DIARIO DELLE LEZIONI 27-28-29-30

Contents

[B] Dispense a cura del docente.

12. **Lezione 27**

Argomenti trattati:

- Derivate di ordine superiore. Derivata n-esima di $\log(1+x)$. La Formula di Leibniz.

ESERCIZIO. Dimostrare che, fissati $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ si ha

$$D^{(n)}(1+x)^{\alpha} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+2)(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

- Approssimazione di funzioni a meno di o-piccoli di potenze date tramite il Teorema di L' Hopital. Il Polinomio di Taylor.

ESERCIZIO. Dimostrare, utilizzando solo il Teorema di L' Hopital che

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!}}{x^3} = \frac{1}{3!},$$

e quindi in particolare che

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3), \ x \to 0.$$

ESERCIZIO. Verificare, utilizzando solo il Teorema di L' Hopital che

$$\sin x = x + o(x^2), \quad \text{e che} \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4), \ x \to 0.$$

- Costruzione del Polinomio di Taylor. Sviluppo di Mac Laurin.

ESERCIZIO. Sia f definita in (a,b), $x_0 \in (a,b)$ e f derivabile n-volte in x_0 con $n \geq 3$. Se

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k,$$

dimostrare che la derivata terza di T_n verifica

$$T_n^{(3)}(x) = \sum_{k=3}^{n} a_k k(k-1)(k-2)(x-x_0)^{k-3},$$

e che

$$T_n^{(3)}(x_0) = 3!\, a_3.$$

Dimostrare inoltre che se $a_0 = f(x_0)$, $a_1 = f^{(1)}(x_0)$, $a_2 = \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}$, allora si ha

$$f(x) = T_3(x) + o((x-x_0)^3),\ x \to x_0,$$

se e solo se

$$a_3 = \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}.$$

- Il Teorema di Peano. Esempi di sviluppi di Mac Laurin di ordine $n \in \mathbb{N}$ per e^x, $\log(1+x)$, $\cos x$, $\sin x$.
- Applicazioni del Teorema di Peano. Caratterizzazione dei punti di massimo/minimo/flesso.

13. **Lezione 28**

Argomenti trattati:

- Formula del resto di Lagrange. Esempi di approssimazioni numeriche di funzioni elementari.
- Calcolo del Polinomio di Taylor e applicazioni.

ESERCIZI: Calcolare i seguenti limiti al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x^2) + 2(\cos(x)-1)}{x^\alpha}, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x^2) + 2(\cos(x)-1) + \frac{5}{12}x^4}{e^{x^\alpha}-1},$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x^2) + 2(\cos(x)-1) + \frac{1}{12}\left(e^{5x^4}-1\right)}{x \arctan x^\alpha}.$$

ESERCIZIO. Utilizzare le formule di addizione e gli sviluppi di Mac Laurin per $\sin y$ e $\cos y$

per calcolare il Polinomio di Taylor di ordine 3 di $f(x) = x \sin x$ in $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

ESERCIZI: Calcolare il seguente limite al variare di $\beta \in \mathbb{R}^+$:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{(1+\sqrt{x}\log x)^\beta} - 1 \right) \frac{\log(1+x^{\frac{3}{2}}) - \sin(\sqrt{x}) + \sqrt{x}}{\log(x)\left[(1+x)^{\frac{1}{10}} - 1\right] - \frac{1}{5}\left(x^{\frac{x}{2}} - 1\right)}.$$

Esempio: Studiare la derivabilità in $x = 0$ di

$$f(x) = \sqrt[4]{\left| e^{|x|^{\frac{3}{2}}} - 1 - |x|^{\frac{3}{2}} \right|}.$$

Dato che $e^y = 1 + y + \frac{y}{2!} + o(y^2)$, $y \to 0$ si ha

$$e^{|x|^{\frac{3}{2}}} - 1 - |x|^{\frac{3}{2}} = 1 + |x|^{\frac{3}{2}} + \frac{(|x|^{\frac{3}{2}})^2}{2} + o((|x|^{\frac{3}{2}})^2) - 1 - |x|^{\frac{3}{2}} =$$

$$\frac{|x|^3}{2} + o(|x|^3),\ x \to 0,$$

e quindi in particolare

$$f(x) = \sqrt[4]{\left|\frac{|x|^3}{2} + o(|x|^3)\right|} = \sqrt[4]{\left|\frac{|x|^3}{2} + o(|x|^3)\right|} = \sqrt[4]{\left|\frac{|x|^3}{2}\right| |(1+o(1))|} = \tag{13.1}$$

$$\sqrt[4]{\left|\frac{|x|^3}{2}\right|}\sqrt[4]{|(1+o(1))|} = \frac{|x|^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[4]{2}}(1+o(1)),\ x \to 0$$

Se ne deduce che

$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{|x|^{\frac{3}{4}}}{x\sqrt[4]{2}}(1+o(1)) = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} x^{-\frac{1}{4}} \\ -\lim\limits_{x\to 0^-} (-x)^{-\frac{1}{4}} \end{cases} = \pm\infty,$$

e quindi in particolare che $x = 0$ è un punto di cuspide per f.

Osservazione
Nella (13.1) si sarebbe anche potuto osservare che $\frac{|x|^3}{2} + o(|x|^3)$ è definitivamente positiva per $x \to 0$ e concludere analogamente che

$$\sqrt[4]{\left|\frac{|x|^3}{2} + o(|x|^3)\right|} = \sqrt[4]{\frac{|x|^3}{2} + o(|x|^3)} = \sqrt[4]{\frac{|x|^3}{2}}\sqrt[4]{(1+o(1))},\ x \to 0.$$

Una ulteriore semplificazione si sarebbe potuta ottenere fin dall' inizio studiando il segno di $e^y - 1 - y$.

ESERCIZI: Studiare la derivabilità in $x = 0$ di

$$f(x) = \sqrt[6]{\left|e^{x^3} - 1 - x^3\right|}, \quad f(x) = \sqrt{\left|e^{x^3} - 1 - x^3\right|},$$

$$f(x) = \left(e^{x^{\frac{1}{5}}} - 1 - x^{\frac{1}{5}}\right)^\alpha,\ \alpha > 0.$$

ESERCIZIO. Studiare la derivabilità in $\mathbb{R}$ di

$$f(x) = \sqrt[7]{|e^x - 1 - x|}.$$

ESERCIZIO. Studiare la derivabilità in $\mathbb{R}$ di

$$f(x) = \sqrt{|\log(1 + |x|^5) - 2|}.$$

ESERCIZIO. Calcolare gli sviluppi di Mac Laurin di ordine $n = 2$ e $n = 3$ per

$$f(x) = \log\left(1 + x + x^2\right)$$

ESERCIZIO. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+2x-x^2} - \sin 2x - (e^{5x^2+x^4} - 1) - 1 + 4x}{\log\left(1 + x^3\right)}$$

ESERCIZIO. Calcolare lo sviluppo di Mac Laurin di ordine $n = 4$ per

$$f(x) = \log(\cos x).$$

14. **Lezione 29**

- Calcolo del Polinomio di Taylor e applicazioni.

15. **Lezione 30**

- Calcolo del Polinomio di Taylor e applicazioni.