+(n!)^{-1}}{-2^{-3n}+\sqrt[3]{n}+1}, \qquad \lim_n \frac{n^{\frac{5}{3}}-(\log_2 n)^{-\frac{1}{4}}+5n}{n^{-n}-n^2}, \qquad \lim_n \frac{n^{\frac{8}{5}}+2\sqrt{n}-1}{n^{\frac{1}{10}}-n^2+1}.$$

Soluzione:

- $\lim_n \frac{4n^3-n^{\frac{7}{2}}}{1-\sqrt{n}}=+\infty.$
  Infatti, ragionando come nel §7.3, si ha,
$$\frac{4n^3-n^{\frac{7}{2}}}{1-\sqrt{n}}=\frac{n^{\frac{7}{2}}}{\sqrt{n}}\left(\frac{-1+\frac{4n^3}{n^{\frac{7}{2}}}}{-1+\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)=n^3\left(\frac{-1+4(n^{-\frac{1}{2}})}{-1+n^{-\frac{1}{2}}}\right)\longrightarrow +\infty\cdot\frac{-1+0}{-1+0}=+\infty.$$

- $\lim_n \frac{n^{\frac{5}{3}}-n+1}{n-n^2+1}=0.$
  Infatti, ragionando come nel §7.3, si ha,
$$\frac{n^{\frac{5}{3}}-n+1}{n-n^2+1}=\frac{n^{\frac{5}{3}}}{n^2}\left(\frac{1-n^{-\frac{2}{3}}+n^{-\frac{5}{3}}}{-1+n^{-1}+n^{-2}}\right)=\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{1-n^{-\frac{2}{3}}+n^{-\frac{5}{3}}}{-1+n^{-1}+n^{-2}}\right)\longrightarrow 0\cdot\frac{1-0+0}{-1+0+0}=0.$$

- $\lim_n \frac{n^{\frac{1}{10}}-n^2+1}{n^{\frac{8}{5}}+2\sqrt{n}-1}=-\infty.$
  Infatti, ragionando come nel §7.3, si ha,
$$\frac{n^{\frac{1}{10}}-n^2+1}{n^{\frac{8}{5}}+2\sqrt{n}-1}=\frac{n^2}{n^{\frac{8}{5}}}\left(\frac{-1+n^{-\frac{19}{10}}+n^{-2}}{1+2(n^{-\frac{11}{10}})-n^{-\frac{8}{5}}}\right)=n^{\frac{2}{5}}\left(\frac{-1+n^{-\frac{19}{10}}+n^{-2}}{1+2(n^{-\frac{11}{10}})-n^{-\frac{8}{5}}}\right)\longrightarrow +\infty\cdot\frac{-1+0+0}{1+0-0}=-\infty.$$

- $\lim_n \frac{4n^3-n^{-\frac{7}{2}}+(n!)^{-1}}{-2^{-3n}+\sqrt[3]{n}+1}=+\infty.$
  Infatti, ragionando come nel §7.3, si ha,
$$\frac{4n^3-n^{-\frac{7}{2}}+(n!)^{-1}}{-2^{-3n}+\sqrt[3]{n}+1}=\frac{n^3}{n^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{4-(n^{-\frac{7}{2}})\cdot(n^{-3})+(n^{-3})\cdot(n!)^{-1}}{1+n^{-\frac{1}{3}}-(n^{-\frac{1}{3}})\cdot(2^{-3n})}\right)\to +\infty\cdot\frac{4-(0\cdot 0)+(0\cdot 0)}{1+0-(0\cdot 0)}=+\infty,$$
  dove si è usato direttamente il fatto che $n^{(3-\frac{1}{3})}\to+\infty$.

- $\lim_n \frac{n^{\frac{5}{3}}-(\log_2 n)^{-\frac{1}{4}}+5n}{n^{-n}-n^2}=0.$
  Infatti, ragionando come nel §7.3, si ha,
$$\frac{n^{\frac{5}{3}}-(\log_2 n)^{-\frac{1}{4}}+5n}{n^{-n}-n^2}=\frac{n^{\frac{5}{3}}}{n^2}\left(\frac{1+5(n^{-\frac{2}{3}})-(n^{-\frac{5}{3}})\cdot(\log_2 n)^{-\frac{1}{4}}}{-1+(n^{-2})\cdot(n^{-n})}\right)\longrightarrow 0\cdot\frac{1+(5\cdot 0)-(0\cdot 0)}{-1+(0\cdot 0)}=0,$$

dove si è usato direttamente il fatto che $n^{(\frac{5}{3}-2)} \to 0$.

- $\lim_n \frac{n^{\frac{8}{5}}+2\sqrt{n}-1}{n^{\frac{1}{10}}-n^2+1} = 0$.
Si può ragionare come sopra, oppure osservare che la successione data è il reciproco della successione $b_n = \frac{n^{\frac{1}{10}}-n^2+1}{n^{\frac{8}{5}}+2\sqrt{n}-1}$. Dato che si è dimostrato sopra che $b_n \to -\infty$, si può applicare la (7.7) di **[B]** §7.2, scegliendo $a_n = 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Si ha quindi
$$\lim_n \frac{n^{\frac{8}{5}}+2\sqrt{n}-1}{n^{\frac{1}{10}}-n^2+1} = \lim_n \frac{1}{b_n} = \frac{1}{-\infty} = 0.$$

■

ESERCIZI:

$$\lim_n \frac{3^n+4^n}{4^n+7^n}, \qquad \lim_n \frac{n!+2^n}{(3n-\sqrt{n})(n-1)!}, \qquad \lim_n \frac{(6n^2+1)\left((\log_2(n))^3-n^{-n}\right)}{(n\log_2(n)-\sqrt{n})(n+3^{-n})(\log_2(n))^2},$$

Soluzione:

- $\lim_n \frac{3^n+4^n}{4^n+7^n} = 0$.
Infatti, ragionando come nel §7.3, si ha,
$$\frac{3^n+4^n}{4^n+7^n} = \frac{4^n}{7^n}\left(\frac{1+\frac{3^n}{4^n}}{1+\frac{4^n}{7^n}}\right) = \left(\frac{4}{7}\right)^n \left(\frac{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{4}{7}\right)^n}\right) \longrightarrow 0\cdot\frac{1+0}{1+0} = 0,$$
dove si è usato il fatto che se $b=\frac{4}{7}$, o $b=\frac{3}{4}$, allora $a=\frac{1}{b}>1$ e quindi (vedere **[B]** §7.2), $b^n = \frac{1}{a^n} \to 0$.

- $\lim_n \frac{n!+2^n}{(3n-\sqrt{n})(n-1)!} = \frac{1}{3}$.
Infatti, ragionando come nel §7.3, si ha,
$$\frac{n!+2^n}{(3n-\sqrt{n})(n-1)!} = \frac{n!}{n\cdot(n-1)!}\frac{1+\frac{2^n}{n!}}{(3-n^{-\frac{1}{2}})} = \frac{n!}{n!}\frac{1+\frac{2^n}{n!}}{(3-n^{-\frac{1}{2}})} = \frac{1+\frac{2^n}{n!}}{(3-n^{-\frac{1}{2}})} \longrightarrow \frac{1+0}{3-0} = \frac{1}{3}.$$

- $\lim_n \frac{(6n^2+1)\left((\log_2(n))^3-n^{-n}\right)}{(n\log_2(n)-\sqrt{n})(n+3^{-n})(\log_2(n))^2} = 6$.
Infatti, ragionando come nel §7.3, si ha,
$$\frac{(6n^2+1)\left((\log_2(n))^3-n^{-n}\right)}{(n\log_2(n)-\sqrt{n})(n+3^{-n})(\log_2(n))^2} = \frac{(n^2)\cdot(\log_2(n))^3}{(n\log_2(n))\cdot n\cdot(\log_2(n))^2}\frac{(6+n^{-2})(1-(\log_2(n))^{-3}\cdot(n^{-n}))}{(1-\frac{\sqrt{n}}{n\log_2(n)})(1+(n^{-1})\cdot(3^{-n}))} =$$
$$\frac{(n^2)\cdot(\log_2(n))^3}{(n^2)\cdot(\log_2(n))^3}\frac{(6+n^{-2})(1-(\log_2(n))^{-3}\cdot(n^{-n}))}{(1-\frac{1}{\sqrt{n}\log_2(n)})(1+(n^{-1})\cdot(3^{-n}))} =$$
$$\frac{(6+n^{-2})(1-(\log_2(n))^{-3}\cdot(n^{-n}))}{(1-\frac{1}{\sqrt{n}\log_2(n)})(1+(n^{-1})\cdot(3^{-n}))} \longrightarrow \frac{(6+0)(1-(0\cdot 0))}{(1-0)(1+(0\cdot 0))} = 6.$$

■

§7.4

ESERCIZIO. Fissato $a > 1$, calcolare il limite

$$\lim_n \frac{(\log_a(n))^2 3^n - 2^n \sin(n)}{\left(2(\log_a(n)) - \cos(n)\sqrt{\log_a(n)}\right) 2^n \left(\left(\frac{3}{2}\right)^n \log_a(n) - n^4 \arctan n\right)}.$$

Soluzione:
Dato che:

$$-\frac{2^n}{3^n(\log_a(n))^2} \leq \frac{2^n \sin(n)}{3^n(\log_a(n))^2} \leq \frac{2^n}{3^n(\log_a(n))^2}, \ \forall\, n \geq 2,$$

e

$$\frac{2^n}{3^n(\log_a(n))^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{(\log_a(n))^2} \longrightarrow 0 \cdot \frac{1}{+\infty} = 0,$$

dal Teorema di confronto 7.4.2 (vedere **[B]** §7.4), si ha

$$\frac{2^n \sin(n)}{3^n(\log_a(n))^2} \longrightarrow 0.$$

Dato che:

$$-\frac{1}{\sqrt{\log_a(n)}} \leq \frac{\cos(n)}{\sqrt{\log_a(n)}} \leq \frac{1}{\sqrt{\log_a(n)}}, \ \forall\, n \geq 2,$$

e

$$\frac{1}{\sqrt{\log_a(n)}} \longrightarrow 0,$$

dal Teorema di confronto 7.4.2 (vedere **[B]** §7.4), si ha

$$\frac{\cos(n)}{\sqrt{\log_a(n)}} \longrightarrow 0.$$

Dato che:

$$-\frac{\pi}{2}\frac{n^4}{\left(\frac{3}{2}\right)^n(\log_a(n))^2} \leq \frac{n^4 \arctan(n)}{\left(\frac{3}{2}\right)^n(\log_a(n))^2} \leq \frac{\pi}{2}\frac{n^4}{\left(\frac{3}{2}\right)^n(\log_a(n))^2}, \ \forall\, n \geq 2,$$

e

$$\frac{\pi}{2}\frac{n^4}{\left(\frac{3}{2}\right)^n(\log_a(n))^2} = \frac{\pi}{2}\frac{n^4}{\left(\frac{3}{2}\right)^n}\frac{1}{(\log_a(n))^2} \longrightarrow \frac{\pi}{2} \cdot 0 \cdot 0 = 0,$$

dal Teorema di confronto 7.4.2 (vedere **[B]** §7.4), si ha

$$\frac{n^4 \arctan(n)}{\left(\frac{3}{2}\right)^n(\log_a(n))^2} \longrightarrow 0.$$

Si ha allora che,

$$\frac{(\log_a(n))^2 3^n - 2^n \sin(n)}{\left(2(\log_a(n)) - \cos(n)\sqrt{\log_a(n)}\right) 2^n \left(\left(\frac{3}{2}\right)^n \log_a(n) - n^4 \arctan n\right)} =$$

$$\frac{(\log_a(n))^2 3^n}{(\log_a(n)) \cdot 2^n \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n \log_a(n)} \cdot \frac{1 - \frac{2^n \sin(n)}{3^n(\log_a(n))^2}}{\left(2 - \frac{\cos(n)}{\sqrt{\log_a(n)}}\right)\left(1 - \frac{n^4 \arctan n}{\left(\frac{3}{2}\right)^n \log_a(n)}\right)} =$$

$$\frac{1 - \frac{2^n \sin(n)}{3^n(\log_a(n))^2}}{\left(2 - \frac{\cos(n)}{\sqrt{\log_a(n)}}\right)\left(1 - \frac{n^4 \arctan n}{\left(\frac{3}{2}\right)^n \log_a(n)}\right)} \longrightarrow \frac{1-0}{(2-0)(1-0)} = \frac{1}{2}.$$

Quindi,

$$\lim_n \frac{(\log_a(n))^2 3^n - 2^n \sin(n)}{\left(2(\log_a(n)) - \cos(n)\sqrt{\log_a(n)}\right) 2^n \left(\left(\frac{3}{2}\right)^n \log_a(n) - n^4 \arctan n\right)} = \frac{1}{2}.$$

§7.6

ESERCIZI: Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_n (n^n)^{\frac{1}{n}}, \quad \lim_n (n^n)^{\frac{n+1}{n^2+e^{-n}}}, \quad \lim_n \left(n^{\frac{n^2+1}{n+e^{-n}}}\right)^{\frac{3n+1}{n^2+e^{-n}}}, \quad \lim_n (n^n)^{\frac{1}{\log(n)}}, \quad \lim_n (n^n)^{\frac{3n+1}{n^3+e^{-n}}};$$

$$\lim_n \left(1 \pm \frac{1}{n^2}\right)^{\mp n}, \quad \lim_n \left(1 \pm \frac{1}{n^2}\right)^{\mp n^3}, \quad \lim_n \left(1 \pm \frac{5}{n^2}\right)^{\mp n^2}.$$

Soluzione:

- $\lim_n (n^n)^{\frac{1}{n}} = +\infty$.
  Si ha,
  $$(n^n)^{\frac{1}{n}} = n \longrightarrow +\infty.$$

- $\lim_n (n^n)^{\frac{n+1}{n^2+e^{-n}}} = +\infty$.
  Si ha,
  $$(n^n)^{\frac{n+1}{n^2+e^{-n}}} = (n)^{n\frac{n+1}{n^2+e^{-n}}} \longrightarrow (+\infty)^1 = +\infty.$$

- $\lim_n \left(n^{\frac{n^2+1}{n+e^{-n}}}\right)^{\frac{3n+1}{n^2+e^{-n}}} = +\infty$.
  Si ha,
  $$\left(n^{\frac{n^2+1}{n+e^{-n}}}\right)^{\frac{3n+1}{n^2+e^{-n}}} = (n)^{\frac{n^2+1}{n+e^{-n}} \cdot \frac{3n+1}{n^2+e^{-n}}} \longrightarrow (+\infty)^3 = +\infty.$$

- $\lim_n (n^n)^{\frac{1}{\log(n)}} = +\infty$.
  Si ha,
  $$(n^n)^{\frac{1}{\log(n)}} = (e)^{n\frac{\log(n)}{\log(n)}} = e^n \longrightarrow +\infty.$$

- $\lim_n (n^n)^{\frac{3n+1}{n^3+e^{-n}}} = 1$.
  Si ha,
  $$(n^n)^{\frac{3n+1}{n^3+e^{-n}}} = (n)^{n \cdot \frac{3n+1}{n^3+e^{-n}}} = (n)^{\frac{n^2}{n^3} \cdot \frac{3+n^{-1}}{1+n^{-3} \cdot e^{-n}}} = e^{\frac{\log(n)}{n} \cdot \frac{3+n^{-1}}{1+n^{-3} \cdot e^{-n}}} \longrightarrow e^{0 \cdot 3} = 1.$$

- $\lim_n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{-n} = 1$.
  Si ha
  $$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{-n} = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{-\frac{n^2}{n}} = \left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{-\frac{1}{n}}.$$

Usiamo allora il limite (7.42) in **[B]** §7.6, per concludere che

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \longrightarrow e.$$

Possiamo applicare il Teorema in **[B]** §7.6, con $a_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \to e$, $b_n = -\frac{1}{n} \to 0$, ovvero

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-n} = \left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{-\frac{1}{n}} \longrightarrow e^{-0}.$$

Se ne deduce che

$$\lim_n \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-n} = e^{-0} = 1.$$

- $\lim_n \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = 1.$
  Questo limite è più delicato. Osserviamo che

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{-n} = \left[\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n\right]^{-1}.$$

D' altra parte si ha

$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = \left(1+\frac{n^2}{n^2-1}-1\right)^n = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{\frac{n(n^2-1)}{n^2-1}} = \left[\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n^2-1}\right]^{\frac{n}{n^2-1}}$$

Se ne deduce, applicando una prima volta il Teorema in **[B]** §7.6, che

$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n^2-1}\right]^{\frac{n}{n^2-1}} \longrightarrow e^0 = 1.$$

Adesso si può applicare nuovamente il il Teorema in **[B]** §7.6, e concludere che

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{-n} = \left[\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n\right]^{-1} \longrightarrow (1)^{-1} = 1.$$

- $\lim_n \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-n^3} = 0.$
  Si ha

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-n^3} = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-n^2\cdot n} = \left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{-n}.$$

Usiamo allora il limite (7.6.20) in **[B]** §7.6, per concludere che,

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \longrightarrow e.$$

Possiamo applicare il Teorema in **[B]** §7.6,

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-n^3} = \left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{-n} \longrightarrow e^{-\infty} = 0.$$

Se ne deduce che

$$\lim_n \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-n^3} = e^{-\infty} = 0.$$

- $\lim_n \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^3}=0.$
Questo limite è più delicato. Osserviamo che
$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^3}=\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{-n^3}=\left[\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n^3}\right]^{-1}.$$
D' altra parte si ha
$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n^3}=\left(1+\frac{n^2}{n^2-1}-1\right)^{n^3}=\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n^3}=\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{\frac{n^3(n^2-1)}{n^2-1}}=\left[\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n^2-1}\right]^{\frac{n^3}{n^2-1}}$$
Se ne deduce, applicando una prima volta il Teorema in [**B**] §7.6, che
$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n^3}=\left[\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n^2-1}\right]^{\frac{n^3}{n^2-1}}\longrightarrow e^{+\infty}=+\infty.$$
Adesso si può applicare nuovamente il il Teorema in [**B**] §7.6, e concludere che
$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^3}=\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{-n^3}=\left[\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n^3}\right]^{-1}\longrightarrow(+\infty)^{-1}=0.$$

- $\lim_n \left(1+\frac{5}{n^2}\right)^{-n^2}=e^{-5}.$
Osserviamo che
$$\left(1+\frac{5}{n^2}\right)^{-n^2}=\left(1+\frac{5}{n^2}\right)^{-\frac{5n^2}{5}}=\left[\left(1+\frac{1}{\left(\frac{n^2}{5}\right)}\right)^{\frac{n^2}{5}}\right]^{-5}.$$
Usiamo allora il limite (7.42) in [**B**] §7.6, per concludere che
$$\left(1+\frac{1}{\left(\frac{n^2}{5}\right)}\right)^{\frac{n^2}{5}}\longrightarrow e.$$
Possiamo applicare una prima volta il Teorema in [**B**] §7.6 per concludere che
$$\left(1+\frac{5}{n^2}\right)^{-n^2}=\left[\left(1+\frac{5}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{5}}\right]^{-5}\longrightarrow e^{-5}.$$
Se ne deduce che
$$\lim_n \left(1+\frac{5}{n^2}\right)^{-n^2}=e^{-5}.$$

- $\lim_n \left(1-\frac{5}{n^2}\right)^{n^2}=e^{-5}.$
Questo limite è più delicato. Osserviamo che
$$\left(1-\frac{5}{n^2}\right)^{n^2}=\left(\frac{n^2}{n^2-5}\right)^{-n^2}=\left[\left(\frac{n^2}{n^2-5}\right)^{n^2}\right]^{-1}.$$
D' altra parte si ha
$$\left(\frac{n^2}{n^2-5}\right)^{n^2}=\left(1+\frac{n^2}{n^2-5}-1\right)^{n^2}=\left(1+\frac{5}{n^2-5}\right)^{n^2}=\left(1+\frac{5}{n^2-5}\right)^{n^2\frac{5}{n^2-5}\frac{n^2-5}{5}}=\left[\left(1+\frac{5}{n^2-5}\right)^{\frac{n^2-5}{5}}\right]^{\frac{5n^2}{n^2-5}}$$

Se ne deduce, applicando una prima volta il Teorema in **[B]** §7.6, che

$$\left(\frac{n^2}{n^2-5}\right)^{n^2} = \left[\left(1+\frac{5}{n^2-5}\right)^{\frac{n^2-5}{5}}\right]^{\frac{5n^2}{n^2-5}} \longrightarrow e^5.$$

Adesso si può applicare nuovamente il il Teorema in **[B]** §7.6, e concludere che

$$\left(1-\frac{5}{n^2}\right)^{n^2} = \left(\frac{n^2}{n^2-5}\right)^{-n^2} = \left[\left(\frac{n^2}{n^2-5}\right)^{n^2}\right]^{-1} \longrightarrow (e^5)^{-1} = e^{-5}.$$

■

ESERCIZI: Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_n \frac{(n+5)!\cdot(n+\pi)^{(n+2)}}{n^{n+6}[(n+1)!+5^n]}, \quad \lim_n \frac{(n+3)^{n+1}\log(n)}{n\,(n^n\log(n)+1)},$$

$$\lim_n \frac{(n+3)^{n+1}\log(n)-(n!)\sin(3n+2)\cos(n)}{n\sqrt{\log(n)}\left(n^n\sqrt{\log(n)}-4\arctan(\log(n))\right)}.$$

Soluzione:

- $\lim_n \frac{(n+5)!\cdot(n+\pi)^{(n+2)}}{n^{n+6}[(n+1)!+5^n]} = e^\pi$.
  Si ha,

$$\frac{(n+5)!\cdot(n+\pi)^{(n+2)}}{n^{n+6}[(n+1)!+5^n]} = \frac{(n+5)!}{[(n+1)!+5^n]}\cdot\frac{(n+\pi)^{(n+2)}}{n^{n+6}} = \frac{(n+5)!}{(n+1)![1+\frac{5^n}{(n+1)!}]}\frac{(n+\pi)^n}{n^n}\frac{(n+\pi)^2}{n^6} =$$

$$\frac{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)}{[1+\frac{5^n}{(n+1)!}]}\frac{n^2}{n^6}\left(1+\frac{\pi}{n}\right)^2\left(1+\frac{\pi}{n}\right)^n =$$

$$\frac{n^4}{n^4}\frac{(1+\frac{5}{n})(1+\frac{4}{n})(1+\frac{3}{n})(1+\frac{2}{n})}{[1+\frac{5^n}{(n+1)!}]}\left(1+\frac{\pi}{n}\right)^2\left[\left(1+\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{n}{\pi}}\right]^\pi \longrightarrow$$

$$1\cdot\frac{(1+0)(1+0)(1+0)(1+0)}{(1+0)}\cdot(1+0)^2\cdot e^\pi = e^\pi.$$

- $\lim_n \frac{(n+3)^{n+1}\log(n)}{n(n^n\log(n)+1)} = e^3$.
  Si ha,

$$\frac{(n+3)^{n+1}\log(n)}{n\,(n^n\log(n)+1)} = \frac{(n+3)^{n+1}\log(n)}{n^{n+1}\log(n)\,(1+(n^n\log(n))^{-1})} = \left(\frac{n+3}{n}\right)^n\frac{n+3}{n}\frac{1}{(1+(n^n\log(n))^{-1})} =$$

$$\left[\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^3\frac{n+3}{n}\frac{1}{(1+(n^n\log(n))^{-1})} \longrightarrow e^3\cdot 1\cdot\frac{1}{1+0} = e^3.$$

- $\lim_n \frac{(n+3)^{n+1}\log(n)-(n!)\sin(3n+2)\cos(n)}{n\sqrt{\log(n)}\left(n^n\sqrt{\log(n)}-4\arctan(\log(n))\right)} = e^3$.
  Si ha,

$$\frac{(n+3)^{n+1}\log(n)-(n!)\sin(3n+2)\cos(n)}{n\sqrt{\log(n)}\left(n^n\sqrt{\log(n)}-4\arctan(\log(n))\right)} =$$

$$\frac{(n+3)^{n+1}\log(n)}{n^{n+1}\log(n)}\cdot\frac{1-\frac{(n!)\sin(3n+2)\cos(n)}{(n+3)^{n+1}\log(n)}}{1-\frac{4\arctan(\log(n))}{n^n\sqrt{\log(n)}}}\longrightarrow e^3\left(\frac{1-0}{1-0}\right)=e^3,$$

dove si sono usati i seguenti limiti:

$$\frac{(n+3)^{n+1}\log(n)}{n^{n+1}\log(n)}\longrightarrow e^3$$

la dimostrazione essendo identica a quella dell' esercizio precedente,

$$\frac{(n!)\sin(3n+2)\cos(n)}{(n+3)^{n+1}\log(n)}\longrightarrow 0,$$
$$\frac{4\arctan(\log(n))}{n^n\sqrt{\log(n)}}\longrightarrow 0,$$

che si ottengo come segue:

$$-\frac{n!}{n^n}\leq-\frac{(n!)}{(n+3)^{n+1}\log(n)}\leq\frac{(n!)\sin(3n+2)\cos(n)}{(n+3)^{n+1}\log(n)}\leq\frac{(n!)}{(n+3)^{n+1}\log(n)}\leq\frac{n!}{n^n}$$

e la conclusione segue facilmente dal Teorema del confronto 7.4.2. in **[B]** §7.4 e dai limiti notevoli del §7.3;

$$-\frac{\pi}{2}\frac{4}{n^n\sqrt{\log(n)}}\leq\frac{4\arctan(\log(n))}{n^n\sqrt{\log(n)}}\leq\frac{\pi}{2}\frac{4}{n^n\sqrt{\log(n)}}\longrightarrow 0,$$

e la conclusione segue facilmente dal Teorema del confronto 7.4.2. in **[B]** §7.4.

■