LEZIONI 14-15-16

Contents

[B] Dispense a cura del docente.

7.7. **Sottosuccessioni.**

Definizione[SOTTOSUCCESSIONI]
Sia a_n una successione e $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ monotona strettamente crescente. Si definisce **sottosuccessione** *o* **sottosuccessione estratta da** *a_n, la successione definita da*

$$b_k = a_{f(k)},\ k \in \mathbb{N}.$$

Esempio. Se $a_n = \frac{(-1)^n}{n+3}$, e $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ è definita da $f(k) = 2k$, allora

$$b_k = a_{f(k)} = a_{2k} = \frac{(-1)^{2k}}{(2k)+3} = \frac{1}{2k+3},\ k \in \mathbb{N}.$$

Se invece $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ è definita da $f(k) = 2k - 1$, allora

$$c_k = a_{f(k)} = a_{2k-1} = \frac{(-1)^{2k-1}}{(2k-1)+3} = \frac{-1}{2k+2},\ k \in \mathbb{N}.$$

■

Osservazione
Si indica di solito la generica sottosuccessione estratta da a_n con a_{n_k} invece che con $a_{f(k)}$. □

TEOREMA [REGOLARITÀ E SOTTOSUCCESSIONI]
Sia a_n una successione e $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora

$$a_n \longrightarrow a \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall\ a_{n_k} \text{ estratta da } a_n \text{ si ha } \quad a_{n_k} \longrightarrow a.$$

Dimostrazione.[Facoltativa]
Se $a_n \longrightarrow a$ è chiaro che ogni estratta da a_n converge ad a (Dimostrare per esercizio).
Per l' implicazione $\Leftarrow$ discutiamo per semplicità solo il caso $a \in \mathbb{R}$. Supponiamo per assurdo che ogni estratta da a_n converga ad a ma che a_n non converga ad a. Dire che a_n non converge ad a equivale a negare la definizione di limite per a_n ovvero,

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon,\ \forall\, n > \nu_\varepsilon. \tag{7.7.1}$$

La negazione della (7.7.1) è la seguente:

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0 \,:\, \forall\, \nu \in \mathbb{N},\, \exists\, \nu_0 > \nu \,:\, |a_{\nu_0} - a| \geq \varepsilon_0. \tag{7.7.2}$$

Nella (7.7.2) scegliamo $\nu = 1$ e otteniamo $\nu_0 > 1$ tale che $|a_{\nu_0} - a| \geq \varepsilon_0$. Definiamo $n_1 = \nu_0$, dove ν_0 è l'intero appena ottenuto per la scelta di $\nu = 1$. Si ha quindi

$$|a_{n_1} - a| \geq \varepsilon_0.$$

Nella (7.7.2) scegliamo ora $\nu = n_1 + 1$ e otteniamo $\nu_0 > n_1 + 1$ tale che $|a_{\nu_0} - a| \geq \varepsilon_0$. Definiamo $n_2 = \nu_0$, dove ν_0 è l'intero appena ottenuto per la scelta di $\nu = n_1 + 1$. Si ha quindi

$$|a_{n_1} - a| \geq \varepsilon_0, \quad |a_{n_2} - a| \geq \varepsilon_0, \quad \text{e} \quad n_2 > n_1.$$

Per induzione otteniamo una sottosuccessione a_{n_k} estratta da a_n tale che

$$|a_{n_k} - a| \geq \varepsilon_0,\, \forall\, k \in \mathbb{N},$$

fatto questo chiaramente assurdo perché per ipotesi $a_{n_k} \to a$. ■

COROLLARIO [CRITERIO DI IRREGOLARITÀ PER SUCCESSIONI NUMERICHE]
Sia a_n una successione. Se esistono due sottosuccessioni regolari estratte da a_n, che indichiamo con $a^{(1)}_{n_k}$, $a^{(2)}_{n_k}$, che ammettono limiti, finiti o infiniti, distinti, ovvero

$$\exists\, L_1 \in \overline{\mathbb{R}},\, \exists\, L_2 \in \overline{\mathbb{R}} :\; L_1 \neq L_2 \;e\; \begin{cases} a^{(1)}_{n_k} \to L_1,\; k \to +\infty \\ a^{(2)}_{n_k} \to L_2,\; k \to +\infty \end{cases}$$

allora a_n è irregolare.
Dimostrazione.[Facoltativa]
Immediata conseguenza del Teorema precedente e dell' unicità del limite. ■

Esempio. Sia $a_n = (-1)^n$. Dato che $a^{(1)}_{n_k} = a_{2k} = 1$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $a^{(2)}_{n_k} = a_{2k-1} = -1$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$, si ha immediatamente $a^{(1)}_{n_k} \to 1$, $a^{(2)}_{n_k} \to -1$. Quindi a_n è irregolare.

Esempio. Sia $a_n = (-1)^n n$. Dato che $a^{(1)}_{n_k} = a_{2k} = 2k$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $a^{(2)}_{n_k} = a_{2k-1} = -(2k-1)$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$, si ha immediatamente $a^{(1)}_{n_k} \to +\infty$, $a^{(2)}_{n_k} \to -\infty$. Quindi a_n è irregolare.

Esempio. Sia $a_n = \sin(n\frac{\pi}{3})$. Dato che $a^{(1)}_{n_k} = a_{3k} = \sin(3k\frac{\pi}{3}) = \sin(k\pi) = 0$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $a^{(2)}_{n_k} = a_{6k+1} = \sin((6k+1)\frac{\pi}{3}) = \sin(2k\pi + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, si ha immediatamente $a^{(1)}_{n_k} \to 0$, $a^{(2)}_{n_k} \to \frac{\sqrt{3}}{2}$. Quindi a_n è irregolare.

Esempio. Sia $a_n = \cos(n\frac{\pi}{2})$. Dato che $a^{(1)}_{n_k} = a_{4k} = \cos(4k\frac{\pi}{2}) = \cos(2k\pi) = 1$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $a^{(2)}_{n_k} = a_{2k+1} = \cos((2k+1)\frac{\pi}{2}) = \cos(k\pi + \frac{\pi}{2}) = 0$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, si ha immediatamente $a^{(1)}_{n_k} \to 1$, $a^{(2)}_{n_k} \to 0$. Quindi a_n è irregolare.

7.8. **Insiemi finiti, infiniti, numerabili.**

Definizione[FUNZIONI INIETTIVE/SURIETTIVE]
Siano X e Y due insiemi e $f : X \mapsto Y$. Si dice che f è **iniettiva**, *se*

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Si dice che f è **suriettiva** *se*

$$Im(f) = Y.$$

Se f è iniettiva e suriettiva, si dice che f è una **corrispondenza biunivoca** *tra X e Y.*

Esempi. Ogni funzione strettamente monotona è iniettiva.
Se $f : \mathbb{R} \mapsto [0, +\infty)$ e' definita da $f(x) = x^2$, allora f è suriettiva ma non è iniettiva, perchè $f(x) = f(-x)$ $\forall\, x \in \mathbb{R}^+$. Chiaramente $f(x) = x^2$, $f : [0, +\infty) \mapsto [0, +\infty)$ è una corrispondenza biunivoca.
Se $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ è definita da $f(x) = \arctan(x)$, allora f è iniettiva ma non è suriettiva, perchè $Im(f) = (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$. Chiaramente $f(x) = \arctan(x)$, $f : \mathbb{R} \mapsto (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ è una corrispondenza biunivoca.
Se $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ è definita da $f(x) = x^3$, allora f è iniettiva e suriettiva e quindi è una corrispondenza biunivoca.

Definizione
Siano X e Y due insiemi. X e Y si dicono essere **in corrispondenza biunivoca** *se esiste una corrispondenza biunivoca $f : X \mapsto Y$.*

Osservazione[INSIEMI EQUIVALENTI]
Due insiemi che sono in corrispondenza biunivoca si dicono anche **equivalenti**. Si può verificare che la proprietà "essere equivalente a" è **simmetrica**, ovvero se X è equivalente a Y allora Y è equivalente a X e **transitiva**, ovvero se X è equivalente a Y e Y è equivalente a Z, allora X è equivalente a Z.

Esempio. I giorni della settimana $\{L, Ma, Me, G, V, S, D\}$ sono in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
$\mathbb{R}$ è equivalente a $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ tramite $f : \mathbb{R} \mapsto (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ definita da $f(x) = \arctan(x)$.

Esempio. Dimostriamo che $\mathbb{N}$ è equivalente a $2\mathbb{N}$ tramite $f : \mathbb{N} \mapsto 2\mathbb{N}$ definita da $f(k) = 2k$. Infatti, è chiaro che se $k_1 \neq k_2$, allora $f(k_1) \neq f(k_2)$, quindi f è iniettiva. Per dimostrare che f è suriettiva, bisogna far vedere che $Im(f) = 2\mathbb{N}$, ovvero che ogni $n \in 2\mathbb{N}$ è nell' immagine di f, ovvero che

$$\forall\, n \in 2\mathbb{N}\ \exists\, k \in \mathbb{N} : f(k) = n.$$

Sia quindi $n \in 2\mathbb{N}$ fissato arbitrariamente. Dato che n è divisibile per 2, ponendo $k = \frac{n}{2}$, si ha $f(k) = n$, ovvero $n \in Im(f)$. ■

Definizione[INSIEMI FINITI]
Sia X un insieme. Si dice che X è **finito** *se è in corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme limitato di $\mathbb{N}$.*

Esempio. L' insieme dei giorni della settimana $\{L, Ma, Me, G, V, S, D\}$ è finito perché è equivalente a $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Definizione[INSIEMI INFINITI]
Sia X un insieme. Si dice che X è **infinito** *se non è finito.*

Esempio. [FACOLTATIVO] Dimostriamo che $\mathbb{N}$ è infinito.
PRIMA DIMOSTRAZIONE: Usando la proprietà transitiva, il problema si riconduce facilmente a quello di far vedere che comunque scelto $N \in \mathbb{N}$, e comunque data $f : \{1, 2, \cdots, N\} \mapsto \mathbb{N}$ allora f non può essere una corrispondenza biunivoca. A questo punto, è sufficiente dimostrare che se f è iniettiva, non è suriettiva. Infatti, dato che $\{1, 2, \cdots, N\}$ è finito, $Im(f)$ è finito a sua volta, e quindi è ben definito $n_0 = \max\{Im(f)\}$. Dato che $\mathbb{N}$ è induttivo, $n_0 + 1 \in \mathbb{N}$. Ma allora $n_0 + 1 \notin Im(f)$, e quindi f non è suriettiva.
SECONDA DIMOSTRAZIONE: Usando la proprietà transitiva, il problema si riconduce facilmente a quello di far vedere che comunque scelto $N \in \mathbb{N}$, e comunque data $g : \mathbb{N} \mapsto \{1, 2, \cdots, N\}$ allora g non può essere una corrispondenza biunivoca. A questo punto, è sufficiente osservare che se g è suriettiva, non è iniettiva. Infatti, se g è suriettiva, si ha $Im(g) = \{1, 2, \cdots, N\}$. Siano $\{k_1, \cdots, k_N\} \subset \mathbb{N}$ tali che

$g(k_n) = n$, $n \in \{1, 2, \cdots, N\}$. Riordinando i termini k_n, se necessario, possiamo supporre senza perdita di generalità che $k_N = \max\{k_1, \cdots, k_N\}$. Dato che $\mathbb{N}$ è induttivo $k_N + 1 \in \mathbb{N}$. Dato che g è definita su $\mathbb{N}$, in particolare è definita su $k_N + 1$, e dato che g ha codominio $\{1, 2, \cdots, N\}$, allora $g(k_N + 1) \in \{1, 2, \cdots, N\}$. Sia allora $n_0 \in \{1, 2, \cdots, N\} : \; g(k_N + 1) = n_0$. Ma allora si ha anche $g(k_N + 1) = n_0 = g(k_{n_0})$, con $k_N + 1 \neq k_{n_0}$, e quindi g non è iniettiva. ■

Osservazione A ben vedere, una piccola modifica della prima dimostrazione del fatto che $\mathbb{N}$ è infinito mostra che comunque scelto $N \in \mathbb{N}$, se $f : \{1, 2, \cdots, N\} \mapsto \mathbb{N}$ è una funzione, allora non può essere suriettiva mentre una piccola modifica della seconda dimostrazione del fatto che $\mathbb{N}$ è infinito mostra che se $g : \mathbb{N} \mapsto \{1, 2, \cdots, N\}$ è una funzione, allora non può essere iniettiva.

Questa definizione di insieme finito corrisponde alla seguente naturale idea intuitiva di insieme finito:

"X è finito se si possono "contare" i suoi elementi".

In questo modo, per dimostrare che un insieme X è infinito, dobbiamo far vedere che, se $A \subset \mathbb{N}$ è limitato, non esiste una corrispondenza biunivoca $f : X \mapsto A$ o, equivalentemente, non esiste una corrispondenza biunivoca $g : A \mapsto X$.

Esiste un altro modo di definire gli insiemi finiti/infiniti che "scambia" i problemi.

Definizione[DEFINIZIONE EQUIVALENTE DI INSIEME INFINITO]
Sia X un insieme. Si dice che X è **infinito** *se è in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio, $X_1 \subset X$.*

Esempi. $\mathbb{N}$ è infinito perché è in corrispondenza biunivoca con $2\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$ tramite $f : \mathbb{N} \mapsto 2\mathbb{N}$, $f(k) = 2k$. $\mathbb{R}$ è infinito perché è in corrispondenza biunivoca con $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ tramite $f : \mathbb{R} \mapsto (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$, $f(x) = \arctan(x)$.

Definizione[DEFINIZIONE EQUIVALENTE DI INSIEME FINITO]
Sia X un insieme. Si dice che X è **finito** *se non è infinito.*

Esempio. [FACOLTATIVO] Dimostriamo che $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ è finito.
PRIMA DIMOSTRAZIONE: Usando la proprietà transitiva, il problema si riconduce facilmente a quello di far vedere che comunque scelto $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, e comunque data $f : \{1, 2, \cdots, n\} \mapsto \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ allora f non può essere una corrispondenza biunivoca. A questo punto, è sufficiente dimostrare che se f è iniettiva, non è suriettiva. Infatti, possiamo supporre senza perdita di generalità che $f(k) = k$, $k = 1, 2, \cdots, n$. Dato che $1 \leq n \leq 6$, $n + 1 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, ma $n + 1 \notin Im(f)$. Quindi f non è suriettiva.
SECONDA DIMOSTRAZIONE: Usando la proprietà transitiva, il problema si riconduce facilmente a quello di far vedere che comunque scelto $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, e comunque data $g : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \mapsto \{1, 2, \cdots, n\}$ allora g non può essere una corrispondenza biunivoca. È quindi sufficiente dimostrare che se g è suriettiva non è iniettiva. Infatti, possiamo supporre senza perdita di generalità che $g(k) = k$, $k = 1, 2, \cdots, n$. Dato che $1 \leq n \leq 6$, allora $n+1 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Inoltre, dato che g è definita in {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, g è definita anche in $n+1$, e dato che g ha codominio $\{1, 2, \cdots, n\}$, allora $g(n+1) \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Sia allora $n_0 \in \{1, 2, \cdots, n\} : \; g(n+1) = n_0$. Ma allora si ha anche $g(n+1) = n_0 = g(n_0)$, con $n+1 \neq n_0$, e quindi g non è iniettiva. ■

Osservazione A ben vedere, una piccola modifica della prima dimostrazione del fatto che $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ è finito mostra che se $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $f : \{1, 2, \cdots, n\} \mapsto \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ è una funzione, allora non può essere suriettiva, mentre una piccola modifica della seconda dimostrazione del fatto che

$\{1,2,3,4,5,6,7\}$ è finito mostra che se $n \in \{1,2,3,4,5,6\}$ e $g : \{1,2,3,4,5,6,7\} \mapsto \{1,2,\cdots,n\}$ è una funzione, allora non può essere iniettiva.

Definizione[INSIEMI NUMERABILI]
Sia X un insieme. X si dice **numerabile** *o* **infinito numerabile** *se è equivalente a* $\mathbb{N}$.

Esempi. Sono numerabili gli insiemi $\mathbb{N}, 2\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$.
Una numerazione di $\mathbb{Z}$ si può per esempio determinare procedendo come segue:
Si vuole definire una corrispondenza biunivoca $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z}$ in modo che
$f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f(2) = -1,\ f(3) = 2,\ f(4) = -2,\ f(5) = 3,\ f(6) = -3, \cdots$.
A ben vedere stiamo quindi richiedendo che f applichi i numeri naturali dispari su $\mathbb{Z}^+$ e i pari su $\mathbb{Z}^-$, ovvero:

$$f(n) = \begin{cases} k, & \text{se } n = 2k-1, \\ -k & \text{se } n = 2k. \end{cases}$$

È facile verificare che f è iniettiva e suriettiva.

Esempi. Si può dimostrare, utilizzando la teoria delle rappresentazioni decimali che l' insieme dei numeri irrazionali $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è infinito ma non è numerabile. Più precisamente, si può dimostrare che se $g : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, allora g non è suriettiva. In altri termini, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ha "più " elementi di $\mathbb{N}$.

Osservazione[DENSITÀ DEI RAZIONALI]
Anche se $\mathbb{Q}$ ha "meno" elementi di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, e quindi ovviamente anche di $\mathbb{R}$, segue dalla teoria delle rappresentazioni decimali che i numeri razionali sono **densi** in $\mathbb{R}$, ovvero che

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R} : x < y,\ \exists\, q \in \mathbb{Q} :\ x < q < y. \tag{7.8.1}$$

Si può verificare che la (7.8.1) implica in particolare che

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R} : x < y,\ \text{esistono infiniti razionali } q \in \mathbb{Q} :\ x < q < y.$$

La stessa proprietà vale per i numeri irrazionali. □

7.9. **Il Teorema di Bolzano-Weierstrass.**

TEOREMA [BOLZANO-WEIERSTRASS]
Sia c_n una successione limitata. Allora esiste una sottosuccessione estratta, c_{n_k}, convergente in $\mathbb{R}$.
Dimostrazione.
PRIMO PASSO:
Se c_n assume un numero finito di valori, è chiaro che almeno uno di questi valori, che indichiamo con L, deve essere assunto "infinite" volte, ovvero $\exists\, n_k$, una sottosuccessione estratta dalla successione degli indici n, tale che

$$c_{n_k} = L,\ \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

In questo caso $c_{n_k} \to L$ e quindi il problema è risolto.
SECONDO PASSO:[METODO DI BISEZIONE]
Abbiamo quindi una successione c_n limitata che assume infiniti valori distinti. Dato che c_n è limitata, esiste $M > 0$ tale che

$$-M \le c_n \le M,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Poniamo $a_0 = -M$, $b_0 = M$ e scegliamo un elemento della successione c_n arbitrario, che indichiamo con c_{n_0}. È chiaro che

$$0 < b_0 - a_0 = 2M, \ \text{ e } \ a_0 \le c_{n_0} \le b_0.$$

Consideriamo i due intervalli $[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$, $[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0]$. Almeno uno dei due intervalli deve contenere infiniti valori di c_n. Se tale intervallo risulta essere $[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$, poniamo $a_1 = a_0$, $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$. Se tale intervallo risulta essere $[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0]$, poniamo $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$, $b_1 = b_0$. In entrambe i casi, possiamo scegliere un elemento della successione contenuto nell' intervallo prescelto, che indichiamo con c_{n_1}, in modo che $n_1 > n_0$. È chiaro che

$$a_0 \leq a_1 < b_1 \leq b_0,$$
$$0 < b_1 - a_1 = M, \text{ e } a_1 \leq c_{n_1} \leq b_1.$$

Consideriamo i due intervalli $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$, $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$. Almeno uno dei due intervalli deve contenere infiniti valori di c_n. Se tale intervallo risulta essere $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$, poniamo $a_2 = a_1$, $b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Se tale intervallo risulta essere $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$, poniamo $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$, $b_2 = b_1$. In entrambe i casi, possiamo scegliere un elemento della successione contenuto nell' intervallo prescelto, che indichiamo con c_{n_2}, in modo che $n_2 > n_1 > n_0$. È chiaro che

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 < b_2 \leq b_1 \leq b_0,$$
$$0 < b_2 - a_2 = \frac{M}{2}, \text{ e } a_2 \leq c_{n_2} \leq b_2.$$

Iterando l' argomento di bisezione per induzione, possiamo costruire tre successioni a_k, b_k, c_{n_k}, $k \in \mathbb{N}$, tali che

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k < b_k \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0, \ \forall\, k \in \mathbb{N},$$
$$0 < b_k - a_k = \frac{M}{2^{k-1}}, \text{ e } a_k \leq c_{n_k} \leq b_k, \ \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Dato che a_k è monotona non decrescente e limitata (perché $a_k \leq b_0$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$), è convergente (vedere **[B]** §7.6) ad un numero reale, che indichiamo con a, $a_k \longrightarrow a$.
Dato che b_k è monotona non crescente e limitata (perché $b_k \geq a_0$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$), è convergente ad un numero reale, che indichiamo con b, $b_k \longrightarrow b$.
Dato che $\frac{M}{2^{k-1}} \longrightarrow 0$, $k \to +\infty$, e dato che

$$0 < b_k - a_k = \frac{M}{2^{k-1}}, \ \forall\, k \in \mathbb{N},$$

dal Teorema di confronto 7.4.2 in **[B]** §7.4, si ha

$$0 \leq b - a \leq 0.$$

Quindi $b = a$. Sia $L = b = a$ il valore comune definito da $b = a$ grazie al metodo di bisezione. Dato che $a_k \longrightarrow L$, $b_k \longrightarrow L$, e dato che

$$a_k \leq c_{n_k} \leq b_k, \ \forall\, k \in \mathbb{N},$$

dal Teorema di confronto 7.4.2 in **[B]** §7.4, si ha $c_{n_k} \longrightarrow L$. ■

Osservazione
Nella dimostrazione si è detto che le successioni a_k, b_k, c_{n_k}, $k \in \mathbb{N}$, vengono costruite iterando per induzione l' argomento di bisezione. Per essere più precisi, la definizione per induzione di a_k, b_k, c_{n_k} è la seguente:

$$a_0 = -M, \ b_0 = M, \ c_{n_0} \in \{c_n\}.$$

Dati a_k, b_k, c_{n_k} definiamo

$$\begin{cases} a_{k+1} = a_k, \ b_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}, \text{ se } [a_k, \frac{a_k+b_k}{2}] \text{ contiene infiniti elementi distinti di } c_n; \\ \\ a_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}, \ b_{k+1} = b_k, \text{ altrimenti,} \end{cases}$$

e

$$c_{n_{k+1}} \in \{c_n\} \cap [a_{k+1}, b_{k+1}] \ : \ n_{k+1} > n_k.$$

Osserviamo che la definizione è ben posta perché :
- ad ogni passo almeno uno dei due intervalli dati contiene infiniti elementi distinti di $\{c_n\}$,
- avendo a disposizione infiniti indici $n \in \mathbb{N}$, possiamo, dato n_k, ad ogni passo scegliere $n_{k+1} > n_k$. □

Facoltativo[NUMERI REALI E DENSITÀ DEI RAZIONALI]
Grazie alla proprietà di densità dei razionali, si può dimostrare che per ogni numero irrazionale dato α, esistono successioni (infatti infinite successioni) di razionali che convergono ad α. In generale, dato

un numero irrazionale α, per far vedere che esiste una successione di razionali convergente ad α, si può procedere come segue.
Dato che α è irrazionale si avrà $n < \alpha < n+1$ per qualche $n \in \mathbb{Z}$. Supponiamo per semplicità che $n = 0$. Si ha allora $0 < \alpha < 1$. Sia ora $q_1 = \frac{1}{2}$. Dato che $q_1 \in \mathbb{Q}$ è chiaro che $|q_1 - \alpha| < \frac{1}{2}$ e $\alpha \neq q_1$. Se $\alpha < q_1$ poniamo $q_2 = \frac{q_1 - 0}{2} = \frac{1}{4}$. Se $q_1 < \alpha$ poniamo $q_2 = \frac{1-q_1}{2} = \frac{3}{4}$. In ogni caso, dato che $q_2 \in \mathbb{Q}$, è chiaro che $|q_2 - \alpha| < \frac{1}{4}$ e $\alpha \neq q_2$. Il Lettore avrà riconosciuto i primi passi del procedimento di bisezione che consente in questo caso di definire una successione $\{q_n\}$ tale che $|q_n - \alpha| < \frac{1}{2^n}$. In particolare $q_n \to \alpha$, $n \to +\infty$ e l' errore che si commette nell' approssimare α con q_n è minore di 2^{-n}.

Facoltativo[NUMERI RAZIONALI E RADICI]
Definiti i numeri reali $\mathbb{R}$ come tutti gli allineamenti decimali (limitati, illimitati periodici, illimitati aperiodici) resta il problema di definire alcune operazioni non definite in $\mathbb{Q}$.
Definizione[RADICE n-ESIMA]
Se $x \in \mathbb{R}^+$ e $n \in \mathbb{N}$ si definisce la radice n-esima di x (e si indica con $\sqrt[n]{x}$) come

$$\sqrt[n]{x} = \sup\{y \in \mathbb{R} \,:\, y^n < x\}.$$

È facile verificare che, fissato $x \in \mathbb{R}^+$, l' insieme $\mathrm{s}_n(x) = \{y \in \mathbb{R} \,:\, y^n < x\}$ è superiormente limitato. Quindi ammette estremo superiore. Dato che l' estremo superiore è unico, $\sqrt[n]{x}$ è ben definito per ogni $x \in \mathbb{R}^+$. Si può dimostrare in particolare che

$$\inf\{y \in \mathbb{R} \,:\, y > 0 \ \text{ e } \ y^n > x\} = \sqrt[n]{x}.$$

Notare che l' insieme $\mathrm{S}_n(x) = \{y \in \mathbb{R} \,:\, y > 0 \ \text{ e } \ y^n > x\}$ è inferiormente limitato. Quindi ammette estremo inferiore. Quello che si dimostra è che l' estremo inferiore di $S_n(x)$ coincide con l' estremo superiore di $s_n(x)$, $\inf S_n(x) = \sup s_n(x)$. In particolare si dimostra che $(\sqrt[n]{x})^n = x$, ovvero che $\sqrt[n]{x}$ è l' unico numero reale y che verifica $y^n = x$.
È importante tuttavia non confondere il problema della definizione di $\sqrt[n]{x}$ con quello del calcolo di $\sqrt[n]{x}$ a partire dalla definizione. Ciò che stabilisce la definizione è che dato uno sviluppo decimale (limitato, illimitato periodico, illimitato aperiodico), che si suppone noto, è definito in modo univoco un altro sviluppo decimale, ovvero $\inf S_n(x) = \sup s_n(x)$ che indichiamo con $\sqrt[n]{x}$ e che verifica $(\sqrt[n]{x})^n = x$. In particolare, gli insiemi $s_n(x)$ e $S_n(x)$ sono ben definiti, perché dato $y \in \mathbb{R}^+$ il valore y^n è sempre ben definito come prodotto di y per sé stesso n-volte.
Detto questo, utilizzando il metodo di bisezione si può calcolare $\sqrt[n]{x}$ con il grado di approssimazione voluto. Per esempio calcoliamo le prime cifre decimali dello sviluppo di $\sqrt{3}$ con il metodo di bisezione. Dato che $1^2 = 1 < 3 < 4 = 2^2$ si ha $1 < \sqrt{3} < 2$. Infatti, dato che $1^2 < 3$, allora $1 \in s_2(3)$ e quindi $1 \leq \sqrt{3}$. Ma $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ (la dimostrazione è simile a quella usata per dimostrare che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$) e quindi $1 < \sqrt{3}$. Allo stesso modo, dato che $2^2 = 4 > 3$, allora $2 \in S_2(3)$ e in particolare $\sqrt{3} < 2$. Sia ora $q_1 = \frac{1+2}{2}$. È chiaro che $1 < q_1 = \frac{3}{2} < 2$, $q_1 \in \mathbb{Q}$. Ma $(q_1)^2 = \frac{9}{4} < 3$. Dunque $q_1 \in s_2(3)$ e $q_1 < \sqrt{3}$. Sia $q_2 = \frac{q_1+2}{2} = \frac{7}{4}$. È chiaro che $q_1 < q_2 = \frac{7}{4} < 2$, $q_2 \in \mathbb{Q}$. Ma $(q_2)^2 = \frac{49}{16} > 3$. Dunque $q_2 \in S_2(3)$ e $q_2 > \sqrt{3}$. Sia $q_3 = \frac{\frac{3}{2}+q_2}{2} = \frac{13}{8}$. È chiaro che $\frac{3}{2} < q_3 = \frac{13}{8} < q_2$, $q_3 \in \mathbb{Q}$. Ma $(q_3)^2 = \frac{169}{64} < 3$. Dunque $q_3 \in s_2(3)$ e $q_3 < \sqrt{3}$. Dopo i primi tre passi abbiamo concluso che

$$1 < q_1 < q_3 = \frac{13}{8} < \sqrt{3} < \frac{7}{4} = q_2 < 2,$$

ovvero in particolare che

$$1,625 < \sqrt{3} < 1,75 \qquad \text{e} \qquad 0 < \sqrt{3} - 1,625 = \sqrt{3} - q_3 < \frac{1}{2^3} = 0,125,$$

da confrontare con $\sqrt{3} = 1,732.....$ Notare che questo argomento porta alla costruzione di due successioni $\{q_n\} \subset \mathbb{Q}$ e $\{p_n\} \subset \mathbb{Q}$ che convergono a $\sqrt{3}$.
Si verifica in particolare che

$$\sqrt[n]{x} = \sup\{q \in \mathbb{Q} \,:\, q^n < x\} = \inf\{q \in \mathbb{Q} \,:\, q > 0 \ \text{ e } \ q^n > x\}.$$

Notare che questo risultato non è in contraddizione con il fatto che $\mathbb{Q}$ non è completo. Infatti, dire che $\mathbb{Q}$ non è completo equivale a dire che se si RIFORMULANO le definizioni di maggiorante (minorante) e massimo (minimo) date al §2.2 SOSTITUENDO $\mathbb{R}$ con $\mathbb{Q}$, e se si introduce il NUOVO CONCETTO di ESTREMO SUPERIORE IN $\mathbb{Q}$, che indichiamo con $\sup^{\mathbb{Q}}$, come il minimo (NEL SENSO APPENA INTRODOTTO IN $\mathbb{Q}$) dei maggioranti (NEL SENSO APPENA INTRODOTTO IN $\mathbb{Q}$) allora se A è un sottoinsieme superiormente limitato di $\mathbb{Q}$ in generale $\sup^{\mathbb{Q}} A$ non esiste. Per esempio il $\sup^{\mathbb{Q}}$ dell' insieme

$$\{q \in \mathbb{Q} \,:\, q^2 < 2\}$$

non esiste, mentre certamente

$$\sup\{q \in \mathbb{Q} \,:\, q^2 < 2\}$$

esiste e coincide con $\sup\{x \in \mathbb{R} \,:\, x^2 < 2\} = \sqrt{2}$. ■

Definizione[FUNZIONE POTENZA]
Si definisce la potenza x^q di $x \in \mathbb{R}^+$ con $q \in \mathbb{Q}^+$ scrivendo $q = \frac{m}{n}$ con $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$ primi tra loro e osservando che

$$x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}} = \sup\{y \in \mathbb{R} \,:\, y^n < x^m\}.$$

Si pone ora il problema di definire e calcolare x^α se $x \in \mathbb{R}^+$ e $\alpha > 0$ è irrazionale. Sappiamo definire x^q con $x \in \mathbb{R}^+$ e $q \in \mathbb{Q}$. Se $\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}$ definiamo le potenze:

$$\text{se } x \geq 1, \quad x^\alpha = \sup\{x^q \,:\, q < \alpha,\ q \in \mathbb{Q}\},$$
$$\text{se } x \leq 1, \quad x^\alpha = \inf\{x^q \,:\, q < \alpha,\ q \in \mathbb{Q}\}.$$

Si dimostra in entrambe i casi che

$$\text{se } x \geq 1, \quad \inf\{x^q \,:\, q > \alpha,\ q \in \mathbb{Q}\} = x^\alpha,$$
$$\text{se } x \leq 1, \quad \sup\{x^q \,:\, q > \alpha,\ q \in \mathbb{Q}\} = x^\alpha.$$

Se per esempio si vuole calcolare 2^π, si osserva che $\pi = 3,141\cdots$ e che

$$2^3 < 2^{3,1} < 2^{3,14} < 2^{3,141} < \cdots < 2^\pi.$$

In generale, se $\alpha = q, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_k\cdots$, la successione di numeri reali $y_k = 2^{q,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_k}$ è monotona crescente e superiormente limitata e converge ad un ben definito numero reale che si dimostra essere coincidente con 2^α.

Definizione[FUNZIONE LOGARITMO ED ESPONENZIALE]
Se $x \in \mathbb{R}^+$ da quanto visto sopra è ben definita l' esponenziale di x

$$e^x = \sup\{e^q \,:\, q < x,\ q \in \mathbb{Q}\},$$

e la funzione logaritmo naturale

$$\log x = \log_e x = \sup\{y \in \mathbb{R} \,:\, e^y < x\}.$$

Si dimostra in entrambe i casi che

$$\inf\{e^q \,:\, q > x,\ q \in \mathbb{Q}\} = e^x,$$

e che

$$\log x = \log_e x = \inf\{y \in \mathbb{R} \,:\, e^y > x\}.$$

Dato $x > 0$, $y = \log x$ è l' unico numero reale che verifica $e^y = x$.

8. LIMITI DI FUNZIONI

8.1. Definizioni ed Esempi.

Definizione[PUNTO DI ACCUMULAZIONE DI UN INSIEME]
Sia $X \subseteq \mathbb{R}$. Si dice che $x_0 \in \mathbb{R}$ è un **punto di accumulazione per** *X se esiste almeno una successione di elementi di X, $\{a_n\} \subset X$, tale che $a_n \to x_0$ e $a_n \neq x_0$ definitivamente in $\mathbb{N}$.*

Esempio. Se $X = (0, 1]$, allora ogni $x_0 \in [0, 1]$ è un punto di accumulazione per X. Notare che $x_0 = 0$ è di accumulazione per $(0, 1]$ ma non appartiene a $(0, 1]$, mentre ogni punto $x_0 \in (0, 1]$ è di accumulazione per X e appartiene a X.

Definizione[PUNTO ISOLATO DI UN INSIEME]
Sia $X \subseteq \mathbb{R}$. Si dice che $x_0 \in X$ è un **punto isolato di** *X se non è un punto di accumulazione per X.*

Esempio. Se $X = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n},\, n \in \mathbb{N}\}$, allora ogni $x_0 \in X$ è un punto isolato per X. Notare che X ha in questo caso un unico punto di accumulazione, $x_0 = 0$, che non appartiene a X.

Definizione 8.1[INSIEMI CHIUSI/APERTI]
Sia $X \subseteq \mathbb{R}$. X si dice **chiuso** *se contiene tutti i suoi punti di accumulazione. X si dice* **aperto** *se il suo complementare in $\mathbb{R}$, $\complement_{\mathbb{R}} X$ è chiuso.*

Esempio. Se $-\infty < a < b < +\infty$, allora l' intervallo $[a, b]$ è chiuso, mentre l' intervallo (a, b) è aperto. Infatti $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(a, b) = (-\infty, a] \cup [b, +\infty)$ è a sua volta chiuso. L' intervallo $(a, b]$ non è nè aperto nè chiuso.

Esempio. L' insieme composto da un solo numero reale $X = \{x_0\}$ è chiuso, perché non ha punti di accumulazione.

Esempio. Se $X = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n},\, n \in \mathbb{N}\}$, allora X non è chiuso, perché $x_0 = 0$ è di accumulazione per X ma non appartiene a X. Inoltre X non è aperto perché per il suo complementare $\mathbb{R} \setminus X$ tutti i punti di X sono punti di accumulazione che non appartengono a $\mathbb{R} \setminus X$.

Osservazione
È bene osservare che la definizione di punto di accumulazione richiede che il candidato punto di accumulazione x_0 sia un numero reale, $x_0 \in \mathbb{R}$. Quindi $(-\infty, a]$ è chiuso, perché contiene tutti i suoi punti di accumulazione secondo la definizione data. $\square$

Definizione[INTORNO]
Se $x_0 \in \mathbb{R}$, si dice **intorno** *di x_0 ogni insieme che contiene un intervallo aperto non vuoto che contiene x_0. Definiamo poi intorno di $+\infty(-\infty)$ ogni insieme che contenga un intervallo superiormente (inferiormente) illimitato.* $\square$

TEOREMA 8.0[DEFINIZIONE EQUIVALENTE DI INSIEME APERTO]
Sia $X \subseteq \mathbb{R}$. X è **aperto** *se e solo se, per ogni $x_0 \in X$ esiste un intorno $\mathcal{U}$ di x_0 contenuto in X, ovvero se e solo se*

$$\forall\, x_0 \in X,\ \exists \text{ un intorno } \mathcal{U} \text{ di } x_0 \,:\, \mathcal{U} \subset X.$$

Dimostrazione.[Facoltativa]
Dimostriamo innanzitutto che se per ogni $x_0 \in X$ esiste un intorno $\mathcal{U}$ di x_0 contenuto in X, allora $\complement_{\mathbb{R}} X$ contiene tutti i suoi punti di accumulazione (i.e. X è aperto). Supponiamo per assurdo che la tesi sia falsa. Allora $\exists\, \{x_n\} \subset \complement_{\mathbb{R}} X \,:\, x_n \to x_0 \notin \complement_{\mathbb{R}} X$. Ma allora $x_0 \in X$ e per ipotesi esiste un intorno di x_0, che indicheremo con $\mathcal{U}_{x_0}$, contenuto in X, ovvero $\mathcal{U}_{x_0} \subset X$. Dato che $x_n \to x_0$, per definizione di

intorno concludiamo che $x_n \in \mathcal{U}_{x_0}$ per ogni n sufficiente grande. Questo fatto è chiaramente assurdo perché $\mathcal{U}_{x_0} \subset X$ e se $x_n \in \mathcal{U}_{x_0}$ per qualche n allora $x_n \in X$ per quei valori di n, mentre $\{x_n\} \in \complement_{\mathbb{R}} X$ per ipotesi.
Dimostriamo ora che se $\complement_{\mathbb{R}} X$ contiene tutti i suoi punti di accumulazione (i.e. se X è aperto) allora per ogni $x_0 \in X$ esiste un intorno $\mathcal{U}$ di x_0 contenuto in X. Supponiamo per assurdo che la tesi sia falsa. Allora $\exists\, x_0 \in X$ tale che, per ogni intorno $\mathcal{U}$ di x_0, si ha $\mathcal{U} \cap \complement_{\mathbb{R}} X \neq \emptyset$. Sia $\delta_1 = 1, \mathcal{U}_1 = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ e $x_1 \in \mathcal{U}_1 \cap \complement_{\mathbb{R}} X$. Sia poi $\delta_2 = \frac{|x_1 - x_0|}{2}$, $\mathcal{U}_2 = (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2)$ e $x_2 \in \mathcal{U}_2 \cap \complement_{\mathbb{R}} X$. Per induzione, possiamo allora costruire una successione $\{x_n\} \subset \complement_{\mathbb{R}} X$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$|x_n - x_0| < \frac{|x_{n-1} - x_0|}{2} < \frac{|x_{n-2} - x_0|}{2^2} < \cdots < \frac{|x_2 - x_0|}{2^{n-2}} < \frac{|x_1 - x_0|}{2^{n-1}} < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Se ne deduce che $x_n \to x_0$, e dunque che x_0 è un punto di accumulazione per $\complement_{\mathbb{R}} X$. Questo fatto è chiaramente assurdo dato che $x_0 \in X$, mentre per ipotesi $\complement_{\mathbb{R}} X$ contiene tutti i suoi punti di accumulazione. ■

Esempio. Come sopra, se $-\infty < a < b < +\infty$, allora l' intervallo (a, b) è aperto, mentre $[a, b]$ è un insieme chiuso. Infatti $\complement_{\mathbb{R}}[a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ è a sua volta aperto.

Definizione 8.3[LIMITI DI FUNZIONI. CARATTERIZZAZIONE PER SUCCESSIONI]
Sia $f : X \mapsto \mathbb{R}$, $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo che $x_0 \in \mathbb{R}$ sia un punto di accumulazione per X. Se X è superiormente(inferiormente) illimitato supponiamo che $x_0 \in \mathbb{R}$ sia un punto di accumulazione per X o che $x_0 = +\infty(-\infty)$. Si dice che

" $f(x)$ tende a L per x che tende a x_0 "

e si scrive

$$f(x) \longrightarrow L,\ x \longrightarrow x_0,$$

o, equivalentemente si dice che

"il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 è L",

e si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

se

$$f(a_n) \longrightarrow L,\ \forall \{a_n\} \subset X : \begin{cases} a_n \longrightarrow x_0,\ n \longrightarrow +\infty, \\ a_n \neq x_0 \text{ definitivamente.} \end{cases} \tag{8.1.1}$$

Osservazione
Negli enunciati e definizioni che seguono supporremo sempre, a meno che diversamente indicato, che x_0 sia di accumulazione per X e che se X è superiormente(inferiormente) limitato, allora o x_0 è di accumulazione per X o $x_0 = +\infty(-\infty)$, in modo che l' operazione di limite sia sempre ben definita. È chiaro tuttavia che questa ipotesi su x_0 è **parte integrante della definizione** di limite, e quindi non è necessario ripeterla ogni volta. In altri termini, tutte le volte che si considera il limite per $x \to x_0$ di una funzione di dominio X, si suppone implicitamente che
"*x_0 sia di accumulazione per X e che se X è superiormente(inferiormente) illimitato, allora o x_0 è di accumulazione per X o $x_0 = +\infty(-\infty)$*". Se questa ipotesi non è verificata, il procedimento di limite non è definito.
Questa convenzione ha come eccezioni quei casi in cui è necessario fare ipotesi più restrittive, per esempio che $x_0 \in \mathbb{R}$ sia solo un punto di accumulazione finito e non $\pm\infty$ e viceversa. In questi casi si include **esplicitamente** l'ipotesi richiesta nell' enunciato. □

TEOREMA 8.1[LIMITI DI FUNZIONI. CARATTERIZZAZIONE PER INTORNI]
Sia $f : X \mapsto \mathbb{R}$, $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora

(A) $$\lim_{x\to x_0} f(x) = L,$$

se e solo se
(B) *per ogni intorno V di L, esiste un intorno $\mathcal{U}$ di x_0, tale che $f(x) \in V$, per ogni $x \in \{\mathcal{U} \cap X\} \setminus \{x_0\}$, ovvero, se e solo se*

$$\forall \text{ intorno } V \text{ di } L, \exists \text{ un intorno } \mathcal{U} \text{ di } x_0 \, : \, f(x) \in V, \ \ \forall\, x \in \{\mathcal{U} \cap X\} \setminus \{x_0\}.$$

Dimostrazione.[FACOLTATIVA]
Discuteremo per semplicità solo il caso $L \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. Ricordiamo che si assume in queste note che se si considera il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$, allora x_0 è di accumulazione per X.

(B) $\Longrightarrow$ (A).
Supponiamo per assurdo che la tesi sia falsa. Allora,

$$\exists\, a_n \longrightarrow x_0,\ a_n \neq x_0 \text{ definitivamente } : \exists \{a_{n_k}\} \subset \{a_n\} \, : \, |f(a_{n_k}) - L| \geq \varepsilon_0 > 0, \ \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{8.1.2}$$

Sia $V_0 = (L - \frac{\varepsilon_0}{4}, L + \frac{\varepsilon_0}{4})$. Per ipotesi $\exists\, \mathcal{U}_0 \subset \mathbb{R} \, : \, x_0 \in \mathcal{U}_0$ e

$$f(x) \in V_0, \quad \forall\, x \in \{\mathcal{U}_0 \cap X\} \setminus \{x_0\}.$$

Dato che $a_{n_k} \to x_0$, $k \to +\infty$, per definizione di intorno si ha $a_{n_k} \in \mathcal{U}_0$ per ogni k sufficientemente grande. Dato che per ipotesi $a_{n_k} \neq x_0$ definitivamente, si ha anche $a_{n_k} \in \{\mathcal{U}_0 \cap X\} \setminus \{x_0\}$ per ogni k sufficientemente grande. Se ne deduce che

$$f(a_{n_k}) \in V_0, \quad \text{ovvero} \quad |f(a_{n_k}) - L| < \frac{\varepsilon_0}{4},$$

per ogni k sufficientemente grande.
Questo fatto è chiaramente assurdo perchè dalla (8.1.2) si deve avere

$$|f(a_{n_k}) - L| \geq \varepsilon_0, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

(A) $\Longrightarrow$ (B).
Supponiamo per assurdo che la tesi sia falsa. Allora

$$\exists \text{ un intorno } V_0 \text{ di } L \, : \text{ per ogni intorno } \mathcal{U} \text{ di } x_0 \ \exists\, x_{\mathcal{U}} \in \{\mathcal{U} \cap X\} \setminus \{x_0\} \, : \, f(x_{\mathcal{U}}) \notin V_0. \tag{8.1.3}$$

Per definizione di intorno $\exists\, \varepsilon_0 > 0 \, : \, (L - \varepsilon_0, L + \varepsilon_0) \subseteq V_0$. Dalla (8.1.3) concludiamo che

$$\forall\ \delta > 0\ \exists\, x_\delta \in \{(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X\} \setminus \{x_0\} \, : \, f(x_\delta) \notin (L - \varepsilon_0, L + \varepsilon_0). \tag{8.1.4}$$

Sia $\delta_1 = 1$ e $x_1 = x_{\delta_1}$ determinato dalla (8.1.4). Sia poi $\delta_2 = \frac{|x_1 - x_0|}{2}$ e $x_2 = x_{\delta_2}$ determinato dalla (8.1.4). Per induzione possiamo allora costruire una successione $\{x_n\} \subset X$ tale che

$$|x_n - x_0| < \frac{|x_{n-1} - x_0|}{2} < \frac{|x_{n-2} - x_0|}{2^2} < \cdots < \frac{|x_2 - x_0|}{2^{n-2}} < \frac{|x_1 - x_0|}{2^{n-1}} < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Se ne deduce che $x_n \to x_0$ e che $f(x_n) \notin (L - \varepsilon_0, L + \varepsilon_0)$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Questo fatto è chiaramente assurdo perché se $x_n \to x_0$, allora $f(x_n) \to L$ per ipotesi. ■

Illustriamo esplicitamente degli enunciati equivalenti relativi alla caratterizzazione per intorni.

TEOREMA [LIMITE PER $x \to +\infty$]
Sia $f : X \mapsto \mathbb{R}$ e $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = L,$$

se e solo se

$$\begin{cases} L = +\infty(-\infty), & \forall\ M > 0\ \exists\ N_M > 0\ : f(x) > M (f(x) < -M),\ \forall\ x \in (N_M, +\infty) \cap X. \\ \\ L \in \mathbb{R}, & \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon > 0\ : |f(x) - L| < \varepsilon,\ \forall\ x \in (N_\varepsilon, +\infty) \cap X. \end{cases} \tag{8.1.5}$$

Osservazione 1.
Osserviamo che, per esempio, l' insieme $I = \{y \in \mathbb{R} : |y-L| < \varepsilon\}$, altro non è che l' intervallo $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, cioè l' intervallo aperto, centrato in L, di ampiezza 2ε. Quindi, a ben vedere, la (8.1.5) richiede semplicemente la verifica di un caso particolare di quanto stabilito nel Teorema 8.1, ovvero che comunque fissato un intervallo I centrato in L, esista un numero reale $N_I \in \mathbb{R}$ (che dipende da I), tale che tutti i valori assunti da $f(x)$ con x nel dominio di f e maggiore di N_I, siano contenuti in I. $\square$

Osservazione
Se $X = \mathbb{N}$, ritroviamo come caso particolare la definizione di limite per una successione numerica.

TEOREMA [LIMITE PER $x \to -\infty$]
Sia $f : X \mapsto \mathbb{R}$ *e* $L \in \overline{\mathbb{R}}$. *Allora*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L,$$

se e solo se

$$\begin{cases} L = +\infty(-\infty), & \forall\, M > 0 \;\exists\, N_M < 0 \,:\, f(x) > M (f(x) < -M),\; \forall\, x \in (-\infty, N_M) \cap X. \\ \\ L \in \mathbb{R}, & \forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, N_\varepsilon < 0 \,:\, |f(x) - L| < \varepsilon,\; \forall\, x \in (-\infty, N_\varepsilon) \cap X. \end{cases} \tag{8.1.6}$$

Osservazione 2.
Osserviamo che, per esempio, l' insieme $I = \{y \in \mathbb{R} : y > M\}$, altro non è che l' intervallo $(M, +\infty)$. Quindi, a ben vedere, la (8.1.6) richiede semplicemente la verifica di un caso particolare di quanto stabilito nel Teorema 8.1, ovvero che comunque fissato un intervallo I "contenente" L, esista un numero reale $N_I \in \mathbb{R}$ (che dipende da I), tale che tutti i valori assunti da $f(x)$ con x nel dominio di f e minore di N_I siano contenuti in I. $\square$

Definizione[ASINTOTO ORIZZONTALE]
Se $f(x) \to L \in \mathbb{R}$, $x \to +\infty(-\infty)$, *si dice che* f *ha un* **asintoto orizzontale** *per* $x \to +\infty(-\infty)$, *l'asintoto orizzontale essendo la retta* $r \subset \mathbb{R}^2$ *di equazione* $r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\; y = L\}$.

TEOREMA [LIMITE PER $x \to x_0 \in \mathbb{R}$]
Sia $f : X \mapsto \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ *di accumulazione per* X *e* $L \in \overline{\mathbb{R}}$. *Allora*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

se e solo se

$$\begin{cases} L = +\infty(-\infty), & \forall\, M > 0 \;\exists\, \delta_M > 0 \,:\, f(x) > M (f(x) < -M),\; \forall\, x \in \{(x_0 - \delta_M, x_0 + \delta_M) \cap X\} \setminus \{x_0\}. \\ \\ L \in \mathbb{R}, & \forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta_\varepsilon > 0 \,:\, |f(x) - L| < \varepsilon,\; \forall\, x \in \{(x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \cap X\} \setminus \{x_0\}. \end{cases} \tag{8.1.7}$$

Osservazione 3.
Osserviamo che, per esempio, l' insieme $I = \{y \in \mathbb{R} : y < M\}$, altro non è che l' intervallo $(-\infty, M)$. Quindi, a ben vedere, la (8.1.7) richiede semplicemente la verifica di un caso particolare di quanto stabilito nel Teorema 8.1, ovvero che comunque fissato un intervallo I "contenente" L, esista un intervallo aperto $(x_0 - \delta_M, x_0 + \delta_M) \in \mathbb{R}$ (che dipende da I), tale che tutti i valori assunti da $f(x)$ con x nel dominio di f e contenuti in $(x_0 - \delta_M, x_0 + \delta_M) \setminus \{x_0\}$ siano contenuti in I. $\square$

Definizione[ASINTOTO VERTICALE]
Se $f(x) \to +\infty(-\infty)$, $x \to x_0 \in \mathbb{R}$, *si dice che* f *ha un* **asintoto verticale** *in* x_0, *l'asintoto verticale essendo la retta* $s \subset \mathbb{R}^2$ *di equazione* $s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\; x = x_0\}$.
Vedremo tra poco, che la definizione di asintoto verticale si può generalizzare al fine di includere anche

alcuni casi nei quali il limite per $x \to x_0$ non esiste, vedere Osservazione 5.

Esempio. Per ogni $\alpha > 0$, per ogni $\beta > 0$ e per ogni $a > 1$, si verifica facilmente dalla definizione, che le funzioni, definite nel loro dominio naturale, $(\log_a(x))^\beta$, x^α, $a^{\beta x}$, $x^{\beta x}$, tendono a $+\infty$ per $x \to +\infty$.

Esempio. Per ogni $\alpha > 0$, per ogni $\beta > 0$ e per ogni $a > 1$, si verifica facilmente dalla definizione, che le funzioni, definite nel loro dominio naturale, $(\log_a(x))^{-\beta}$, $x^{-\alpha}$, $a^{-\beta x}$, $x^{-\beta x}$, tendono a 0 per $x \to +\infty$, e quindi hanno tutte un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ corrispondente alla retta $\{y = 0\}$.

Esempio. Per ogni $\alpha > 0$, per ogni $\beta > 0$ e per ogni $a > 1$, si verifica facilmente dalla definizione che le funzioni, definite nel loro dominio naturale, $(\log_a(|x|))^\beta$, $|x|^\alpha$, $a^{\beta|x|}$, $|x|^{\beta|x|}$, tendono a $+\infty$ per $x \to -\infty$.

Esempio. Per ogni $\alpha > 0$, per ogni $\beta > 0$ e per ogni $a > 1$, si verifica facilmente dalla definizione che le funzioni, definite nel loro dominio naturale, $(\log_a(|x|))^{-\beta}$, $|x|^{-\alpha}$, $a^{-\beta|x|}$, $|x|^{-\beta|x|}$, tendono a 0 per $x \to -\infty$, e quindi hanno tutte un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$ corrispondente alla retta $\{y = 0\}$.

Esempio. $f(x) = 3 + \frac{1}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$. Si verifica subito tramite la definizione che $f(x) \to 3$, $x \to \pm\infty$. Quindi f ha un asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$, dato dalla retta $\{y = 3\}$.

Esempio. $f(x) = \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Si verifica subito che se $a_n = 2n\pi$, allora $a_n \to +\infty$ e $\cos(a_n) = 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, mentre se $b_n = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, allora $b_n \to +\infty$ e $\cos(b_n) = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Quindi $f(a_n) \to 1$, mentre $f(b_n) \to 0$. Concludiamo che il limite di $f(x) = \cos(x)$ per $x \to +\infty$ non esiste.

Esempio. Per ogni $\alpha > 0$, si verifica facilmente dalla definizione che la funzione, definita nel suo dominio naturale, $|x|^{-\alpha}$, tende a $+\infty$ per $x \to 0$, e quindi ha un asintoto verticale per $x \to 0$ corrispondente alla retta $\{x = 0\}$. In particolare per ogni $k \in \mathbb{N}$, si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2k}} = +\infty.$$

Esempio. Per ogni $\alpha > 0$, si verifica facilmente dalla definizione che la funzione, definita nel suo dominio naturale, $|x|^\alpha$, tende a 0 per $x \to 0$. In particolare per ogni $k \in \mathbb{N}$, si ha

$$\lim_{x\to 0} x^{2k} = 0.$$

Esempio. Per ogni $\beta > 0$ e per ogni $a > 1$, si può verificare che la funzione, definita nel suo dominio naturale, $|\log_a(|x|)|^{-\beta}$, tende a 0 per $x \to 0$.

Esempio. $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$. Si verifica subito che se $a_n = \frac{1}{2n\pi}$, allora $a_n \to 0$ e $\sin(a_n) = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, mentre se $b_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, allora $b_n \to 0$ e $\sin(b_n) = 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Quindi $f(a_n) \to 1$, mentre $f(b_n) \to 0$. Concludiamo che il limite di $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ per $x \to 0$ non esiste.

Osservazione 4
È importante osservare quanto segue:
Il fatto che il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$ esista o meno, e se esiste, il valore che eventualmente assume NON DIPENDE IN NESSUN MODO da "quello che succede in x_0". In altri termini, il fatto che f sia definita o addirittura non definita in x_0, e se è definita in x_0, il fatto che assuma un determinato valore reale o un altro, non influenza in alcun modo l' esistenza o meno del limite e, se esiste il limite, non influenza in alcun modo il valore del limite stesso. Questo fatto è chiaramente illustrato, dalla Definizione 8.1 (dove si richiede $a_n \neq x_0$ definitivamente) e/o dalla caratterizzazione equivalente data dal Teorema 8.1 (dove si richiede $x \neq x_0$). Un esempio esplicito di questo fatto è dato per esempio dal limite per $x \to 0$ della

funzione

$$f_\alpha(x) := \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0, \end{cases}$$

per un arbitrario valore $\alpha \in \mathbb{R}$. È chiaro che $f_\alpha(0) = \alpha$, ma il Lettore potrà verificare facilmente che $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, indipendentemente dal valore assegnato ad α. Si consideri anche il limite per $x \to 0$ della funzione

$$f(x) := \frac{1}{x},\ x \neq 0,$$

che non è definita in $x = 0$. D' altra parte è facile verificare che se $a_n = \frac{1}{n^5}$, allora $f(a_n) = n^5 \to +\infty$, $n \to +\infty$, mentre se $b_n = -\frac{1}{n^5}$, allora $f(b_n) = -(n)^5 \to -\infty$, $n \to +\infty$, e quindi il limite non esiste. □

Osservazione

Osserviamo che continuano a valere per i limiti di funzioni i Teoremi visti per i limiti di successioni nel Cap. 7, come ora andiamo ad elencare. Come conseguenza della Definizione 8.3, le dimostrazioni dei Teoremi 8.2, 8.3, 8.4, 8.4.1, 8.5, 8.6, 8.7 sono una facile conseguenza delle dimostrazioni corrispondenti agli analoghi Teoremi per successioni, vedere **[B]** §7.2, 7.4, 7.5. □

TEOREMA 8.2[UNICITÀ DEL LIMITE]

Se $f : X \mapsto \mathbb{R}$ ammette limite, finito o infinito, per $x \to x_0$ allora il limite è unico.

TEOREMA 8.3[SOMMA, PRODOTTO, RAPPORTO DI LIMITI]

Siano $f : X \mapsto \mathbb{R}$ e $g : X \mapsto \mathbb{R}$ due funzioni che ammettono limite (finito o infinito) per $x \to x_0$. Allora: se la somma dei limiti non dà luogo alle forme indeterminate $(\pm\infty) + (\mp\infty)$, $(\pm\infty) - (\pm\infty)$ si ha

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x); \tag{8.1.8}$$

se il prodotto dei limiti non dà luogo alle forme indeterminate $0 \cdot (\pm\infty)$, $(\pm\infty) \cdot 0$, si ha

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = (\lim_{x\to x_0} f(x)) \cdot (\lim_{x\to x_0} g(x)); \tag{8.1.9}$$

Se inoltre $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, e il quoziente dei limiti non dà luogo alle forme indeterminate $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{\pm\infty}{\mp\infty}$, si ha

$$\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}\ . \tag{8.1.10}$$

Definizione[PROPRIETÀ CHE VALGONO DEFINITIVAMENTE PER $x \to x_0$]

Sia $\mathcal{P}_x$ una proprietà definita per $x \in X \subseteq \mathbb{R}$. Si dice che $\mathcal{P}_x$ vale definitivamente per $x \to x_0$ se, per ogni $\{a_n\} \subset X : a_n \to x_0$ e $a_n \neq x_0$ definitivamente in n, $\mathcal{P}_{a_n}$ vale definitivamente in n.

Osservazione

È implicito nella definizione che se $\mathcal{P}_x$ vale definitivamente per $x \to x_0$ allora o $x_0 \in \mathbb{R}$ è di accumulazione per X oppure $x_0 = +\infty(-\infty)$ e X è superiormente (inferiormente) illimitato.
In ogni caso si può dimostrare che:
Se $x_0 \in \mathbb{R}$, allora $\mathcal{P}_x$ vale definitivamente per $x \to x_0$ se e solo se
$\exists\ \delta > 0\ :\ \mathcal{P}_x$ vale $\forall\ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X \setminus \{x_0\}$.
Se $x_0 = +\infty$ allora $\mathcal{P}_x$ vale definitivamente per $x \to x_0$ se e solo se
$\exists\ N > 0\ :\ \mathcal{P}_x$ vale $\forall\ x \in (N, +\infty) \cap X$.
Completare il caso $x_0 = -\infty$ per esercizio. La dimostrazione di una implicazione è ovvia. Per l' implicazione contraria imitare l' argomento usato nella seconda parte della dimostrazione del Teorema 8.0 (o del Teorema 8.1). □

TEOREMA 8.4[LIMITI DI FUNZIONI ELEVATI A LIMITI DI FUNZIONI]
Siano $f : X \mapsto \mathbb{R}$ e $g : X \mapsto \mathbb{R}$ due funzioni che ammettono limite (finito o infinito) per $x \to x_0$. Supponiamo che $f(x) > 0$ definitivamente per $x \to x_0$, e indichiamo con $a \in [0, +\infty]$ e $b \in \overline{\mathbb{R}}$ i limiti $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$. Se la potenza in base a di b,

$$a^b$$

non dà luogo ad una delle forme indeterminate

$$1^{\pm\infty}, \qquad (+\infty)^0, \qquad 0^b \text{ con } b \leq 0,$$

allora si ha

$$\lim_{x\to x_0} \left((f(x))^{g(x)} \right) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x) \right)^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

In particolare, se $a = 0$ e $b < 0$ si ha

$$\lim_{x\to x_0} \left((f(x))^{g(x)} \right) = +\infty.$$

Vale inoltre

$$\lim_{x\to x_0} \log (f(x)) = \begin{cases} +\infty & se \quad a = +\infty \\ \log (a) & se \quad a \in (0, +\infty) \\ -\infty & se \quad a = 0. \end{cases}$$

TEOREMA 8.4.1[PERMANENZA DEL SEGNO]
Sia $f : X \mapsto \mathbb{R}$. Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = L > 0$, allora $f(x)$ è definitivamente strettamente positiva per $x \to x_0$.

TEOREMA 8.5[CALCOLO DI LIMITI - PRIMO TEOREMA DI CONFRONTO]
Siano $f : X \mapsto \mathbb{R}$ e $g : X \mapsto \mathbb{R}$ due funzioni. Supponiamo che

$$f(x) \longrightarrow +\infty(-\infty), \ x \longrightarrow x_0$$

e anche che

$$g(x) \geq f(x) \, (g(x) \leq f(x)), \quad \textit{definitivamente per } x \to x_0.$$

Allora, $g(x)$ ammette limite per $x \to x_0$ e si ha

$$g(x) \longrightarrow +\infty \, (g(x) \longrightarrow -\infty), \ x \longrightarrow x_0.$$

TEOREMA 8.6[CALCOLO DI LIMITI - SECONDO TEOREMA DI CONFRONTO]
Siano $g : X \mapsto \mathbb{R}$, $f : X \mapsto \mathbb{R}$ e $h : X \to \mathbb{R}$ tre funzioni. Supponiamo che

$$g(x) \longrightarrow L_1 \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad h(x) \longrightarrow L_2 \in \overline{\mathbb{R}}, \ x \longrightarrow x_0,$$

e anche che

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x), \quad \textit{definitivamente per } x \to x_0.$$

Allora si ha:

(i) *Se $f(x)$ ammette limite per $x \to x_0$ e $f(x) \longrightarrow c \in \overline{\mathbb{R}}$, allora*

$$L_1 \leq c \leq L_2.$$

(ii) *Se $L_1 = L_2$, sia L il valore comune definito da $L \equiv L_1 = L_2$. Allora $f(x)$ ammette limite per $x \to x_0$ e in particolare*

$$f(x) \longrightarrow L, \ x \longrightarrow x_0.$$

TEOREMA 8.7[CONFRONTO DI LIMITI]
Siano $f : X \mapsto \mathbb{R}$ e $g : X \mapsto \mathbb{R}$ due funzioni che ammettono limite (finito o infinito) per $x \to x_0$. Se

$$f(x) \le g(x)(f(x) \ge g(x)), \qquad o \quad se \qquad f(x) < g(x)(f(x) > g(x)), \quad \textit{definitivamente per } x \to x_0,$$

allora

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \le \lim_{x\to x_0} g(x)\,(\lim_{x\to x_0} f(x) \ge \lim_{x\to x_0} g(x)).$$

ESERCIZI. Calcolare i seguenti limiti.

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2+5^{-x}),\ \lim_{x\to+\infty}\frac{4^x+x^3+3^{-x}}{5x^x+(\log(x))^7-6^x+x},\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x+e^{-x}}.$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^5-4x^2),\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^5+x^4+(\log(|x|))x}{4x^5+(\cos(\log(|x|)))x},\ \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}+x}{e^{\frac{|x|}{2}}+\sin(x)},\ \lim_{x\to-\infty}\frac{3^{-x}-x^2}{2^{-x}+x^3}-\frac{3^{-x}+x^2}{2^{-x}-x^3}.$$

Esercizio. Si vuole calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right).$$

Questa forma indeterminata si può risolvere come segue. Si osserva che, per ogni $x > 0$, si ha

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\to\frac{1}{(+\infty)+(+\infty)}=0,$$

dove si usa il fatto che $\sqrt{x}\to+\infty$ e $\sqrt{x+1}\to+\infty$, $x\to+\infty$. Infatti $\sqrt{x}\to+\infty$, $x\to+\infty$, dagli esempi di cui sopra, e $\sqrt{x+1}>\sqrt{x}$, $\forall\, x>0$, e la conclusione segue dal teorema di confronto 8.5. ■

Esercizio. Si vuole calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x}\right).$$

Si osserva che

$$\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x}=\frac{(\sqrt[4]{x+1})^2-(\sqrt[4]{x})^2}{\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{x}}=\frac{(\sqrt[4]{x+1})^2-(\sqrt[4]{x})^2}{\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{x}}=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{x}}\longrightarrow\frac{0}{+\infty}=0,\ x\to+\infty,$$

dove si è usato il limite precedente e il fatto che, ragionando come nell' esercizio precedente, si ha $\sqrt[4]{x}\to+\infty$ e $\sqrt[4]{x+1}\to+\infty$, $x\to+\infty$. ■

Esercizio. Si vuole calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\left(4+\frac{1}{x}\right)^x-4^x.$$

Si osserva che

$$\left(4+\frac{1}{x}\right)^x-4^x=4^x\left(1+\frac{1}{4x}\right)^x-4^x=4^x\left[\left(1+\frac{1}{4x}\right)^x-1\right].$$

Ricordiamo a questo punto che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e. \tag{8.1.11}$$

Ricordiamo il limite (7.6.20) in **[B]** §7.6

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e,\ \forall\, a_n\to+\infty. \tag{8.1.12}$$

Segue dalla (8.1.12) e dalla Definizione 8.3 che

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{8.1.13}$$

In particolare è chiaro che $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{4x}\right)^{4x} = e$. Segue allora dal Teorema 8.4 che

$$\left(1 + \frac{1}{4x}\right)^x = \left[\left(1 + \frac{1}{4x}\right)^{4x}\right]^{\frac{1}{4}} \to e^{\frac{1}{4}},\ x \to +\infty.$$

Concludiamo che

$$\left(4 + \frac{1}{x}\right)^x - 4^x = 4^x \left[\left(1 + \frac{1}{4x}\right)^x - 1\right] \to +\infty \cdot (e^{\frac{1}{4}} - 1) = +\infty.$$

■

Tra le altre applicazioni possibili, la soluzione del problema di esistenza/non esistenza di alcuni limiti, come anche alcuni risultati importanti sulle forme indeterminate $\frac{L}{0}$, $L \in \overline{\mathbb{R}}$, possono essere dedotti dai seguenti approfondimenti sulla teoria dei limiti.
Osserviamo che, nelle seguente definizione, si suppone $L \in \mathbb{R}$ e NON $L \in \overline{\mathbb{R}}$, come nei casi precedenti.

Definizione[LIMITE DI FUNZIONE = $L^+(L^-)$]
Sia $f : X \mapsto \mathbb{R}$ e $L \in \mathbb{R}$. Se

$$f(x) \longrightarrow L,\ x \longrightarrow x_0,$$

e inoltre

$$f(x) > L\ (f(x) < L),\ \ \textit{definitivamente per}\ x \to x_0,$$

si dice che

" $f(x)$ tende a $L^+(L^-)$ per x che tende a x_0 "

e si scrive

$$f(x) \longrightarrow L^+\ (f(x) \longrightarrow L^-)\ x \longrightarrow x_0,$$

o, equivalentemente si dice che

"il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 è $L^+(L^-)$",

e si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L^+,\ \left(\lim_{x \to x_0} f(x) = L^-\right).$$

Osservazione
Per esempio, se $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha in particolare che $f(x) \to L^+(L^-)$, $x \to x_0$, se e solo se

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0\ : L < f(x) < L + \varepsilon\ (L - \varepsilon < f(x) < L),\ \forall\ x \in \{(x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \cap X\} \setminus \{x_0\}.$$

ESERCIZIO: Estendere la caratterizzazione di cui all' osservazione precedente ai casi $x_0 = \pm\infty$.

Esempio. Per ogni $\alpha > 0$, per ogni $\beta > 0$ e per ogni $a > 1$, Si è visto che le funzioni, definite nel loro dominio naturale, $-\left(\log_a(x)\right)^{-\beta}$, $-x^{-\alpha}$, $-a^{-\beta x}$, $-x^{-\beta x}$, tendono a 0 per $x \to +\infty$. D' altra parte è chiaro che le funzioni in esame sono tutte definitivamente strettamente negative, e quindi tendono a 0^- per $x \to +\infty$.

Esempio. $f(x) = 3 + \frac{1}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$. Si è visto che $f(x) \to 3$, $x \to \pm\infty$. D' altra parte è chiaro che $f(x) > 3$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$, e quindi $f(x) \to 3^+$, $x \to \pm\infty$.

Definizione[LIMITE DI FUNZIONE DESTRO/SINISTRO-CARATTERIZZAZIONE PER SUCCESSIONI]
Sia $f : X \mapsto \mathbb{R}$, $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo che $x_0 \in \mathbb{R}$ sia un punto di accumulazione per X. Si dice che

" $f(x)$ tende a L per x che tende a $x_0^+(x_0^-)$ "

e si scrive

$$f(x) \longrightarrow L \;\; x \longrightarrow x_0^+ \;(x \longrightarrow x_0^-),$$

o, equivalentemente si dice che

"il limite di $f(x)$ per x che tende a $x_0^+(x_0^-)$ è L",

e si scrive

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L, \; \left(\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L \right),$$

se

$$f(a_n) \longrightarrow L, \; \forall\, \{a_n\} \subset X : \begin{cases} a_n \longrightarrow x_0, \; n \longrightarrow +\infty, \\ a_n > x_0 \; (a_n < x_0) \textit{ definitivamente.} \end{cases} \tag{8.1.14}$$

TEOREMA [LIMITE PER $x \to x_0^+(x_0^-)$]
Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo che $x_0 \in \mathbb{R}$ sia un punto di accumulazione per X. Allora

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L, \; \left(\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L \right),$$

se e solo se

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta_\varepsilon > 0 \,:\, |f(x) - L| < \varepsilon, \;\forall\, x \in \{(x_0, x_0 + \delta_\varepsilon) \cap X\} \setminus \{x_0\} \;\; (x \in \{(x_0 - \delta_\varepsilon, x_0) \cap X\} \setminus \{x_0\}) \,. \tag{8.1.15}$$

Dimostrazione.[Facoltativa] La dimostrazione di questo Teorema si ottiene procedendo come nella dimostrazione del Teorema 8.1 di cui sopra. ■

TEOREMA [LIMITI DI FUNZIONI-CARATTERIZZAZIONE PER LIMITE SINISTRO/DESTRO]
Sia $f : X \mapsto \mathbb{R}$, $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo che $x_0 \in \mathbb{R}$ sia un punto di accumulazione per X. Allora

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x\to x_0^\pm} f(x) = L.$$

Dimostrazione.[Facoltativa]
Se $f(a_n) \to L$ per ogni successione $\{a_n\}$ che verifica $a_n \to x_0$ e $a_n \neq x_0$ definitivamente, allora in particolare $f(a_n) \to L$ per ogni successione $\{a_n\}$ che verifica $a_n \to x_0$ e $a_n > x_0$ o $a_n < x_0$ definitivamente. Quindi $f(x) \to L$, $x \to x_0 \Longrightarrow f(x) \to L$, $x \to x_0^\pm$.
Viceversa, supponiamo che $f(x) \to L$, $x \to x_0^\pm$ e che $f(x) \not\to L$, $x \to x_0$. Allora,

$$\exists\, a_n \longrightarrow x_0, \; a_n \neq x_0 \text{ definitivamente} \,:\, \exists\, \{a_{n_k}\} \subset \{a_n\} \,:\, |f(a_{n_k}) - L| \geq \varepsilon_0 > 0, \;\forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{8.1.16}$$

Dato che $a_{n_k} \to x_0$ e $a_{n_k} \neq x_0$ definitivamente, allora o esistono infiniti termini della sottosuccessione a_{n_k} strettamente maggiori di x_0, o esistono infiniti termini della sottosuccessione a_{n_k} strettamente minori di x_0, o si verificano entrambe le situazioni. In ogni caso, possiamo estrarre una sottosottosuccessione, che indicheremo con $b_j = a_{n_{k_j}}$ tale che o $b_j > x_0$ $\forall\, j \in \mathbb{N}$ o $b_j < x_0$ $\forall\, j \in \mathbb{N}$. In particolare o $b_j \to x_0^+$ o $b_j \to x_0^-$ e dalla (8.1.16),

$$|f(b_j) - L| = |f(a_{n_{k_j}}) - L| \geq \varepsilon_0 > 0, \;\forall\, j \in \mathbb{N},$$

fatto questo chiaramente assurdo dato che $f(x) \to L$, $x \to x_0^{\pm}$ per ipotesi. ■

Osservazione 5
Se anche **uno solo dei due limiti** $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$ *è* $+\infty$ *o* $-\infty$, *si conviene di dire che* f *ha un* **asintoto verticale** *in* x_0.

Il seguente Teorema (la cui dimostrazione consigliamo come utile esercizio) completa il Teorema 8.3 nel caso in cui $g(x) \to 0$, $x \to x_0$.

TEOREMA [FORME INDETERMINATE $\frac{L}{0}$]
Siano $f : X \mapsto \mathbb{R}$ *e* $g : X \mapsto \mathbb{R}$ *due funzioni che ammettono limite per* $x \to x_0$ *e* $L \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$. *Se* $g(x) \to 0$, *e* $f(x) \to L$, $x \to x_0$, *allora si ha:*

$$\text{se } g(x) \to 0^{\pm}, \text{ allora } \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{L}{0^{\pm}} = (\pm\infty) \cdot L. \tag{8.1.17}$$

Osservare che nelle ipotesi date il rapporto dei limiti non dà luogo alla forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Nel senso specificato dal Teorema, valgono in particolare le seguenti operazioni:

$$\forall\, x > 0,\ \frac{x}{0^{\pm}} = \pm\infty,$$

$$\forall\, x < 0,\ \frac{x}{0^{\pm}} = \mp\infty.$$

Esempio. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, si verifica facilmente che la funzione, definita nel suo dominio naturale, $\frac{1}{x^{2k-1}}$, tende a $+\infty$ per $x \to 0^+$, e tende a $-\infty$ per $x \to 0^-$,

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{1}{x^{2k-1}} = \pm\infty,$$

e quindi il limite per $x \to 0$ non esiste e f ha un asintoto verticale per $x \to 0$.

Esempio. $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$, $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$. Scrivendo

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x-1)},$$

non è difficile verificare che

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} \frac{1}{(x+1)(x-1)} = \pm\infty$$

e quindi il limite per $x \to 1$ non esiste e f ha un asintoto verticale per $x \to 1$. Osserviamo anche che, dato che f è pari, si ha anche

$$\lim_{x \to (-1)^{\pm}} \frac{1}{(x+1)(x-1)} = \mp\infty.$$

Osservazione
I Teoremi $8.2, 8.3, 8.4, 8.4.1, 8.5, 8.6, 8.7$ valgono, con le opportune modifiche sugli enunciati, per i limiti sinistro e/o destro.

Il calcolo di molti limiti può essere risolto tramite il Teorema del limite di funzione composta.

TEOREMA 8.8[LIMITE DELLA FUNZIONE COMPOSTA]
Siano $f : Y \mapsto \mathbb{R}$, $g : X \mapsto \mathbb{R}$, $Im(g) \subseteq Y$, $L \in \overline{\mathbb{R}}$, $y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. *Se*

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0, \quad e \ \ g(x) \neq y_0, \ \textit{definitivamente per } x \to x_0,$$

e se

$$\lim_{y\to y_0} f(y) = L,$$

allora si ha

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = L. \tag{8.1.18}$$

Dimostrazione[Facoltativa] Il Lettore interessato può svolgere questa dimostrazione a titolo di utile esercizio nella teoria dei limiti di funzioni. ■

Osservazione
L' ipotesi $g(x) \neq y_0$ definitivamente per $x \to x_0$ è **necessaria** per la validità del Teorema 8.8, come illustrato nel seguente esempio. Se

$$g(x) = \begin{cases} 5, \ x \neq 0 \\ 0, \ x = 0 \end{cases}$$

e

$$f(y) = \begin{cases} 3, \ y \neq 5 \\ -2, \ y = 5, \end{cases}$$

si ha

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 5,$$

$$\lim_{y\to 5} f(y) = 3,$$

ma $g(x) = 5$, $\forall\, x \neq 0$ e quindi il Teorema 8.8 non si può applicare. Infatti in questo caso la tesi (8.1.18) è **falsa**, dato che si ha $x_0 = 0$, $y_0 = 5$, $L = 3$ e

$$\lim_{x\to 0} f(g(x)) = \lim_{x\to 0} f(5) = \lim_{x\to 0}(-2) = -2 \neq 3.$$

□

Esempio. Si vuole calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \arctan\left(\log(|x|)\right). \tag{8.1.19}$$

Diamo per acquisito il seguente limite notevole

$$\lim_{x\to +\infty} \arctan(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-}. \tag{8.1.20}$$

Il Teorema 8.8 dice che possiamo calcolare il limite (8.1.19), "cambiando variabile", ovvero, che si può procedere come segue:

$$\lim_{x\to 0} \arctan\left(\log(|x|)\right) = \lim_{y\to -\infty} \arctan y = -\lim_{t\to +\infty} \arctan t = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^{+}.$$

Osserviamo che:
nel primo passaggio si è posto $y = \log(|x|)$ e $y \to -\infty$, dove si è usato il fatto che $\log(|x|) \to -\infty$, $x \to 0$, nel secondo passaggio si è posto $t = -y$ e $t \to +\infty$, dove si è usato il fatto che $-y \to +\infty$, $y \to -\infty$, e anche il fatto che $\arctan(\cdot)$ è dispari. ■

8.2. **Funzioni continue. Punti di discontinuità.**

Definizione[DEFINIZIONE DI FUNZIONE CONTINUA]
Sia $f : X \mapsto \mathbb{R}$ *e* $x_0 \in X$*. Si dice che* f *è* **continua** *in* x_0 *se*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Per meglio comprendere il concetto di continuità , riprendiamo l' esempio di cui all' Osservazione 4 del §8.1. Sia quindi

$$f_\alpha(x) := \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0, \end{cases} \tag{8.2.1}$$

per un arbitrario valore $\alpha \in \mathbb{R}$. Quindi $f_\alpha(0) = \alpha$, e si è detto che $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, indipendentemente dal valore assegnato ad α. In particolare, dalla definizione di limite, si ha:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0\ :\ |f_\alpha(x)| < \varepsilon,\ \forall\ x \in (-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon) \setminus \{0\}. \tag{8.2.2}$$

Dato che $f(x) = x^2$, $x \neq 0$, la (8.2.2) è equivalente a

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0\ :\ |x^2| < \varepsilon,\ \forall\ x \in (-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon) \setminus \{0\}. \tag{8.2.3}$$

Ci si può chiedere a questo punto:

Esiste un valore di α, tale che la (8.2.2) valga anche **senza escludere** $x_0 = 0$ da $(-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon)$?

Ovvero, ci domandiamo se esiste un valore di α tale che valga

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0\ :\ |f_\alpha(x)| < \varepsilon,\ \forall\ x \in (-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon). \tag{8.2.4}$$

È chiaro che la (8.2.4) è molto più forte della (8.2.2) che non coinvolge in alcun modo, come già osservato nel §8.1, il punto x_0 e il valore α. Infatti, possiamo osservare che la (8.2.4) in questo caso assume la forma

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0\ :\ \begin{cases} |x^2| < \varepsilon, & \forall\ x \in (-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon) \setminus \{0\} \\ |f_\alpha(x)| < \varepsilon, & x = 0, \end{cases}$$

ovvero,

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0\ :\ \begin{cases} |x^2| < \varepsilon, & \forall\ x \in (-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon) \setminus \{0\} \\ |\alpha| < \varepsilon. \end{cases} \tag{8.2.5}$$

Il lettore si può convincere facilmente che **se** $\alpha \neq 0$ **è impossibile verificare la (8.2.5)**, perché dato $\alpha \neq 0$, scegliendo $\varepsilon = \frac{|\alpha|}{2}$, si ha sempre $|\alpha| > \varepsilon$. Se ne deduce in particolare che esiste un unico valore di α tale che vale la (8.2.4) che altro non è che il valore del limite di f_α per $x \to 0$, cioè $\alpha = 0$. In altri termini la (8.2.4) è verificata se solo se

$$\alpha = f_\alpha(0) = \lim_{x\to 0} f_\alpha(x).$$

A ben vedere questa è la definizione di conituità di f_α in $x_0 = 0$.
In particolare si ha il seguente:

TEOREMA 8.9[CARATTERIZZAZIONE EQUIVALENTE DI CONTINUITÀ]
Sia $f : X \mapsto \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$. f è **continua** *in x_0 se e solo se*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0\ :\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,\ \forall\ x \in \{(x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \cap X\} \tag{8.2.6}$$

Dimostrazione.[Facoltativa] La dimostrazione di questo Teorema è una semplice conseguenza della caratterizzazione del limite di funzione per intorni e della definizione di continuità. ■

Si osservi la differenza della (8.2.6) con la seconda delle (8.1.7). In questo caso non solo x_0 non è escluso da $\{(x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \cap X\}$, come osservato sopra, ma la richiesta è che, per ogni $\varepsilon > 0$, $f(x)$ sia contenuta in un intervallo centrato intorno a $f(x_0)$ di ampiezza 2ε, definitivamente per $x \to x_0$.

Esempio. È chiaro da quanto detto che se

$$f_\alpha(x) := \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0, \end{cases} \tag{8.2.7}$$

e se $\alpha \neq 0$, allora f_α non è continua in $x_0 = 0$.

Esempi. Si può dimostrare che, $\forall\, \alpha > 0$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\forall\, a > 0$, $a \neq 1$ sono continue in ogni punto del loro dominio naturale di definizione le funzioni:

$$\log_a(x),\ x^k,\ |x|^\alpha,\ a^x,\ \sin(x),\ \cos(x),\ \tan(x),\ \arctan(x).$$

Per quello che riguarda le funzioni di tipo potenza, logaritmo e le funzioni esponenziali, questo risultato è una diretta conseguenza del Teorema 8.4.

TEOREMA 8.10[CARATTERIZZAZIONE DELLA CONTINUITÀ CON LIMITI SINISTRO E DESTRO]
Sia $f : X \mapsto \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$. f è **continua** *in x_0 se e solo se*

$$\lim_{x\to x_0^\pm} f(x) = f(x_0).$$

Dimostrazione.[Facoltativa] La dimostrazione di questo Teorema è una semplice conseguenza della caratterizzazione del limite di funzione tramite i limiti sinistro e destro e della definizione di continuità .
■

Esempio. Sia

$$f(x) = \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0 & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

È chiaro che

$$\lim_{x\to 0^\pm} \mathrm{sgn}(x) = \pm 1,$$

e quindi il limite per $x \to 0$ di $\mathrm{sgn}(x)$ non esiste.

Una prima applicazione della nozione di continuità è data dal seguente Teorema che, sotto l' ipotesi (molto più onerosa) di continuità per f, permette di migliorare il Teorema 8.8:

TEOREMA 8.11
Siano $f : Y \mapsto \mathbb{R}$, $g : X \mapsto \mathbb{R}$, $Im(g) \subseteq Y$, $y_0 \in Y$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Se

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0,$$

e se f è continua in y_0, allora si ha

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(y_0). \tag{8.2.8}$$

Dimostrazione.[Facoltativa]
Dato che f è continua in y_0, si ha $f(y) \to f(y_0)$ per $y \to y_0$. Se $g(x) \neq y_0$ definitivamente per $x \to x_0$, la tesi segue dal Teorema 8.8. Se $g(a_n) = y_0$ per qualche $a_n \to x_0$ tale che $a_n \neq x_0$ definitivamente, si ha $f(g(a_n)) = f(y_0)$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ e quindi in particolare

$$\lim_{n\to+\infty} f(g(a_n)) = f(y_0).$$

Se ne deduce che $f(g(a_n)) \to f(y_0)$ per ogni $a_n \to x_0$ tale che $a_n \neq x_0$ definitivamente, ovvero che $f(g(x)) \to f(y_0)$ per $x \to x_0$. ■

Osservazione
L' ipotesi $g(x) \neq y_0$ definitivamente per $x \to x_0$ non è più necessaria, perché si è fatta l'ipotesi di continuità di f. In particolare, se $g(x) = y_0$ si ha $f(g(x)) = f(y_0)$ e la continuità di f garantisce che il limite di f per $x \to x_0$ sia proprio $f(x_0)$. Si può verificare facilmente tramite il Teorema 8.10 che la funzione f di cui alla Osservazione seguente il Teorema 8.8 **non è continua** in $y_0 = 5$ e quindi il Teorema 8.11 non si può applicare in quel caso. □

Osservazione
Una lettura lievemente diversa del Teorema 8.11 si può dare osservando che la (8.2.8) è equivalente a

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x\to x_0} g(x)). \tag{8.2.9}$$

Notare anche in questo caso la radicale differenza con il Teorema 8.8 dove in generale non è possibile operare questa "semplificazione" dato che f può essere anche **non definita** in $y_0 = \lim_{x\to x_0} g(x)$. $\square$

Esercizio.

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x + x^2}{4x + \log(x)} = \frac{e+1}{4}.$$

Usando la continuità delle funzioni a numeratore e denominatore e il Teorema 8.3 si ha

$$\frac{e^x + x^2}{4x + \log(x)} \longrightarrow \frac{e^1 + (1)^2}{4 + \log(1)} = \frac{e+1}{4},\ x \to 1.$$

Esercizio.

$$\lim_{x\to 1} \log\sqrt{\frac{e^x + x^2}{4x + \log(x)}} = \log\sqrt{\frac{e+1}{4}}.$$

Usando l' esercizio precedente e il Teorema 8.11 si ha

$$\lim_{x\to 1} \log\sqrt{\frac{e^x + x^2}{4x + \log(x)}} = \lim_{y\to \frac{e+1}{4}} \log\sqrt{y} = \log\sqrt{\frac{e+1}{4}}.$$

Esercizio. Siano $k \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{N}$. Si ha

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^k - 1}{x^m - 1} = \frac{k}{m}.$$

Infatti,

$$\frac{x^k - 1}{x^m - 1} = \left(\frac{x-1}{x-1}\right) \frac{1 + x + x^+ \cdots + x^{k-1}}{1 + x + x^2 + \cdots x^{m-1}} \longrightarrow \frac{\overbrace{1 + 1 + \cdots + 1}^{k-\text{volte}}}{\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{m-\text{volte}}} = \frac{k}{m},\ x \to 1,$$

dove si è usata la continuità delle funzioni a numeratore e denominatore e il Teorema 8.3. $\blacksquare$

Esercizio. Questo esercizio è più delicato.

$$\lim_{x\to -\infty} \log\left[1 + \arctan\left(\frac{e^{\sqrt{|x|}} + 1}{x^4 + x^2 + 1}\right)\right]$$

Si osserva innanzitutto che, dal Teorema 8.8,

$$\lim_{x\to -\infty} e^{\sqrt{|x|}} = \lim_{y\to +\infty} e^y = +\infty, \text{ e } \lim_{x\to -\infty} e^{-(\sqrt{|x|})} = \lim_{y\to -\infty} e^y = 0.$$

Dato che, per ogni $\alpha > 0$, si ha

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^y}{y^\alpha} = +\infty,$$

otteniamo dal Teorema 8.8 che

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{e^{\sqrt{|x|}}}{x^4} = \lim_{y\to +\infty} \frac{e^y}{y^8} = +\infty,$$

e quindi che

$$\frac{e^{\sqrt{|x|}} + 1}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{e^{\sqrt{|x|}}}{x^4} \cdot \frac{1 + e^{-(\sqrt{|x|})}}{1 + x^{-2} + x^{-4}} \to +\infty \cdot \left(\frac{1+0}{1+0+0}\right) = +\infty,\ x \to -\infty.$$

A questo punto possiamo concludere che, usando prima il Teorema 8.8 e poi il Teorema 8.11,

$$\lim_{x\to-\infty} \log\left[1+\arctan\left(\frac{e^{\sqrt{|x|}}+1}{x^4+x^2+1}\right)\right] = \lim_{y\to+\infty} \log\left[1+\arctan(y)\right] =$$

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \log\left[1+t\right] = \lim_{s\to 1+\frac{\pi}{2}} \log\left[s\right] = \log\left(1+\frac{\pi}{2}\right).$$

■

ESERCIZI: Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-x}+x, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^x 3^{x^x}-5^{x^x}}{[x^x]^4}.$$

Definizione
Se $f: X \mapsto \mathbb{R}$ è continua per ogni $x \in X$ si dice che f **è continua in** X.

Esempi. Si può dimostrare che, $\forall\, \alpha > 0$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\forall\, a > 0$, $a \neq 1$ sono continue nel loro dominio naturale di definizione le funzioni:

$$\log_a(x),\ x^k,\ |x|^\alpha,\ a^x,\ \sin(x),\ \cos(x),\ \tan(x),\ \arctan(x).$$

Per quello che riguarda le funzioni di tipo potenza, logaritmo e le funzioni esponenziali, questo risultato è una diretta conseguenza del Teorema 8.4.

In generale, per lo studio della continuità di una data funzione, si ha il seguente:

TEOREMA
(i) Siano $f: X \mapsto \mathbb{R}$, $g: X \mapsto \mathbb{R}$.
Se f e g sono continue in X, allora $f \pm g$ e $f \cdot g$ sono continue in X.
Se $x_0 \in X$ e $g(x_0) \neq 0$ allora $\frac{f}{g}$ è continua in x_0.

(ii) Siano $f: Y \mapsto \mathbb{R}$, $g: X \to \mathbb{R}$, $Im(g) \subseteq Y$, $x_0 \in X$.
Se $g(x_0) = y_0$, se g è continua in x_0 e se f è continua in y_0, allora la funzione composta $f \circ g = f(g(x))$ è continua in x_0.

Dimostrazione. La dimostrazione di questo Teorema è una immediata conseguenza dei Teoremi 8.3, 8.11 e della definizione di continuità.

Osservazione
Segue in particolare dal Teorema che se g è continua in X e f è continua in X allora $\frac{f}{g}$ è continua in $X \setminus \{Z_g\}$, dove Z_g è l' insieme in cui si annulla g. Se $Z_g = \emptyset$ allora $\frac{f}{g}$ è continua in X.
Segue inoltre dal Teorema (con le notazioni del punto (ii)) che se g è continua in X, $Im(g) \subseteq Y$ e f è continua in Y, allora $f \circ g$ è continua in X. □

Esempio. Segue dal Teorema che la funzione

$$f(x) = \log\left[1+\arctan\left(\frac{e^{\sqrt{|x|}}+1}{x^4+x^2+1}\right)\right]$$

è continua nel suo insieme di definizione. Notare che non si asserisce qui nulla circa l' insieme di definizione di f, ma si dice solo che f è continua in tutto il suo insieme di definizione. Determinare per esercizio l' insieme di definizione di f.

Definizione
Se $\tilde{f} : (x_0, b) \mapsto \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$ *e se* $\lim_{x \to x_0^+} \tilde{f}(x) = y_0$, *allora la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \tilde{f}(x), & x \in (x_0, b) \\ y_0, & x = x_0, \end{cases}$$

si dice **continua da destra in** x_0.
Se $\tilde{f} : (a, x_0) \mapsto \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$ *e se* $\lim_{x \to x_0^-} \tilde{f}(x) = y_0$, *allora la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \tilde{f}(x), & x \in (a, x_0) \\ y_0, & x = x_0, \end{cases}$$

si dice **continua da sinistra in** x_0.

Esempio. La funzione parte intera di x, che si indica con $[x]$, definita da

$$[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} \, : \, n \leq x\}, \; x \in \mathbb{R},$$

è continua da destra in $x_n = n$, $\forall \, n \in \mathbb{Z}$, ma non da sinistra. Ci si convince facilmente di questo fatto osservando che

$$[x] = \begin{cases} ...., & ... \\ -1, & -1 \leq x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 2 \\ ...., & ... \end{cases}$$

TEOREMA
Se $\tilde{f} : (a, b) \setminus \{x_0\} \mapsto \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$, *se* f *è continua in* $(a, b) \setminus \{x_0\}$ *e se* $\lim_{x \to x_0^\pm} \tilde{f}(x) = y_0$, *allora la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \tilde{f}(x), & x \in (a, b) \setminus \{x_0\} \\ y_0, & x = x_0, \end{cases}$$

è continua in (a, b).

Dimostrazione. La dimostrazione di questo Teorema è una immediata conseguenza della caratterizzazione del limite di funzione tramite i limiti sinistro e destro e della definizione di continuità. ■

Il procedimento illustrato dal Teorema, grazie al quale si definisce una funzione $\tilde{f}$ in un punto nel quale $\tilde{f}$ non era inizialmente definita si chiama anche **estensione per continuità**.

Esempio. La funzione

$$\tilde{f}(x) := x^2, \; x \neq 0,$$

si può estendere per continuità alla funzione $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. La funzione $\operatorname{sgn}(x)$ non si può estendere per continuità in $x_0 = 0$ perché $\lim_{x \to 0^\pm} \operatorname{sgn}(x) = \pm 1$. La funzione $\frac{1}{x^2}$ non si può estendere per continuità in $x_0 = 0$ perché $\lim_{x \to 0^\pm} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Più in generale si ha la seguente classificazione dei punti di discontinuità per una funzione $f : X \mapsto \mathbb{R}$, con $x_0 \in X$:

(i) Se esiste finito il limite di $f(x)$, $x \to x_0$, e risulta

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0),$$

si dice che f ha una **discontinuità eliminabile** in x_0. In questo caso se

$$y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x),$$

allora la funzione

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x), & x \in X \setminus \{x_0\} \\ y_0, & x = x_0, \end{cases}$$

è continua in x_0.

(ii) Se esistono finiti i limiti sinistro e destro di $f(x)$, $x \to x_0^{\pm}$, e risulta

$$\ell_+ = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_-,$$

si dice che f ha una **discontinuità di prima specie** in x_0. In questo caso la quantità $\ell_+ - \ell_-$ si dice **salto** di f in x_0. Per esempio se $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$, allora il salto di f in $x_0 = 0$ è $\ell_+ - \ell_- = 1 - (-1) = 2$.

(iii) Se almeno uno dei limiti sinistro o destro non esiste o è infinito si dice che f ha una **discontinuità di seconda specie** in x_0. Si include in questa fattispecie anche il caso in cui almeno uno dei limiti sinistro o destro non esiste o è infinito e la funzione è definita in $X \setminus \{x_0\}$. In questo modo le funzioni $f(x) = \log(x),\ x > 0$ e $f(x) = \sin(x^{-1}),\ x \neq 0$ hanno una discontinuità di seconda specie in $x_0 = 0$.

Osservazione
In alcuni testi le discontinuità di seconda specie sono definite come quelle in cui almeno uno dei limiti sinistro o destro è infinito, mentre quelle in cui almeno uno dei limiti sinistro o destro non esiste sono dette di terza specie. □

ESERCIZI: Per le seguenti funzioni determinare il dominio naturale e calcolare i limiti possibili corrispondenti a tutti gli estremi del dominio determinato. Dire poi se e in quali punti le funzioni date si possono estendere per continuità.

$$\arctan(\log(|x|)),\ \log(|\cos x|),\ e^{\frac{1}{x}},\ e^{-\frac{1}{|x|}},\ e^{\frac{1}{|x|-4}},$$
$$\frac{|x|}{|x|-1},\ \log\left(\left|\frac{|x|}{|x|-1}\right|\right),\ \arctan\left|\frac{|x|}{|x|-1}\right|.$$