LEZIONI 21-22-23

Contents

9. **DERIVATE DI FUNZIONI DI UNA VARIABILE REALE** 110
9.1. Definizioni. Derivabilità e prime conseguenze. 110
9.2. Derivate di funzioni elementari e calcolo delle derivate. 112
9.3. Derivate, rette tangenti e limiti notevoli. 117
9.4. Punti di non derivabilità. 119
9.5. Teoremi di Fermat, Rolle, Lagrange. 122

[**B**] Dispense a cura del docente.

9. DERIVATE DI FUNZIONI DI UNA VARIABILE REALE

9.1. Definizioni. Derivabilità e prime conseguenze.

Sia $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ una funzione arbitraria e siano $x_0 \in \mathbb{R}$ e $h \neq 0$ fissati. La retta passante per i punti appartenenti al grafico di f, $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, dove $x_1 = x_0 + h$, ha equazione

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot (x - x_0).$$

Il coefficiente angolare della retta secante il grafico di f è quindi

$$m_f(x_0, h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}, \tag{9.1.1}$$

detto anche **rapporto incrementale** di f tra x_0 e $x_0 + h$.
Si usa spesso una notazione lievemente diversa per indicare il rapporto incrementale. Indicando con x_1 il punto $x_1 = x_0 + h$, si ha $h = x_1 - x_0$ e sostituendo nella (9.1.1), si ottiene

$$P_f(x_1, x_0) = m_f(x_0, x_1 - x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \tag{9.1.2}$$

ovvero il rapporto incrementale di f tra x_0 e x_1.
È chiaro che se $m_f(x_0, h) > 0$ e se $h > 0$, allora $f(x_0 + h) - f(x_0) > 0$. Viceversa, se $m_f(x_0, h) > 0$ e se $h < 0$, allora $f(x_0) - f(x_0 + h) > 0$. Ci si potrebbe allora chiedere se esiste una relazione tra le proprietà di monotonia di f e il segno di $m_f(x_0, h)$. Infatti, si può dimostrare il seguente

TEOREMA
Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $f : I \mapsto \mathbb{R}$. Allora:
(i) f è monotona crescente (strettamente crescente) in I $\iff$
$P_f(x, x_0) \geq 0 (> 0)\ \forall\ x \in I,\ \forall x_0 \in I : x \neq x_0$.
(ii) f è monotona decrescente (strettamente decrescente) in I $\iff$
$P_f(x, x_0) \leq 0 (< 0)\ \forall\ x \in I,\ \forall x_0 \in I : x \neq x_0$.

Dimostrazione.[Facoltativa]
(**i**) Se f è monotona crescente, si ha $f(x) \geq f(x_0)$, $\forall\ x \in I$, $\forall x_0 \in I : x > x_0$. Quindi in particolare $P_f(x, x_0) \geq 0$, $\forall x > x_0$. Viceversa, se $x < x_0$, si ha $f(x) \leq f(x_0)$ e quindi $P_f(x, x_0) \geq 0$. Quindi $P_f(x, x_0) \geq 0$, $\forall\ x \in I$, $\forall x_0 \in I : x \neq x_0$.
Se f è strettamente crescente lo stesso argomento può essere applicato senza difficoltà sostituendo le

disuguaglianze $\geq$ con le disuguaglianze $>$.
È immediato verificare l' implicazione inversa.

(**ii**) Se f è monotona decrescente (strettamente decrescente), allora $g = -f$ è monotona crescente (strettamente crescente) e $P_g(x, x_0) \geq 0 (> 0)$, $\forall \ x \in I$, $\forall x_0 \in I \ : \ x \neq x_0$, dal punto ($i$). Ma $P_g(x, x_0) = P_{-f}(x, x_0) = -P_f(x, x_0)$, e quindi $P_f(x, x_0) \leq 0 (< 0)$, $\forall \ x \in I$, $\forall x_0 \in I \ : \ x \neq x_0$.
È immediato verificare l' implicazione inversa. ∎

Si vuole ora ottenere un nuova funzione, che possa essere calcolata a partire da f, il cui segno sia direttamente collegato alla monotonia della funzione come per il rapporto incrementale, ma che dipenda da una sola variabile. Si introduce allora la seguente fondamentale definizione:

Definizione[DERIVATA]
Sia $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$. Si dice che f è **derivabile** *in x_0 se esiste finito il limite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{9.1.3}$$

In particolare, se f è derivabile in x_0, il limite definito dalla (9.1.3) si dice **derivata** *di f in x_0 e si indica con uno dei seguenti simboli*

$$Df(x_0), \quad f^{'}(x_0), \quad \frac{df}{dx}(x_0).$$

Se f è derivabile per ogni $x \in (a, b)$, la funzione $f^{'} : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$, definita da

$$x \mapsto f^{'}(x), \ \forall x \in (a, b),$$

si dice **funzione derivata** *o* **derivata** *di f in (a, b).*

Osservazione
È chiaro che f è derivabile in x_0 se e solo se esiste finito il limite per $h \to 0$ del rapporto incrementale nella forma (9.1.1),

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

□

TEOREMA [CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI DERIVABILI]
Sia $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$. Se f è derivabile in x_0, allora è continua in x_0.

Dimostrazione.
Si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0) + f(x_0)] = f(x_0) + \lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] =$$

$$f(x_0) + \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = f(x_0) + f^{'}(x_0) \cdot 0 = f(x_0),$$

ovvero f è continua in x_0. ∎

Definizione[FUNZIONI DIFFERENZIABILI]
Sia $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$. Si dice che f è differenziabile in x_0 se esiste $\lambda_{f, x_0} \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = f(x_0) + \lambda_{f, x_0}(x - x_0) + o(x - x_0), \ x \to x_0. \tag{9.1.4}$$

Se f è differenziabile in x_0, la retta $y = f(x_0) + \lambda_{f, x_0}(x - x_0)$ si dice **retta tangente** *al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$.*

TEOREMA [DIFFERENZIABILITÀ DELLE FUNZIONI DERIVABILI]
Sia $f : (a,b) \mapsto \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a,b)$. Allora f è derivabile in x_0 se e solo se f è differenziabile in x_0 e $\lambda_{f,x_0} = f^{'}(x_0)$. In particolare, se f è derivabile in x_0, allora è ben definita la retta tangente al grafico in $(x_0, f(x_0))$, ed ha equazione

$$y = f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0). \tag{9.1.5}$$

Dimostrazione.
Si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f^{'}(x_0)$$

se e solo se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f^{'}(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0,$$

ovvero se e solo se

$$f(x) = f(x_0) + \lambda_{f,x_0}(x - x_0) + o(x - x_0),\ x \to x_0,$$

con $\lambda_{f,x_0} = f^{'}(x_0)$. ■

Osservazione[INTERPRETAZIONE GEOMETRICA]
Al variare di $x \in (a,b)$, come osservato precedentemente, $P_f(x, x_0)$ descrive il coefficiente angolare delle rette secanti il grafico di f. Se il limite (9.1.3) esiste finito, ovvero se f è differenziabile, il coefficiente angolare delle rette secanti tende al coefficiente angolare $f^{'}(x_0)$ della retta tangente (9.1.5). In particolare, in questo caso, la funzione definita dalla retta tangente, $f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0)$, è una "buona" approssimazione della funzione data per $x \to x_0$, nel senso che l' errore che si commette nell' approssimare $f(x)$ con $f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $(x - x_0)$ per $x \to x_0$,

$$f(x) - [f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0)] = o(x - x_0),\ x \to x_0.$$

Si parla anche di **migliore approssimazione lineare** di f in x_0, nel senso che, se f è differenziabile, esiste un **unico** polinomio di primo grado che verifica la (9.1.4), ovvero $f(x_0)+f^{'}(x_0)(x-x_0)$. Il polinomio definito dalla retta tangente è unico, perché il limite dei rapporti incrementali, se esiste, è unico. □

9.2. Derivate di funzioni elementari e calcolo delle derivate.

Utilizzando la definizione di derivata, calcoliamo le derivate di alcune funzioni elementari.
Sia $c \in \mathbb{R}$. Si vuole calcolare la derivata di

$$f(x) = c,\ x \in \mathbb{R}.$$

Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0.$$

Quindi

$$f^{'}(x) = 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Si vuole calcolare la derivata di

$$f(x) = x,\ x \in \mathbb{R}.$$

Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

Quindi

$$f^{'}(x) = 1,\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Sia $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si vuole calcolare la derivata di
$$f(x) = x^{\alpha},\ x \in (0, +\infty).$$
Fissato $x_0 \in (0, +\infty)$, si ha
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^{\alpha} - x_0}{h} = \lim_{h\to 0} x_0^{\alpha} \frac{(1+\frac{h}{x_0})^{\alpha} - 1}{h} = \alpha x_0^{\alpha-1}.$$
Quindi
$$f^{'}(x) = \alpha x^{\alpha-1},\ \forall\, x \in (0, +\infty).$$

Si vuole calcolare la derivata di
$$f(x) = e^{x},\ x \in \mathbb{R}.$$
Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} e^{x_0} \frac{e^{h} - 1}{h} = e^{x_0}.$$
Quindi
$$f^{'}(x) = e^{x},\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

ESERCIZIO. Dimostrare che $D(\log x) = \frac{1}{x}$, $D(\cos x) = -\sin x$ e $D(\sin x) = \cos x$ nei loro dominii naturali.

TEOREMA [DERIVATA DELLA SOMMA/PRODOTTO/FUNZIONE COMPOSTA]
(i) Sia I un insieme aperto, $f : I \mapsto \mathbb{R}$, $g : I \mapsto \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ e $c \in \mathbb{R}$. Se f e g sono derivabili in x_0, allora $f \pm g$, cf e $f \cdot g$ sono derivabili in x_0 e sia ha
$$D[f \pm g](x_0) = Df(x_0) \pm Dg(x_0), \quad D[cf](x_0) = c \cdot Df(x_0), \quad D[f \cdot g](x_0) = Df(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot Dg(x_0).$$
(ii) Siano I e J due insiemi aperti $f : J \mapsto \mathbb{R}$, $g : I \mapsto \mathbb{R}$, $Im(g) \subset J$, $x_0 \in I$, $g(x_0) = y_0$, $y_0 \in J$. Se g è derivabile in x_0 e f è derivabile in y_0, allora la funzione composta $f \circ g$ è derivabile in x_0 e si ha
$$D[f \circ g](x_0) = Df(g(x_0)) \cdot Dg(x_0).$$

Dimostrazione[Facoltativa]
(**i**) Il fatto che
$$D[f \pm g](x_0) = Df(x_0) \pm Dg(x_0), \quad D[cf](x_0) = c \cdot Df(x_0),$$
è una conseguenza immediata della definizione di derivata.
Usando la definizione di differenziabilità e la continuità di f e g in x_0, per $x \to x_0$, si ha,
$$f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) = f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0) =$$
$$(f(x) - f(x_0))g(x) + (g(x) - g(x_0))f(x_0) =$$
$$(f(x) - f(x_0))g(x_0) + (f(x) - f(x_0))(g(x) - g(x_0)) + (g(x) - g(x_0))f(x_0) =$$
$$(Df(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0))g(x_0) + o(x - x_0) + (Dg(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0))f(x_0) =$$
$$Df(x_0)g(x_0)(x - x_0) + f(x_0)Dg(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) = [Df(x_0)g(x_0) + f(x_0)Dg(x_0)](x - x_0) + o(x - x_0).$$
Concludiamo quindi che $f \cdot g$ è differenziabile e che $D[f \cdot g](x_0) = Df(x_0)g(x_0) + f(x_0)Dg(x_0)$.

(**ii**) Sia
$$Q(x, x_0) = f(g(x)) - f(g(x_0)) - Df(g(x_0))Dg(x_0)(x - x_0).$$
Per definizione di o-piccolo, la tesi è equivalente a
$$\lim_{x\to x_0} \frac{Q(x, x_0)}{x - x_0} = 0,$$

e quindi è sufficiente verificare che

$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,\delta_\varepsilon > 0 : |Q(x,x_0)| < \varepsilon|x-x_0|,\ \forall\,x \in (x_0-\delta_\varepsilon, x_0+\delta_\varepsilon)\setminus\{x_0\}.$$

Dato che f è differenziabile, si ha

$$\forall\,\sigma > 0,\ \exists\,\mu_\sigma > 0 : |f(y)-f(y_0)-Df(y_0)(y-y_0)| \le \sigma|y-y_0|,\ \forall\,y \in (y_0-\mu_\sigma, y_0+\mu_\sigma). \tag{9.2.1}$$

Osserviamo che non è necessario escludere il punto y_0 dall' intorno $(y_0-\mu_\sigma, y_0+\mu_\sigma)$, come sarebbe doveroso dalla definizione di limite, perché la (9.2.1) non richiede la disuguaglianza stretta ed è quindi una conseguenza della condizione di differenziablità di f. In questo caso quindi la (9.2.1) è identicamente verificata per $y = y_0$.
Dato che $Im(g) \subset J$ e $y = g(x) \to y_0$, $x \to x_0$, esiste $\rho_\sigma > 0$ tale che $g(x) \in (y_0-\mu_\sigma, y_0-\mu_\sigma)$ per ogni $x \in (x_0-\rho_\sigma, x_0+\rho_\sigma)$. Quindi

$$|f(g(x))-f(g(x_0))-Df(g(x_0))(g(x)-g(x_0))| \le \sigma|g(x)-g(x_0)|,\ \forall\,x \in (x_0-\rho_\sigma, x_0+\rho_\sigma). \tag{9.2.2}$$

D' altra parte si ha, per ogni $x \in I$

$$|Q(x,x_0)| \le |f(g(x))-f(g(x_0))-Df(g(x_0))(g(x)-g(x_0))| + |Df(g(x_0))(g(x)-g(x_0)-Dg(x_0)(x-x_0))|, \tag{9.2.3}$$

e dato che g è differenziabile,

$$\exists\,\nu_\sigma > 0 : |g(x)-g(x_0)-Dg(x_0)(x-x_0)| \le \sigma|x-x_0|,\ \forall\,x \in (x_0-\nu_\sigma, x_0+\nu_\sigma), \tag{9.2.4}$$

dove, come sopra, non è necessario escludere x_0 dall' intorno $(x_0-\nu_\sigma, x_0+\nu_\sigma)$.
Segue in particolare dalla (9.2.4) che

$$|g(x)-g(x_0)| \le |Dg(x_0)||x-x_0| + \sigma|x-x_0|,\ \forall\,x \in (x_0-\nu_\sigma, x_0+\nu_\sigma). \tag{9.2.5}$$

Sia ora $\overline{\delta}_\sigma = \min\{\rho_\sigma, \nu_\sigma\}$. Sostituendo la (9.2.5) nella (9.2.2), e poi la (9.2.2) e la (9.2.4) nella (9.2.3), concludiamo che

$$|Q(x,x_0)| \le \sigma|Dg(x_0)||x-x_0| + \sigma|x-x_0| + \sigma|Df(g(x_0))||x-x_0| = \sigma M|x-x_0|,\ \forall\,x \in (x_0-\overline{\delta}_\sigma, x_0+\overline{\delta}_\sigma),$$

dove

$$M = |Dg(x_0)| + 1 + |Df(g(x_0))|$$

è una costante positiva che non dipende da σ. A questo punto, per ogni $\varepsilon > 0$, è sufficiente scegliere $\sigma = \sigma_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{M}$ e definire $\delta_\varepsilon = \overline{\delta}_{\sigma_\varepsilon}$, per ottenere che

$$|Q(x,x_0)| < \varepsilon|x-x_0|,\ \forall\,x \in (x_0-\delta_\varepsilon, x_0+\delta_\varepsilon).$$

■

Osservazione
La dimostrazione della (ii) di cui sopra equivale al seguente argomento. Dato che

$$f(y)-f(y_0)-Df(y_0)(y-y_0) = o(y-y_0),\ y \to y_0,$$

e dato che $Im(g) \subset J$ e $g(x) \to y_0$, $x \to x_0$, possiamo porre $y = g(x)$ per ogni x sufficientemente vicino a x_0. In particolare, concludiamo che, definitivamente per $x \to x_0$, si ha

$$\begin{gathered} f(g(x))-f(g(x_0)) = Df(g(x_0))(g(x)-g(x_0)) + o(g(x)-g(x_0)) = \\ Df(g(x_0))(Dg(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)) + o(x-x_0) = \\ Df(g(x_0))Dg(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0),\ x \to x_0. \end{gathered}$$

Concludiamo quindi che $f \circ g$ è differenziabile e che $D[f\circ g](x_0) = Df(g(x_0))Dg(x_0)$. □

Una classe di funzioni di largo uso nelle applicazioni è quella delle funzioni iperboliche,

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ x \in \mathbb{R},$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ x \in \mathbb{R},$$

che devono il loro nome alla identità,

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1,\ \forall\, x \in \mathbb{R},$$

che implica che il punto $(\cosh x, \sinh x)$, al variare di x in $\mathbb{R}$, descrive il ramo della iperbole equilatera $x_1^2 - x_2^2 = 1$, $x_1 > 0$.

ESERCIZIO. Dimostrare che $D(\cosh x) = \sinh x$ e $D(\sinh x) = \cosh x$ nei loro dominii naturali.

Calcoliamo alcune derivate usando le tabelle di derivazione delle funzioni elementari.

Esempio. Si vuole calcolare la derivata di

$$f(x) = \sin(x^3),\ x \in \mathbb{R}.$$

Quindi,

$$Df(x) = D(\sin(y))\,|_{y=x^3}\, D(x^3) = \cos(x^3) \cdot 3x^2.$$

Esempio. Si vuole calcolare la derivata di

$$f(x) = \log\left(\sin(e^{3x})\right),\ x \in \mathrm{dom}(f).$$

Quindi,

$$Df(x) = \frac{1}{\sin(e^{3x})} \cdot \cos(e^{3x}) \cdot e^{3x} \cdot 3.$$

Si suggerisce di determinare $\mathrm{dom}(f)$.

Esempio. Si vuole calcolare la derivata di

$$f(x) = \sqrt{x^4 + e^{\sin x}},\ x \in \mathrm{dom}(f).$$

Quindi,

$$Df(x) = D\left[\left(x^4 + e^{\sin x}\right)^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{2}\left(x^4 + e^{\sin x}\right)^{-\frac{1}{2}} D\left(x^4 + e^{\sin x}\right) =$$
$$\frac{1}{2}\left(x^4 + e^{\sin x}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(4x^3 + e^{\sin x}\cos x\right).$$

Si suggerisce di determinare $\mathrm{dom}(f)$.

Esempio. Si vuole calcolare la derivata di

$$f(x) = x^{x^2},\ x \in (0, +\infty).$$

Quindi,

$$Df(x) = D(x^{x^2}) = D(e^{x^2 \log x}) = e^{x^2 \log x} D(x^2 \log x) =$$
$$x^{x^2}\left(2x \log x + x^2 \frac{1}{x}\right) = x^{x^2}(2x \log x + x),$$

dove si è usata la formula di derivata del prodotto.

ESERCIZIO. Dimostrare che

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{(Df)g - f(Dg)}{g^2}.$$

Esempio. Si vuole calcolare la derivata di

$$f(x) = \tan(x),\ x \in \mathrm{dom}(f).$$

Quindi,

$$Df(x) = D(\tan x) = D\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \cos x - (\sin x \cdot (-\sin x))}{\cos^2(x)} =$$
$$\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2(x)},$$

dove si è usata la formula di derivata del prodotto.

ESERCIZI: Calcolare le derivate delle seguenti funzioni nei loro dominii naturali.

$$\tanh(x), \quad \frac{1}{\log x}, \quad \frac{1}{x^2 \log x}, \quad e^{\frac{x^4}{x^2-1}}, \quad (\log x)^{\sin x}.$$

Ricordiamo che $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$.

Per determinare la derivata di alcune funzioni inverse si usa il seguente:

TEOREMA [DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA]
Sia $f : (a,b) \mapsto \mathbb{R}$ iniettiva e derivabile e $g = f^{-1}$ la sua funzione inversa. Se $x_0 \in (a,b)$ e $Df(x_0) \neq 0$, allora $g(y)$ è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e si ha

$$Dg(y_0) = \frac{1}{Df(g(y_0))}. \tag{9.2.6}$$

Dimostrazione.[Facoltativa]
Per dimostrare che g è derivabile in $y_0 = f(x_0)$, se f è derivabile in x_0 e $Df(x_0) \neq 0$, osserviamo che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = Df(x_0) \neq 0,$$

e quindi è ben definito il limite del reciproco del rapporto incrementale,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{Df(x_0)} \in \mathbb{R}.$$

Dato che ad ogni x in (a,b) corrisponde uno ed un solo $y = f(x)$ in $\mathrm{Im}(f)$, è ben definito il cambiamento di variabile $y = f(x)$ che implica,

$$\lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{Df(x_0)}.$$

La (9.2.6) segue osservando che $Df(x_0) = Df(g(y_0))$. ■

Osservazione
La dimostrazione data è la versione rigorosa del seguente argomento euristico. Dato che $g = f^{-1}$, si ha

$$f(g(y)) = y, \ \forall\, y \in \mathrm{Im}(f). \tag{9.2.7}$$

Supponiamo che g sia derivabile in $y = y_0 = f(x_0)$. Allora, derivando l' identità (9.2.7) rispetto a y e usando il teorema della derivata della funzione composta, si ha

$$Df(g(y_0)) \cdot Dg(y_0) = 1,$$

e la (9.2.7) segue non appena $Df(g(y_0)) = Df(x_0) \neq 0$. □

Esempio. Si vuole calcolare la derivata di $g(y) = \sqrt{y}$, $y \in (0, +\infty)$. Dato che $g = f^{-1}$, $f(x) = x^2$, $x \in (0, +\infty)$ si ha

$$g'(y) = \left.\frac{1}{f'(x)}\right|_{x=g(y)} = \left.\frac{1}{2x}\right|_{x=\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{y}},$$

che coincide con la formula già nota per la derivata di potenza. Osserviamo che il dominio naturale della derivata di Dg è $(0,+\infty)$ e non coincide con quello di g, che invece è $[0,+\infty)$.

Esempio. Si vuole calcolare la derivata di $g(y) = \arctan y$, $y \in \mathbb{R}$. Dato che $g = f^{-1}$, $f(x) = \tan x$, si ha

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}\Big|_{x=g(y)} = \frac{1}{1+\tan^2 x}\Big|_{\tan x = y} = \frac{1}{1+y^2}.$$

In questo caso $\mathrm{dom}(g) = \mathrm{dom}(Dg)$.

ESERCIZIO. Dimostrare che per $y \in (-1,1)$, si ha

$$D(\arcsin y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\; D(\arccos y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Osservare che i dominii naturali delle derivate delle funzioni circolari inverse non coincidono con quelli delle funzioni stesse.

9.3. **Derivate, rette tangenti e limiti notevoli.**
Si osserva che, applicando la definizione di differenziabilità alla funzione $f(x) = \sin x$ in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\sin x = \sin x_0 + (\cos x_0)(x - x_0) + o(x - x_0),\; x \to x_0.$$

In particolare, per $x_0 = 0$, ritroviamo la ben nota

$$\sin x = x + o(x),\; x \to 0,$$

e la retta tangente al grafico di $\sin x$ nel punto $(0,0)$ è

$$y = x.$$

Più in generale, tutti i limiti notevoli per $x \to 0$ fin ora esaminati corrispondono ad una formula di differenziabilità per una funzione derivabile in $x_0 = 0$. Osserviamo comunque che il limite notevole $\frac{1-\cos x}{x^2} \to \frac{1}{2}$ è più delicato. Infatti in questo caso la differenziabilità dice solo che

$$\cos x = 1 + \sin(0)x + o(x) = 1 + o(x),\; x \to 0,$$

e infatti la retta tangente al grafico di $\cos x$ nel punto $(0,1)$ è

$$y = 1.$$

È chiaro che il risultato ottenuto, $\cos x = 1 + o(x)$, è coerente con il limite notevole che specifica in questo caso una ulteriore properietà della quantità $o(x)$, ovvero $o(x) = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$, $x \to 0$.

Usando la definizione di differenziabilità sulle funzioni circolari inverse, possiamo ottenere altri limiti importanti.

Esempio. Sia $f(x) = \arctan x$ e $x_0 = 0$. Si ha

$$\arctan x = f(0) + f'(0)(x-0) + o(x-o) = 0 + \frac{1}{1+0}x + o(x) = x + o(x),\; x \to 0,$$

che è equivalente a

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x - x}{x} = 0,$$

ovvero a

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} = 1.$$

Più in generale, utilizzando la formula di differenziabilità , si possono ottenere i limiti necessari a risolvere problemi specifici.

Esempio. Sia $f(x) = x \arctan\left(1 + \frac{1}{x}\right)$. Si vuole determinare se f ha un asintoto obliquo per $x \to +\infty$. Dato che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \cdot \frac{\pi}{4} = +\infty,$$

ha senso cercare di definire il coefficiente angolare dell' eventuale asintoto obliquo. Si ha

$$m_+ = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \arctan\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \arctan\left(1 + 0^+\right) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^+.$$

Per determinare l' esistenza dell' asintoto, dobbiamo quindi calcolare, se esiste finito, il limite

$$q_+ = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - \frac{\pi}{4}x\right) = \lim_{x \to +\infty} x \left(\arctan\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{4}\right) = \lim_{y \to 0^+} \frac{\arctan\left(1 + y\right) - \frac{\pi}{4}}{y},$$

dove rimane inteso che l' ultimo segno di uguaglianza rimane valido se l' ultimo limite esiste.
Usiamo allora la differenziabilità di $\arctan\left(1 + y\right)$ in $y = 0$. Si ha

$$\arctan\left(1 + y\right) = \frac{\pi}{4} + \left(\left.\frac{1}{1 + (1 + y)^2}\right|_{y=0}\right) y + o(y),\ y \to 0,$$

ovvero

$$\arctan\left(1 + y\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}y + o(y),\ \ y \to 0. \tag{9.3.1}$$

Se ne deduce che

$$\frac{\arctan\left(1 + y\right) - \frac{\pi}{4}}{y} = \frac{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}y + o(y) - \frac{\pi}{4}}{y} = \frac{1}{2} + o(1),\ \ y \to 0,$$

e quindi che $q_+ = \frac{1}{2}$. Altrimenti, e in modo del tutto equivalente, dalla (9.3.1) si può ricavare il limite notevole

$$\lim_{y \to 0^+} \frac{\arctan\left(1 + y\right) - \frac{\pi}{4}}{y} = \frac{1}{2}.$$

Esempio. Sia $f(x) = \arctan x$. Si vuole calcolare la retta tangente a f nel punto $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$. Si ha

$$Df(x) = \frac{1}{1 + x^2},$$

e quindi la retta tangente cercata è

$$y = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(x - 1\right).$$

In particolare la relazione di differenziabilità per f in $x_0 = 1$ è

$$\arctan x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(x - 1\right) + o\left(x - 1\right),\ \ x \to 1,$$

che implica

$$\lim_{x \to 1} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{4}}{x - 1} = \frac{1}{2}.$$

Ponendo $x = 1 + y$, $y \to 0$ si ottiene ovviamente il limite dell' esempio precedente.

ESERCIZIO. Determinare la retta tangente a

$$f(x) = \frac{e^x}{x} \log\left(x - 5\right),$$

nel punto $x = 6$.

ESERCIZIO. Determinare gli asintoti obliqui di

$$f(x) = (x-4)\arctan\left|\frac{x}{x-1}\right|.$$

9.4. **Punti di non derivabilità.**

Definizione[DERIVATA DESTRA/SINISTRA]
Sia $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$. Si dice che f è **derivabile da destra** *in a, se esiste finito il limite*

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}. \tag{9.4.1}$$

Si dice che f è **derivabile da sinistra** *in b, se esiste finito il limite*

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{x-b}. \tag{9.4.2}$$

Le derivate destra/sinistra di f in a/b si indicano con uno dei seguenti simboli

$$Df^+(a), \quad f'_+(a) \quad / \quad Df^-(b), \quad f'_-(b).$$

Osservazione
Non è difficile verificare che se $x_0 \in (a, b)$, allora f è derivabile in x_0 se e solo se è derivabile da destra e da sinistra in x_0 e $Df^+(x_0) = Df^-(x_0)$. □

Definizione[PUNTO ANGOLOSO]
Sia $f(a, b) \mapsto \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$. Se f è continua in x_0 e derivabile da sinistra e da destra in x_0 e se

$$D^+f(x_0) \neq D^-f(x_0),$$

allora $(x_0, f(x_0))$ si dice **punto angoloso** *di f.*

Esempio. Sia $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Dato che

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

si verifica subito che

$$Df(x) = \operatorname{sgn}(x), \; x \neq 0,$$

e che

$$D^+f(0) = 1, \quad D^-f(0) = -1.$$

Quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$ e ha un punto angoloso in $(0, 0)$.

ESERCIZI: Studiare la derivabilità delle seguenti funzioni:

$$\left|\frac{x}{x-1}\right|, \quad |\log x|, \quad \left|\arctan(x^2-1)\right|.$$

Definizione[PUNTO DI TANGENZA VERTICALE]
Sia $f[a, b] \mapsto \mathbb{R}$ e $x_0 \in [a, b]$. Se f è continua in x_0 e e se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty, \tag{9.4.3}$$

o se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty, \tag{9.4.4}$$

allora $(x_0, f(x_0))$ *si dice* **punto di tangenza verticale** *di* f.

Osservazione
Se $x_0 = a$ o $x_0 = b$, il limite per $x \to x_0$ è da intendersi nel senso del limite destro o sinistro rispettivamente. $\square$

Esempio. Sia $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $x \in \mathbb{R}$. Dato che

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} = +\infty.$$

Quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$ e ha un punto di tangenza verticale in $(0, 0)$.

Esempio. Sia $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$. Dato che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty,$$

f non è derivabile da destra in $x_0 = 0$ e ha un punto di tangenza verticale in $(0, 0)$.

ESERCIZI: Studiare la derivabilità delle seguenti funzioni

$$e^{\sqrt{x}}, \quad \log{(1 - x^{\frac{3}{5}})}, \quad \sqrt{x + x^2}.$$

ESERCIZIO. Dire se la funzione $f(x) = \frac{1}{\log x}$ si può estendere per continuità in $x_0 = 0$. In tal caso studiare la derivabilità di f in $[0, +\infty)$.

Definizione[PUNTO DI CUSPIDE]
Sia $f(a, b) \to \mathbb{R}$ *e* $x_0 \in (a, b)$. *Se* f *è continua in* x_0 *e e se*

$$\lim_{x\to x_0^\pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty, \tag{9.4.5}$$

o se

$$\lim_{x\to x_0^\pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \mp\infty, \tag{9.4.6}$$

allora $(x_0, f(x_0))$ *si dice* **punto di cuspide** *di* f.

Esempio. Sia $f(x) = |x|^{\frac{1}{3}}$, $x \in \mathbb{R}$. Dato che

$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{|x|^{\frac{1}{3}}}{x} = \pm\infty,$$

f non è derivabile in $x_0 = 0$ e ha un punto di cuspide in $(0, 0)$.

ESERCIZI: Studiare la derivabilità delle seguenti funzioni

$$e^{\sqrt{|x|}}, \quad \sin{(x^{\frac{2}{3}})}, \quad \sqrt{|x + x^2|}.$$

ESERCIZI: Studiare la derivabilità delle seguenti funzioni

$$\cos(x^{\frac{1}{3}}), \quad \cos|x|, \quad \sqrt{\tan x} \quad \sqrt{|\tan x|}.$$

Negli esempi di non derivabilità visti fino a questo punto si è sempre fatto uso del limite del rapporto incrementale per valutare il comportamento di f in x_0. Ci si potrebbe domandare se sia possibile invece calcolare prima la derivata e successivamente usare il limite della derivata stessa per caratterizzare il punto di non derivabilità.

Esempio. Sia $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $x \in \mathbb{R}$. Si ha $Df(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $x \neq 0$, e inoltre

$$\lim_{x\to 0} Df(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = +\infty.$$

Quindi in questo caso il limite di Df coincide con il limite del rapporto incrementale. Si sarebbe quindi potuto dedurre per questa via che $(0,0)$ è un punto di tangenza verticale per f.

Più in generale si ha il seguente:

TEOREMA [TEOREMA DI CONTINUITÀ DELLA DERIVATA PRIMA]
Sia $f[a,b] \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in [a,b]$. Se f è derivabile in $[a,b] \setminus \{x_0\}$ continua in $[a,b]$ e e se esiste finito o infinito il limite

$$\lim_{x\to x_0} Df(x), \tag{9.4.7}$$

allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} Df(x). \tag{9.4.8}$$

Dimostrazione.[Facoltativa] La dimostrazione di questo Teorema è conseguenza del Teorema di Lagrange o del Valor Medio, vedere §9.5. Il Lettore è invitato a completare i dettagli per esercizio. ■

Osservazione
Se $x_0 = a$ o $x_0 = b$, il limite per $x \to x_0$ è da intendersi nel senso del limite destro o sinistro rispettivamente. □

Osservazione[DISCONTINUITÀ ELIMINABILI]
Il nome del teorema è dovuto alla seguente osservazione. Se il limite nella (9.4.7) esiste finito,

$$\lim_{x\to x_0} Df(x) = L \in \mathbb{R},$$

si ha, usando la definizione di derivata e il Teorema,

$$Df(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} Df(x),$$

ovvero $Df(x)$ è continua in x_0. È interessante osservare che se g è una funzione arbitraria, e non la derivata di una funzione, il risultato è falso. Per esempio

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

verifica

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 1,$$

ma ovviamente non è continua perché $g(0) = 0$. Quindi il risultato dice che una funzione derivata non può avere discontinuità eliminabili.
È tuttavia necessaria per la validità del Teorema la condizione di esistenza del limite di Df. Infatti, il

seguente controesempio mostra che se il limite di Df non esiste, in generale non è vero che il limite del rapporto incrementale non esiste. Al contrario, sia

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Si verifica facilmente che f è continua in $\mathbb{R}$ e derivabile in $\mathbb{R}$. Infatti

$$Df(x) = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}, \; x \neq 0, \tag{9.4.9}$$

e usando la definizione tramite il rapporto incrementale,

$$Df(0) = \lim_{x \to 0} x \cos \frac{1}{x} = 0. \tag{9.4.10}$$

Tuttavia, il limite di $Df(x)$ per $x \to 0$ (verificare per esercizio) non esiste. In questo caso la funzione derivata prima definita nella (9.4.9) per $x \neq 0$ e dalla (9.4.10) ha una disconitnuità di seconda specie in $x = 0$. □

9.5. **Teoremi di Fermat, Rolle, Lagrange.**
Per dimostrare il Teorema di continuità della derivata prima, per stabilire il nesso tra segno della derivata e la monotonia, sono fondamentali i Teoremi di Fermat, Rolle, Lagrange.
Per l' enunciato del Teorema di Fermat è necessaria la nozione di **estremo locale** di una funzione reale.

Definizione[ESTREMO (MASSIMO/MINIMO) LOCALE]
Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$. Si dice che x_0 è un punto di estremo locale (per f) se esiste un intorno $\mathcal{U} \subseteq (a, b)$ di x_0 tale che:

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall\, x \in \mathcal{U}, \text{(MINIMO LOCALE)},$$

oppure,

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall\, x \in \mathcal{U}, \text{(MASSIMO LOCALE)}.$$

TEOREMA [FERMAT] *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$. Se f è derivabile in x_0, e se x_0 è un punto di estremo locale per f, allora*

$$Df(x_0) = 0.$$

Dimostrazione.
Scambiando f con $-f$ se necessario, possiamo supporre senza perdita di generalità che x_0 sia un minimo locale. Esiste allora un intervallo aperto $I \subseteq (a, b)$, tale che $x_0 \in I$ e

$$f(x) \geq f(x_0), \; \forall\, x \in I.$$

Se ne deduce che

$$Df^+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

e

$$Df^-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Ma f è derivabile in x_0, e allora si ha

$$Df(x_0) = Df^+(x_0) \geq 0, \qquad Df(x_0) = Df^-(x_0) \leq 0,$$

ovvero $Df(x_0) = 0$. ■

Esempio. Se $f(x) = e^{x^4}$, è facile verificare che $x_0 = 0$ è un punto di minimo stretto (minimo forte) per f e infatti $Df(0) = 0$. Viceversa $f(x) = x^3$ verifica $Df(0) = 0$, ma si verifica subito che $x_0 = 0$ non è di estremo. È bene in particolare ricordare che il Teorema di Fermat fornisce, per una funzione f derivabile in un punto x_0, una condizione **sufficiente** affinché f abbia derivata nulla in x_0, ovvero che x_0 sia di estremo locale, e **necessaria** affinché f abbia in x_0 un estremo locale, ovvero che la derivata in x_0 sia nulla. In generale si può solo dire che se f è derivabile in x_0, allora $Df(x_0) = 0$ è condizione necessaria e sufficiente affinché f abbia tangente orizzontale in x_0.

TEOREMA [ROLLE]
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Se f è continua in $[a, b]$, derivabile in (a, b) e se

$$f(a) = f(b),$$

allora esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$Df(c) = 0. \tag{9.5.1}$$

Dimostrazione.
Senza perdita di generalità possiamo supporre che $f(a) = f(b) = 0$.
Se $f(x) = 0$, $\forall\, x \in (a, b)$, possiamo definire c scegliendo un punto arbitrario $c \in (a, b)$, per il quale certamente vale la (9.5.1).
Supponiamo quindi che esista $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) \neq 0$. Scambiando f con $-f$ se necessario, possiamo supporre senza perdita di generalità che $f(x_0) > 0$. Dal Teorema di Weierstrass f assume il suo massimo in un punto $c_{_M} \in [a, b]$. Per definizione di massimo, si ha

$$f(c_{_M}) = \max_{[a,b]} f \geq f(x_0) > 0,$$

e quindi $c_{_M} \in (a, b)$, ovvero $c_{_M} \notin \{a, b\}$. Quindi $c_{_M}$ è un punto di estremo relativo per f, $c_{_M} \in (a, b)$ e dato che f è derivabile in (a, b), dal Teorema di Fermat, segue che $Df(c_{_M}) = 0$. ■

TEOREMA [LAGRANGE o DEL VALOR MEDIO]
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Se f è continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b), allora esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$Df(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{9.5.2}$$

Dimostrazione.
Sia

$$h(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right).$$

Si verifica facilmente che $h(a) = 0 = h(b)$. Inoltre h è continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Dal Teorema di Rolle, esiste $c \in (a, b)$ tale che $Dh(c) = 0$, ovvero

$$Df(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

che è equivalente alla (9.5.2). ■