LEZIONE 17

Contents

[**B**] Dispense a cura del docente.

8.3. **Limiti notevoli.**
Andiamo ad illustrare nel seguito una serie di limiti importanti, detti anche **limiti notevoli**.

LIMITE NOTEVOLE 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1. \tag{8.3.1}$$

Dimostrazione.
Si usano le disuguaglianze elementari

$$\sin(x)<x,\ x>0$$

e

$$x<\tan(x),\ x\in(0,\frac{\pi}{2}).$$

Dalla prima si ottiene subito

$$\frac{\sin(x)}{x}<1,\ x\to 0^+$$

e dalla seconda si ha

$$\frac{\sin(x)}{x}>\frac{1}{\cos(x)},x\to 0^+.$$

Dunque la (8.3.1) per $x\to 0^+$ segue dal Teorema di confronto. La dimostrazione è completata osservando che $\frac{\sin(x)}{x}$ è pari e usando la caratterizzazione del limite tramite i limiti sinistro e destro. ■

Osservare che la funzione

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin(x)}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0,\end{cases}$$

risulta essere continua in $\mathbb{R}$.

Esercizio.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\pi x^3+x^5}{x^5+x^6}\sin(x^2)=\pi.$$

Infatti si ha,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\pi x^3+x^5}{x^5+x^6}\sin(x^2)=\lim_{x\to 0}\frac{\pi x^3+x^5}{x^5+x^6}\cdot x^2\cdot\frac{\sin(x^2)}{x^2}.$$

Dato che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x^2}=\lim_{y\to 0^+}\frac{\sin(y)}{y}=1,$$

dal Teorema sul prodotto dei limiti, segue che è sufficiente calcolare

$$\lim_{x\to 0}\frac{\pi x^3+x^5}{x^5+x^6}\cdot x^2=\lim_{x\to 0}x^2\cdot\frac{x^3}{x^5}\frac{\pi+x^2}{1+x}=\lim_{x\to 0}\frac{\pi+x^2}{1+x}=\pi.$$

Usando la (8.3.1), otteniamo il:

LIMITE NOTEVOLE 2.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}. \tag{8.3.2}$$

Si ha infatti

$$\frac{1-\cos(x)}{x^2} = 2\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \frac{2}{4}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2 \to \frac{1}{2},\ x \to 0.$$

ESERCIZI: Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\pi x + x^{\frac{3}{2}}}{ex^4 + x^9} \sin\left(\frac{3x^5+2x^8}{x^2+6x^{\frac{5}{2}}}\right),\ \lim_{x\to -\infty} e^{-4x} \sin\left(e^{-4x}\right).$$

$$\lim_{x\to +\infty} x^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right),\ \lim_{x\to -\infty} (\log|x|)^4\left(1-\cos\left(\frac{1}{(\log|x|)^4}\right)\right)$$

ESERCIZI: Calcolare i seguenti limiti al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \sin(x), \qquad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha(1-\cos(x)).$$

LIMITE NOTEVOLE 3.

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{8.3.3}$$

Questo limite è stato dedotto nella (8.1.13) di **[B]** §8.1.

Esercizio.

$$\lim_{x\to -\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Infatti si ha

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{-x} = \left(1+\frac{x}{x+1}-1\right)^{-x} = \left(1-\frac{1}{x+1}\right)^{-x} =$$

$$= \left(1-\frac{1}{x+1}\right)^{-(x+1)+1} = \left(1+\frac{1}{-(x+1)}\right)^{-(x+1)} \left(1+\frac{1}{-(x+1)}\right).$$

Osserviamo che

$$\lim_{x\to -\infty} \left(1+\frac{1}{-(x+1)}\right)^{-(x+1)} = \lim_{y\to +\infty} \left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e.$$

Quindi, dato che

$$\left(1+\frac{1}{-(x+1)}\right) \to 1,\ x \longrightarrow -\infty,$$

si ha

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1+\frac{1}{-(x+1)}\right)^{-(x+1)} \left(1+\frac{1}{-(x+1)}\right) \longrightarrow e\cdot 1 = e,\ x \longrightarrow -\infty.$$

Esercizio.

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Per risolvere questo limite è utile ricorrere alla caratterizzazione tramite il limite destro e sinistro. Si ha

$$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e$$

e

$$\lim_{x\to 0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e.$$

Dato che i limiti per $x \to 0^{\pm}$ coincidono con e, anche il limite per $x \to 0$ vale e.

LIMITE NOTEVOLE 4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1. \tag{8.3.4}$$

Infatti si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log(e) = 1.$$

LIMITE NOTEVOLE 5.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1. \tag{8.3.5}$$

Usiamo il cambio di variabili $e^x - 1 = y$. È chiaro che $y \to 0$, se $x \to 0$ e che $x = \log(1+y)$. Quindi, si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\log(1+y)} = 1.$$

ESERCIZI: Calcolare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x.$$

LIMITE NOTEVOLE 6.
Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha. \tag{8.3.6}$$

Osserviamo innanzitutto che se $\alpha = 0$, la funzione a numeratore è identicamente nulla per ogni $x \neq 0$, e quindi il limite (8.3.6) in questo caso è certamente 0. Sia quindi $\alpha \neq 0$. Osserviamo che

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{\log(1+x)}\frac{\log(1+x)}{x}.$$

Dato che

$$\frac{\log(1+x)}{x} \longrightarrow 1,\ x \longrightarrow 0,$$

è sufficiente calcolare

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{\log(1+x)}.$$

Usiamo il cambio di variabili $t = \log(1+x)$. È chiaro che $t \to 0$, se $x \to 0$ e che $(1+x)^\alpha = e^{\alpha\cdot t}$. Quindi, si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{\log(1+x)} = \lim_{t\to 0}\frac{e^{\alpha\cdot t}-1}{t} = \lim_{y\to 0}\alpha\frac{e^{\alpha\cdot t}-1}{\alpha\cdot t} = \alpha.$$

ESERCIZIO: Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(4-e^x)^\pi-4^\pi}{e^{2x}}$$

ESERCIZI: Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(2^x-1)^2}{\sin(x)\log(1+x)},\ \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x-1)^4}{(\sin(x))^3\log(1+x)},\ \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x},\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\tan(x)}.$$

ESERCIZIO: Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sin(x)}-1}{x^\alpha}.$$