

DIARIO DELLE LEZIONI 31-32-33-34-35

CONTENTS

24.	Lezione 31	1
25.	Lezione 32	1
26.	Lezione 33	1
27.	Lezione 34	3
28.	Lezione 35	3

[B] Dispense a cura del docente.

24. Lezione 31

Argomenti trattati:

- Inversione della operazione di derivazione. Funzione primitiva. Calcolo di aree e calcolo di primitive. Somme di Riemann superiori e inferiori. Definizione dell' integrale di Riemann. Integrabilità secondo Riemann delle funzioni monotone.

25. Lezione 32

Argomenti trattati:

- Proprietà dell' integrale di Riemann. Teorema della media integrale. La funzione integrale. Il Teorema fondamentale del calcolo integrale.

26. Lezione 33

Argomenti trattati:

- L' integrale indefinito. Tecniche di integrazione. Integrazione per sostituzione e integrazione per parti.

Esempio. Si vuole calcolare l' integrale indefinito di $f(x) = 3x^2$. Dato che

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq -1,$$

si ha

$$\int 3x^2 dx = x^3 + c.$$

Esempio. Si vuole calcolare l' integrale indefinito di $f(x) = e^{4x}$. Dato che

$$\int e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + c, \quad \alpha \neq 0,$$

si ha

$$\int e^{4x} dx = \frac{1}{4} e^{4x} + c.$$

ESERCIZI: Utilizzando la tecnica di integrazione per sostituzione, calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int \frac{e^{x^2} 2x}{1 + e^{x^2}} dx, \quad \int \frac{1}{x \log(x)} dx, \quad \int \tan(x) dx, \quad \int \tan\left(\frac{x+1}{x}\right) \frac{1}{x^2} dx,$$

$$\int \sin(4e^x + 1)e^x dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{1 + \sqrt{x}} dx, \quad \int \sin^3(x) dx.$$

ESERCIZIO. Fissato $n \in \mathbb{N}$, utilizzando la tecnica di integrazione per sostituzione, calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int (\sin(x))^{2n+1} dx, \quad \int (\cos(x))^{2n+1} dx.$$

ESERCIZI: Utilizzando la tecnica di integrazione per parti, calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int x^2 e^x dx, \quad \int \log(x) dx, \quad \int \arctan(x) dx, \quad \int x^2 \sin x dx, \quad \int x(\log x)^2 dx.$$

ESERCIZI: Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int \log\left(\frac{x+b}{a}\right) dx, \quad \int \arctan\left(\frac{x+b}{a}\right) dx.$$

ESERCIZI: Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{2+7x^6}} dx, \quad \int \frac{x}{(1+4x^2)^2} dx, \quad \int \frac{x^2}{\sqrt{2-2x^6}} dx, \quad \int \sqrt[5]{a+bx^3} x^2 dx.$$

ESERCIZI CONSIGLIATI: Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int \left(\sqrt{\sqrt{2}+x} \right) e^{\sqrt{\sqrt{2}+x}} dx, \quad \int \frac{\log(x) \log^2(x) - 4}{x(2 + \log(x))} dx,$$

$$\int \left(\arctan\left(\sqrt{2 - \frac{1}{x}}\right) \right) \frac{1}{x^2} dx, \quad \int \frac{\arctan^3(e^x + 4) + \arctan(e^x + 4)}{1 + (e^x + 4)^2} e^x dx.$$

ESERCIZIO: Fissato $n \in \mathbb{N}$, utilizzando la tecnica di integrazione per parti, determinare una formula ricorsiva per i seguenti integrali indefiniti:

$$\int (\sin(x))^{2n} dx, \quad \int (\cos(x))^{2n} dx.$$

27. Lezione 34

Argomenti trattati:

- Integrazione delle funzioni razionali.

ESERCIZI: Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx, \quad \int \frac{x}{x^2 - a^2} dx,$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx, \quad \int \frac{x}{x^2 + a^2} dx.$$

ESERCIZIO. Calcolare l'integrale indefinito:

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx, \quad a \neq 0,$$

utilizzando la sostituzione $x = \frac{t-b}{2a}$ avendo cura di ritrovare le formule determinate a lezione corrispondenti ai casi $\Delta \geq 0$, dove $\Delta = b^2 - 4ac$.

ESERCIZI: Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int \frac{5x - \sqrt{3}}{9x^2 - 6\sqrt{2}x + 4} dx, \quad \int \frac{x - 4}{2x^2 + 5x - 3} dx.$$

ESERCIZI: Calcolare i seguenti integrali indefiniti

$$\int \frac{4x + 1}{(9x^2 - 6\sqrt{2}x + 4)^2} dx, \quad \int \frac{1}{(3x^2 + 4)^4} dx.$$

ESERCIZI: Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int \frac{x^5 + 2x^4 - 9x^3 - x^2 + 11x - 7}{x^2 + 2x - 8} dx, \quad \int \frac{x^3}{1 + x^2} dx.$$

ESERCIZIO. Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{1}{(x^2 - 2\sqrt{6}x + 8)(x + 2)} dx.$$

28. Lezione 35

Argomenti trattati:

- Calcolo di integrali definiti. Alcune sostituzioni speciali.

ESERCIZI: Calcolare i seguenti integrali definiti:

$$\int_1^2 x \sqrt{-x^2 + 3x - 2} dx, \quad \int_1^2 x^2 \sqrt{-x^2 + 3x - 2} dx.$$