

LEZIONI 09-10-11-12-13

CONTENTS

7.	LIMITI DI SUCCESSIONI NUMERICHE.	34
7.1.	Successioni convergenti, divergenti, irregolari.	34
7.2.	Calcolo dei limiti di successioni e Forme Indeterminate.	39
7.3.	Soluzione di alcuni limiti che danno luogo a forme indeterminate.	43
7.4.	Teoremi di Confronto.	49
7.5.	Successioni Monotone.	54
7.6.	Altri limiti di successioni e soluzione di altre forme indeterminate.	56

[B] Dispense a cura del docente.

7. LIMITI DI SUCCESSIONI NUMERICHE.

7.1. Successioni convergenti, divergenti, irregolari.

Definizione

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $\mathcal{P}_n$ una proprietà. Si dice che $\mathcal{P}_n$ vale **definitivamente** in n , se

$$\exists \nu \in \mathbb{N} : \mathcal{P}_n \text{ è vera } \quad \forall n > \nu.$$

Esempio. Siano $b_n = -3^n + (100 - n)$, e $a_n = -3^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Sia $\mathcal{P}_n$ la proprietà definita come segue

$$\mathcal{P}_n = "b_n \leq a_n".$$

È chiaro che $\mathcal{P}_n$ è falsa per ogni $n \leq 99$. Tuttavia, se definiamo $\nu = 100$, concludiamo che $\mathcal{P}_n$ è vera per ogni $n \geq \nu$. Quindi $\mathcal{P}_n$ vale definitivamente in n . Si dice anche che b_n è **definitivamente** minore o uguale ad a_n , e si scrive

$$b_n \leq a_n, \text{ definitivamente in } n.$$

Definizione[LIMITE (FINITO) DI UNA SUCCESSIONE NUMERICA/SUCCESSIONI CONVERGENTI]

Sia a_n una successione numerica e $L \in \mathbb{R}$. Si dice che

$$"a_n \text{ tende a } L \text{ per } n \text{ che tende a } +\infty",$$

e si scrive

$$a_n \rightarrow L, \quad n \rightarrow +\infty,$$

o, equivalentemente si dice che

$$"il \text{ limite di } a_n \text{ per } n \text{ che tende a } +\infty \text{ è } L",$$

e si scrive

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L,$$

se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} : |a_n - L| < \varepsilon, \quad \forall n > \nu_\varepsilon, \quad (7.1.1)$$

ovvero se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |a_n - L| < \varepsilon, \text{ definitivamente in } n.$$

Osservazione

In particolare, se per qualche $L \in \mathbb{R}$ vale la (7.1.1), si dice anche che a_n **ha limite finito** o che **ammette limite finito**. Le successioni numeriche che ammettono limite finito si dicono **convergenti** in $\mathbb{R}$. $\square$

Osservazione

È fondamentale tenere presente che la proprietà espressa nella (7.1.1) è molto forte perché si richiede che l'esistenza di $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che valga $|a_n - L| < \varepsilon$ deve essere verificata PER OGNI $\varepsilon > 0$. In altri termini, PER OGNI $\varepsilon > 0$, si deve avere $|a_n - L| < \varepsilon$ definitivamente in n . $\square$

Osservazione

La notazione $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ serve a sottolineare che il numero ν_ε in questione dipende da ε , ovvero che al variare di ε anche ν_ε varia. La difficoltà nel verificare la (7.1.1) consiste esattamente nel far vedere che tale numero esiste, ovvero nel far vedere che la disequazione $|a_n - L| < \varepsilon$ si può risolvere senza aggiungere restrizioni su ε diverse da $\varepsilon > 0$. $\square$

Osservazione 1.

Osserviamo che l'insieme $I = \{x \in \mathbb{R} : |x - L| < \varepsilon\}$, altro non è che l'intervallo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, cioè l'intervallo aperto, centrato in L , di ampiezza 2ε . Quindi la (7.1.1) richiede che, comunque fissato un intervallo I centrato in L , esista un numero intero $\nu_I \in \mathbb{N}$ (che dipende da I), tale che tutti i valori assunti dalla successione a_n con indice maggiore di ν_I siano contenuti in I . In altri termini, comunque fissato un intervallo I centrato in L , i valori assunti dalla successione a_n devono trovarsi in I , definitivamente in n . $\square$

Esempio 1. $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$. Verifichiamo che in questo caso a_n tende a $L = 0$. Si tratta quindi di far vedere che

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} : |a_n| < \varepsilon, \quad \forall n > \nu_\varepsilon.$$

Fissato quindi $\varepsilon > 0$ arbitrariamente, si tratta di far vedere che esiste $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left| \frac{(-1)^n}{n+1} \right| < \varepsilon, \quad \forall n > \nu_\varepsilon.$$

D'altra parte $\left| \frac{(-1)^n}{n+1} \right| = \left| \frac{1}{n+1} \right|$ e quindi

$$\left| \frac{(-1)^n}{n+1} \right| < \varepsilon \iff \left| \frac{1}{n+1} \right| < \varepsilon \iff -\varepsilon < \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

È chiaro che $-\varepsilon < \frac{1}{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, e quindi rimane solo da far vedere che

$$\exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} : \frac{1}{n+1} < \varepsilon, \quad \forall n > \nu_\varepsilon.$$

A questo punto è sufficiente osservare che

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Quindi, posto $\nu_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right]$, dove $\left[\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right]$ indica la parte intera di $\left[\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right]$, si ha effettivamente

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon, \quad \forall n > \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right].$$

Riassumendo, abbiamo mostrato che, comunque scelto $\varepsilon > 0$, posto

$$\nu_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rceil$$

si ha

$$\left| \frac{(-1)^n}{n+1} \right| < \varepsilon \quad \forall n > \nu_\varepsilon,$$

ovvero $a_n \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$. ■

Esempio 2. $a_n = 3 - \frac{1}{n^2+1}$. Verifichiamo che in questo caso a_n tende a $L = 3$. Si tratta quindi di far vedere che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} : |a_n - 3| < \varepsilon, \quad \forall n > \nu_\varepsilon.$$

Fissato quindi $\varepsilon > 0$ arbitrariamente, si tratta di far vedere che esiste $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left| 3 - \frac{1}{n^2+1} - 3 \right| < \varepsilon, \quad \forall n > \nu_\varepsilon.$$

D' altra parte

$$\left| 3 - \frac{1}{n^2+1} - 3 \right| = \left| \frac{1}{n^2+1} \right| < \varepsilon \iff -\varepsilon < \frac{1}{n^2+1} < \varepsilon$$

È chiaro che $-\varepsilon < \frac{1}{n^2+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, e quindi rimane solo da far vedere che

$$\exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} : \frac{1}{n^2+1} < \varepsilon, \quad \forall n > \nu_\varepsilon.$$

A questo punto è sufficiente osservare che,

$$\frac{1}{n^2+1} < \varepsilon \iff n^2 > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Se $\varepsilon > 1$, è chiaro che $n^2 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ è sempre verificata. Viceversa, se $\varepsilon \leq 1$, dato che $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\frac{1}{n^2+1} < \varepsilon \iff n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}.$$

Quindi, posto $\nu_\varepsilon = \left\lceil \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1} \right\rceil$, dove $\left\lceil \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1} \right\rceil$ indica la parte intera di $\left\lceil \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1} \right\rceil$, si ha effettivamente

$$\frac{1}{n^2+1} < \varepsilon, \quad \forall n > \left\lceil \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1} \right\rceil.$$

Riassumendo, abbiamo mostrato che, comunque scelto $\varepsilon > 0$, posto

$$\nu_\varepsilon = \left\lceil \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1} \right\rceil$$

si ha

$$\left| 3 - \frac{1}{n^2+1} - 3 \right| < \varepsilon, \quad \forall n > \nu_\varepsilon,$$

ovvero $a_n \rightarrow 3, n \rightarrow +\infty$. ■

Osservazione

Le successioni che hanno limite $L = 0$ si dicono **infinitesime**. Ragionando come negli Esempi 1 e 2, si può dimostrare che sono infinitesime le seguenti successioni definite nel loro dominio naturale:

$$a_n = \frac{1}{(\log_a(n^\gamma))^\beta}, \quad a > 1, \quad \beta > 0, \gamma > 0,$$

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

$$a_n = \frac{1}{a^{\beta n^\gamma}}, \quad a > 1, \quad \beta > 0, \quad \gamma > 0.$$

$$a_n = \frac{1}{(n!)^\beta}, \quad \beta > 0,$$

$$a_n = \frac{1}{(n^{\beta n})}, \quad \beta > 0.$$

Definizione[LIMITE (INFINITO) DI UNA SUCCESSIONE NUMERICA/SUCCESSIONI DIVERGENTI]
Sia a_n una successione numerica. Si dice che

" a_n tende a $+\infty(-\infty)$ per n che tende a $+\infty$ ",

e si scrive

$$a_n \rightarrow +\infty(-\infty), \quad n \rightarrow +\infty,$$

o, equivalentemente si dice che

"il limite di a_n per n che tende a $+\infty$ è $+\infty(-\infty)$ ",

e si scrive

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty(-\infty),$$

se

$$\forall M > 0 \quad \exists \nu_M \in \mathbb{N} : a_n > M(a_n < -M), \quad \forall n > \nu_M, \quad (7.1.2)$$

ovvero se

$$\forall M > 0 \quad a_n > M(a_n < -M), \quad \text{definitivamente in } n.$$

Osservazione

In particolare, se vale una delle due condizioni espresse nella (7.1.2), si dice anche che a_n **ha limite infinito** o che **ammette limite infinito**. Le successioni numeriche che tendono a $+\infty$ o a $-\infty$ si dicono **divergenti**. $\square$

Osservazione

È fondamentale tenere presente che la proprietà espressa nella (7.1.2) è molto forte perché si richiede che l'esistenza di $\nu_M \in \mathbb{N}$ tale che valga $a_n > M$ deve essere verificata PER OGNI $M > 0$. In altri termini, PER OGNI $M > 0$, si deve avere $a_n > M$ definitivamente in n . $\square$

Osservazione

La notazione $\nu_M \in \mathbb{N}$ serve a sottolineare che il numero ν_M in questione dipende da M , ovvero che al variare di M anche ν_M varia. La difficoltà nel verificare la (7.1.2) consiste esattamente nel far vedere che tale numero esiste, ovvero nel far vedere che la disequazione $a_n > M$ si può risolvere senza aggiungere restrizioni su M diverse da $M > 0$. $\square$

Osservazione 2.

Osserviamo che l'insieme $I = \{x \in \mathbb{R} : x > M\}$, altro non è che l'intervallo $(M, +\infty)$. Quindi la (7.1.2) richiede che, comunque fissato un intervallo del tipo $I = (M, +\infty)$, esista un numero intero $\nu_I \in \mathbb{N}$ (che dipende da I), tale che tutti i valori assunti dalla successione a_n con indice maggiore di ν_I siano contenuti in I . In altri termini, comunque fissato un intervallo del tipo $I = (M, +\infty)$, i valori assunti dalla successione a_n devono trovarsi in I , definitivamente in n . $\square$

Esempio 3. $a_n = -3^n$. Dimostriamo che $a_n \rightarrow -\infty$, $n \rightarrow +\infty$. Si tratta di far vedere che

$$\forall M > 0 \quad \exists \nu_M \in \mathbb{N} : -3^n < -M, \quad \forall n > \nu_M.$$

Sia quindi $M > 0$ fissato arbitrariamente. Si tratta di far vedere che

$$\exists \nu_M \in \mathbb{N} : -3^n < -M, \forall n > \nu_M.$$

D' altra parte

$$-3^n < -M \iff 3^n > M \iff n > \log_3 M.$$

Quindi, posto $\nu_M = [\log_3 M]$, dove $[\log_3 M]$ indica la parte intera di $[\log_3 M]$, si ha effettivamente

$$-3^n < -M, \forall n > [\log_3 M].$$

Riassumendo, abbiamo mostrato che, comunque scelto $M > 0$, posto

$$\nu_M = [\log_3 M],$$

si ha

$$-3^n < -M \forall n > \nu_M,$$

ovvero $a_n \rightarrow -\infty, n \rightarrow +\infty$. ■

Osservazione

Ragionando come nell' Esempio 3, si può dimostrare che ammettono limite $+\infty$ le seguenti successioni definite nel loro dominio naturale:

$$a_n = (\log_a (n^\gamma))^\beta, \quad a > 1, \quad \beta > 0, \quad \gamma > 0,$$

$$a_n = n^\alpha, \quad \alpha > 0,$$

$$a_n = a^{\beta n^\gamma}, \quad a > 1, \quad \beta > 0, \quad \gamma > 0,$$

$$a_n = (n!)^\beta, \quad \beta > 0,$$

$$a_n = n^{\beta n}, \quad \beta > 0.$$

TEOREMA [UNICITÀ DEL LIMITE]

Se a_n ammette limite, finito o infinito, allora il limite è unico.

Dimostrazione.

Consideriamo per semplicità solo il caso in cui a_n è convergente.

Supponiamo per assurdo che $\exists L_1 \in \mathbb{R}$ e che $\exists L_2 \in \mathbb{R}$ tali che $L_1 \neq L_2$ e tali che

$$a_n \rightarrow L_1, \quad n \rightarrow +\infty,$$

e

$$a_n \rightarrow L_2, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Sia $\delta = |L_1 - L_2|$. Dato che sia L_1 che L_2 verificano la (7.1.1), concludiamo che, fissato $\varepsilon = \frac{\delta}{4}$, si ha

$$\exists \nu_1 \in \mathbb{N} : |a_n - L_1| < \frac{\delta}{4}, \forall n > \nu_1,$$

e

$$\exists \nu_2 \in \mathbb{N} : |a_n - L_2| < \frac{\delta}{4}, \forall n > \nu_2.$$

Quindi, concludiamo che se $\nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$, si ha

$$|a_n - L_1| < \frac{\delta}{4} \quad \text{e} \quad |a_n - L_2| < \frac{\delta}{4}, \quad \forall n > \nu.$$

Segue che, fissato un qualunque $k > \nu$, si ha

$$\delta = |L_1 - L_2| = |L_1 - a_k + a_k - L_2| \leq |L_1 - a_k| + |L_2 - a_k| < \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} = \frac{\delta}{2},$$

che è chiaramente impossibile. Dunque l'ipotesi iniziale (a_n ammette limite L_1 e anche L_2) era errata. Concludiamo in particolare che $L_1 = L_2$, ovvero che il limite è unico. ■

Esempio 4. $a_n = (-1)^n$. Verifichiamo che in questo caso a_n non ha limite (finito o infinito) per $n \rightarrow +\infty$. Supponiamo che esista $L \in \mathbb{R}$ che verifica la (7.1.1). Dato che $a_n = 1$ se $n \in 2\mathbb{N}$, deve aversi in particolare

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} : |1 - L| < \varepsilon, \quad \forall n > \nu_\varepsilon. \quad (7.1.3)$$

Ma la quantità $1 - L$ non dipende da n , e quindi la (7.1.3) asserisce più semplicemente che

$$|1 - L| < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

cosa che ovviamente può verificarsi se e solo se $L = 1$. Ma $a_n = -1$ se $n \in 2\mathbb{N} - 1$, e quindi deve anche aversi

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} : |-1 - L| < \varepsilon, \quad \forall n \geq \nu_\varepsilon. \quad (7.1.4)$$

Ma la quantità $-1 - L$ non dipende da n , e quindi la (7.1.4) asserisce più semplicemente che

$$|-1 - L| < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

cosa che ovviamente può verificarsi se e solo se $L = -1$. Concludiamo che a_n ammette due limiti distinti $L_1 = 1$ e $L_2 = -1$, cosa che contraddice il Teorema di unicità del limite. Quindi la nostra ipotesi iniziale (a_n ammette limite finito) era errata. Concludiamo che a_n non ammette limite finito.

D'altra parte $|a_n| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, ovvero $\{a_n\}$ è limitata e quindi non può ammettere neanche limite infinito. ■

Osservazione

In termini più semplici, la dimostrazione dell'Esempio 4, circa il fatto che $a_n = (-1)^n$ non ammette limite, consiste nel rendere rigorosa la seguente osservazione:

Dato che $a_n = 1$, PER OGNI n pari, allora, se a_n ammette limite, deve avere limite 1.

Dato che $a_n = -1$, PER OGNI n dispari, allora, se a_n ammette limite, deve avere limite -1 .

Ciò contraddice chiaramente il Teorema di unicità. □

Le successioni che ammettono limite (finito o infinito) si dicono anche **regolari**. Viceversa, si ha la seguente:

Definizione[SUCCESSIONI IRREGOLARI/OSCILLANTI]

Una successione numerica si dice **irregolare**, o anche **oscillante**, se non ammette limite, ovvero se non è né convergente né divergente.

Esempio. $a_n = (-1)^n$. Come si è visto sopra, a_n non ammette limite (finito o infinito). Quindi è irregolare. ■

7.2. Calcolo dei limiti di successioni e Forme Indeterminate.

Una notazione abbreviata per indicare il limite di una successione è

$$\lim_n a_n.$$

TEOREMA

Ogni successione convergente è limitata.

Dimostrazione.[Facoltativa]

Sia $\ell \in \mathbb{R}$ il limite di a_n . Per ipotesi $\exists \nu \in \mathbb{N} : |a_n - \ell| < 1, \quad \forall n > \nu$. Se ne deduce che

$$|a_n| = |a_n - \ell + \ell| \leq |a_n - \ell| + |\ell| \leq 1 + |\ell|, \quad \forall n > \nu.$$

Dato che l'insieme formato dai primi ν termini della successione è finito e' anche limitato. Sia

$$M = \max_{n \in \{1, \dots, \nu\}} |a_n|.$$

Concludiamo che

$$|a_n| \leq \max\{1 + |\ell|, M\}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

■

TEOREMA [SOMMA, PRODOTTO, RAPPORTO DI LIMITI DI SUCCESSIONI]

Siano a_n e b_n due successioni regolari, ovvero, che ammettono limite (finito o infinito). Allora: se la somma dei limiti non dà luogo alle forme indeterminate $(\pm\infty) + (\mp\infty)$, $(\pm\infty) - (\pm\infty)$ si ha

$$\lim_n (a_n \pm b_n) = \lim_n a_n \pm \lim_n b_n; \quad (7.2.1)$$

se il prodotto dei limiti non dà luogo alle forme indeterminate $0 \cdot (\pm\infty)$, $(\pm\infty) \cdot 0$, si ha

$$\lim_n (a_n \cdot b_n) = (\lim_n a_n) \cdot (\lim_n b_n); \quad (7.2.2)$$

Se inoltre $\lim_n b_n \neq 0$, e il quoziente dei limiti non dà luogo alle forme indeterminate $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{\pm\infty}{\mp\infty}$, si ha

$$\lim_n \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_n a_n}{\lim_n b_n}. \quad (7.2.3)$$

Dimostrazione. Per semplicità illustreremo solo i casi

$$\lim_n a_n = a \in \mathbb{R}, \lim_n b_n = b \in \mathbb{R} \implies \lim_n (a_n + b_n) = a + b, \text{ e } \lim_n (a_n \cdot b_n) = a \cdot b.$$

Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Per la definizione di limite

$$\exists \nu_\varepsilon^{(1)} \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{4}, \forall n > \nu_\varepsilon^{(1)}, \quad \exists \nu_\varepsilon^{(2)} \in \mathbb{N} : |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{4}, \forall n > \nu_\varepsilon^{(2)}. \quad (7.2.4)$$

Scegliendo ora $\nu_\varepsilon = \max\{\nu_\varepsilon^{(1)}, \nu_\varepsilon^{(2)}\}$, concludiamo che entrambe le disuguaglianze nella (7.2.4) sono verificate per $n > \nu_\varepsilon$. Otteniamo allora

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon, \forall n > \nu_\varepsilon,$$

e la (7.2.1) è dimostrata nel caso considerato. Il resto della dimostrazione è da considerarsi facoltativo. Per la (7.2.2) nel caso $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, dato che ogni successione convergente è limitata, sia $M > 0$ tale che

$$|b_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Per la definizione di limite si ha

$$\exists \nu_\varepsilon^{(3)} \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{4(M + |a|)}, \forall n > \nu_\varepsilon^{(3)}, \quad \exists \nu_\varepsilon^{(4)} \in \mathbb{N} : |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{4(M + |a|)}, \forall n > \nu_\varepsilon^{(4)}. \quad (7.2.5)$$

Scegliendo ora $\tilde{\nu}_\varepsilon = \max\{\nu_\varepsilon^{(3)}, \nu_\varepsilon^{(4)}\}$, concludiamo che entrambe le disuguaglianze nella (7.2.5) sono verificate per $n > \tilde{\nu}_\varepsilon$. Otteniamo allora

$$\begin{aligned} |(a_n \cdot b_n) - (a \cdot b)| &\leq |a_n \cdot b_n - a \cdot b_n + a \cdot b_n - a \cdot b| \leq |a_n - a| |b_n| + |a| |b_n - b| \leq \\ &\frac{\varepsilon}{4(M + |a|)} M + |a| \frac{\varepsilon}{4(M + |a|)} < \varepsilon, \forall n > \tilde{\nu}_\varepsilon, \end{aligned}$$

e la (7.2.2) è dimostrata nel caso considerato.

Osserviamo che la dimostrazione della (7.2.2) si sarebbe potuta svolgere senza introdurre gli indici $\nu_\varepsilon^{(3)}$, $\nu_\varepsilon^{(4)}$, $\tilde{\nu}_\varepsilon$. In questo caso infatti, usando gli interi $\nu_\varepsilon^{(1)}$, $\nu_\varepsilon^{(2)}$, ν_ε introdotti nel caso precedente, avremmo ottenuto

$$|(a_n \cdot b_n) - (a \cdot b)| \leq |a_n \cdot b_n - a \cdot b_n + a \cdot b_n - a \cdot b| \leq |a_n - a| |b_n| + |a| |b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{4} M + |a| \frac{\varepsilon}{4} < (M + |a|) \varepsilon, \forall n > \nu_\varepsilon,$$

e la (7.2.2) segue nel caso considerato per l'arbitrarietà di ε . ■

Osservazione

Se $\lim_n b_n = 0$ e il quoziente dei limiti non dà luogo alla forma indeterminata $\frac{0}{0}$, si può solo affermare che

$$\lim_n \left| \frac{a_n}{b_n} \right| = +\infty. \quad (7.2.6)$$

Infatti:

se $b_n = \frac{1}{n}$, si ha $\frac{1}{b_n} = n \rightarrow +\infty$,

se $b_n = \frac{-1}{n}$, si ha $\frac{1}{b_n} = -n \rightarrow -\infty$,

se $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$, si ha $\frac{1}{b_n} = (-1)^n n$ che è irregolare. □

Esercizio. Si vogliono calcolare i limiti,

$$\lim_n (n^2 + 5^n), \quad \lim_n (n^2 \cdot 5^n).$$

Siano $a_n = n^2$ e $b_n = 5^n$. Dato che $a_n \rightarrow +\infty$ e $b_n \rightarrow +\infty$, concludiamo che

$$a_n + b_n \rightarrow (+\infty) + (+\infty) = +\infty,$$

ovvero che

$$\lim_n (n^2 + 5^n) = +\infty,$$

e anche che

$$a_n \cdot b_n \rightarrow (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty,$$

ovvero che

$$\lim_n (n^2 \cdot 5^n) = +\infty. \quad \blacksquare$$

Esercizio. Si vogliono calcolare i limiti,

$$\lim_n \frac{3 + (\log_2 n)^{-5}}{4 + n^{-2}}, \quad \lim_n (3 + (\log_2 n)^{-5}) \cdot (4 + n^{-2}).$$

Siano $a_n = 3 + (\log_3 n)^{-5}$ e $b_n = 4 + n^{-2}$. Dato che $a_n = 3 + \frac{1}{(\log_3 n)^5} \rightarrow 3$ e $b_n = 4 + \frac{1}{n^2} \rightarrow 4$, concludiamo che

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{3}{4},$$

ovvero che

$$\lim_n \frac{3 + (\log_3 n)^{-5}}{4 + n^{-2}} = \frac{3}{4}$$

e anche che

$$a_n \cdot b_n \rightarrow (3) \cdot (4) = 12,$$

ovvero che

$$\lim_n (3 + (\log_3 n)^{-5}) \cdot (4 + n^{-2}) = 12. \quad \blacksquare$$

Esercizio. Si vuole calcolare il limite,

$$\lim_n \frac{n^7 + 2^{-2n} + 1 + n^n}{(\log_4 n)^{-3} + \frac{1}{n!} - 9}.$$

Siano $a_n = n^7 + 2^{-2n} + 1 + n^n$ e $b_n = (\log_4 n)^{-3} + \frac{1}{n!} - 9$. Si calcola il limite del numeratore, e si ottiene,

$$a_n = n^7 + 2^{-2n} + 1 + n^n \longrightarrow (+\infty) + 0 + 1 + (+\infty) = +\infty.$$

Si calcola il limite del denominatore, e si ottiene, e

$$b_n = (\log_4 n)^{-3} + \frac{1}{n!} - 9 \longrightarrow 0 + 0 - 9 = -9.$$

Concludiamo che

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{+\infty}{-9} = -\frac{1}{9} \cdot (+\infty) = -\infty,$$

ovvero che

$$\lim_n \frac{n^7 + 2^{-2n} + 1 + n^n}{(\log_4 n)^{-3} + \frac{1}{n!} - 9} = -\infty.$$

■

ESERCIZI: Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_n \frac{2^{-2n} + \frac{1}{n!}}{5n^n + (\log_4 n)^7 - 3}, \quad \lim_n \frac{5n^n + (\log_4 n)^7 - 3}{2^{-2n} + \frac{1}{n!} + 1},$$

$$\lim_n \frac{(\log_4 n)^{-3} + \frac{1}{n!} - 9}{n^7 + 2^{-2n} + 1 + n^n}, \quad \lim_n \frac{n^7 + 2^{-n} + 1 + n^{4n}}{(\log_8 n)^{-5} + \frac{1}{(n!)^5}},$$

$$\lim_n \left(2^{-2n} + \frac{1}{n!} - (5n^n + (\log_4 n)^7 - 3) \right),$$

$$\lim_n \left(n^7 + 2^{-2n} + 1 + n^n - (\log_4 n)^{-3} + \frac{1}{n!} - 9 \right),$$

$$\lim_n \frac{4 + n^{-2}}{3 + (\log_2 n)^{-5}}, \quad \lim_n (4 + n^{-2} - 3 + (\log_2 n)^{-5}).$$

Esempio. Siano $a_n = n^2$ e $b_n = n$. Dato che $a_n \rightarrow +\infty$ e $b_n \rightarrow +\infty$, concludiamo che il limite $\lim_n \frac{a_n}{b_n}$ dà luogo alla forma indeterminata

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{+\infty}{+\infty}.$$

D'altra parte

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2}{n} = n \rightarrow +\infty.$$

Quindi la forma indeterminata è risolta in questo caso, e abbiamo

$$\lim_n \frac{n^2}{n} = +\infty.$$

Osserviamo che il limite del reciproco, $\lim_n \frac{b_n}{a_n}$, dà luogo alla STESSA forma indeterminata $\frac{+\infty}{+\infty}$, ma

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \rightarrow \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Quindi la forma indeterminata è risolta in questo caso, e abbiamo

$$\lim_n \frac{n}{n^2} = 0.$$

Se poi consideriamo $c_n = n^2 + 1$, osserviamo che il limite $\lim_n \frac{c_n}{a_n}$, dà luogo alla STESSA forma indeterminata $\frac{+\infty}{+\infty}$, ma

$$\frac{c_n}{a_n} = \frac{n^2 + 1}{n^2} = 1 + \frac{1}{n^2} \rightarrow 1 + 0 = 1.$$

Quindi la forma indeterminata è risolta in questo caso, e abbiamo

$$\lim_n \frac{n^2 + 1}{n^2} = 1.$$



Esempio. Siano $a_n = n^2$ e $b_n = n$. Dato che $a_n \rightarrow +\infty$ e $b_n \rightarrow +\infty$, concludiamo che il limite $\lim_n(a_n - b_n)$ dà luogo alla forma indeterminata

$$a_n - b_n \rightarrow (+\infty) - (+\infty).$$

D'altra parte

$$a_n - b_n = n^2 - n = n(n - 1) \rightarrow (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty.$$

Quindi la forma indeterminata è risolta in questo caso, e abbiamo

$$\lim_n(n^2 - n) = +\infty.$$

Osserviamo che il limite $\lim_n(b_n - a_n)$, dà luogo alla STESSA forma indeterminata $(+\infty) - (+\infty)$, ma

$$b_n - a_n = n - n^2 = n(1 - n) \rightarrow (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty.$$

Quindi la forma indeterminata è risolta in questo caso, e abbiamo

$$\lim_n(n - n^2) = -\infty.$$

Se poi consideriamo $c_n = n^2 + 1$, osserviamo che il limite $\lim_n(c_n - a_n)$, dà luogo alla STESSA forma indeterminata $(+\infty) - (+\infty)$, ma

$$c_n - a_n = n^2 + 1 - n^2 = 1 \rightarrow 1.$$

Quindi la forma indeterminata è risolta in questo caso, e abbiamo

$$\lim_n(n^2 + 1 - n^2) = 1.$$

Concludendo, osserviamo che se $d_n = n^2 + (-1)^n$, allora il limite $\lim_n(b_n - a_n)$, dà luogo alla STESSA forma indeterminata $(+\infty) - (+\infty)$, ma

$$d_n - a_n = (-1)^n,$$

e in questo caso il limite non esiste.



Osservazione

Gli ultimi due esempi mostrano che, SE SI PRESENTANO forme indeterminate, **i limiti di a_n e b_n non determinano univocamente il risultato del limite**. Questo fatto è in netto contrasto con il caso in cui NON SI PRESENTANO forme indeterminate, come illustrato dal Teorema precedente. $\square$

7.3. Soluzione di alcuni limiti che danno luogo a forme indeterminate.

Si pone il problema di calcolare i limiti che danno luogo a delle forme indeterminate, ovvero di "risolvere" le forme indeterminate.

Esercizio. Si vuole calcolare il limite,

$$\lim_n(n^5 - 6n).$$

È chiaro che il limite dà luogo alla forma indeterminata $(+\infty) - (+\infty)$. D'altra parte,

$$n^5 - 6n = n^5(1 - 6n^{-4}) \rightarrow (+\infty)(1 - 0) = +\infty.$$

Quindi

$$\lim_n(n^5 - 6n) = +\infty.$$



Esercizio. Si vuole calcolare il limite,

$$\lim_n \frac{n^5 - 6n + 7}{3n^4 + 5n^3}.$$

Dato che $n^5 - 6n = n^5(1 - 6n^{-4}) \rightarrow (+\infty)(1 - 0) = +\infty$, è chiaro che il limite dà luogo alla forma indeterminata $\frac{+\infty}{+\infty}$. Per risolvere il problema, osserviamo che a numeratore la potenza dominante per n "grande" è n^5 , mentre a denominatore è n^4 . Procediamo allora come segue

$$\frac{n^5 - 6n + 7}{3n^4 + 5n^3} = \frac{n^5}{n^4} \frac{1 - 6n^{-4} + 7n^{-5}}{3 + 5n^{-1}} = n \frac{1 - 6n^{-4} + 7n^{-5}}{3 + 5n^{-1}} \rightarrow (+\infty) \frac{1 - 0 + 0}{3 + 0} = (+\infty) \cdot \frac{1}{3} = +\infty.$$

Quindi

$$\lim_n \frac{n^5 - 6n + 7}{3n^4 + 5n^3} = +\infty. \quad \blacksquare$$

Esercizio. Si vuole calcolare il limite,

$$\lim_n \frac{-5n^3 + n + 4}{6n^7 + 5n^2 - 1}.$$

Dato che $-5n^3 + n = n^3(-5 + n^{-2}) \rightarrow (+\infty)(-5 + 0) = -\infty$, è chiaro che il limite dà luogo alla forma indeterminata $\frac{-\infty}{+\infty}$. Per risolvere il problema, osserviamo che a numeratore la potenza dominante per n "grande" è n^3 , mentre a denominatore è n^7 . Procediamo allora come segue

$$\frac{-5n^3 + n + 4}{6n^7 + 5n^2 - 1} = \frac{n^3}{n^7} \frac{-5 + n^{-2} + 4n^{-3}}{6 + 5n^{-5} - n^{-7}} = \frac{1}{n^4} \frac{-5 + n^{-2} + 4n^{-3}}{6 + 5n^{-5} - n^{-7}} \rightarrow \frac{1}{+\infty} \frac{-5 + 0 + 0}{6 + 0 - 0} = 0 \cdot \frac{-5}{6} = 0.$$

Quindi

$$\lim_n \frac{-5n^3 + n + 4}{6n^7 + 5n^2 - 1} = 0. \quad \blacksquare$$

Esercizio. Si vuole calcolare il limite,

$$\lim_n \frac{2n^3 + 8n + 1}{7n^3 + 5n^2}.$$

È chiaro che il limite dà luogo alla forma indeterminata $\frac{+\infty}{+\infty}$. Per risolvere il problema, osserviamo che a numeratore il termine dominante per n "grande" è n^3 , e a denominatore è n^3 . Procediamo allora come segue

$$\frac{2n^3 + 8n + 1}{7n^3 + 5n^2} = \frac{n^3}{n^3} \frac{2 + 8n^{-1} + n^{-3}}{7 + 5n^{-1}} = 1 \cdot \frac{2 + 8n^{-1} + n^{-3}}{7 + 5n^{-1}} \rightarrow 1 \cdot \frac{2 + 0 + 0}{7 + 0} = \frac{2}{7}.$$

Quindi

$$\lim_n \frac{2n^3 + 8n + 1}{7n^3 + 5n^2} = \frac{2}{7}. \quad \blacksquare$$

ESERCIZI: Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_n \frac{4n^3 - n^{\frac{7}{2}}}{1 - \sqrt{n}}, \quad \lim_n \frac{n^{\frac{5}{3}} - n + 1}{n - n^2 + 1}, \quad \lim_n \frac{n^{\frac{1}{10}} - n^2 + 1}{n^{\frac{8}{5}} + 2\sqrt{n} - 1},$$

$$\lim_n \frac{4n^3 - n^{-\frac{7}{2}} + (n!)^{-1}}{-2^{-3n} + \sqrt[3]{n} + 1}, \quad \lim_n \frac{n^{\frac{5}{3}} - (\log_2 n)^{-\frac{1}{4}} + 5n}{n^{-n} - n^2}, \quad \lim_n \frac{n^{\frac{8}{5}} + 2\sqrt{n} - 1}{n^{\frac{1}{10}} - n^2 + 1}.$$

Quanto visto fino ad ora non ci permette di risolvere, per esempio, forme indeterminate $(+\infty) - (+\infty)$, del tipo

$$\lim_n (3^n - n^4), \quad \lim_n (n^n - n!), \quad \lim_n (n^2 - \log_2 n),$$

o anche forme indeterminate $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, del tipo

$$\lim_n \frac{3^n + n^4}{n^n + n!},$$

$$\lim_n \frac{2^{2n} + n! + n^4}{5n^n + (\log_4 n)^7 - 6^n + n}.$$

Per "risolvere" queste forme indeterminate, ragionando come negli esempi precedenti, vediamo che è necessario determinare quale sia per n "grande" il termine dominante. Il problema si risolve facendo uso del seguente risultato.

TEOREMA

Per ogni $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ e per ogni $a > 1$, si ha

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\log_a (n^\gamma))^\beta}{n^\alpha} &= 0, & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{(\log_a (n^\gamma))^\beta} &= +\infty; \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{a^{\beta n^\gamma}} &= 0, & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^{\beta n^\gamma}}{n^\alpha} &= +\infty; \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^{\beta n}}{(n!)^\alpha} &= 0, & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n!)^\alpha}{a^{\beta n}} &= +\infty; \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^{\beta n}}{n^{\alpha n}} &= 0, & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\alpha n}}{a^{\beta n}} &= +\infty; \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} &= 0, & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!} &= +\infty; \end{aligned}$$

Osservare che se $\alpha > 0$ e $\beta < 0$ o se $\alpha < 0$ e $\beta > 0$ o se (escludendo il caso dei logaritmi) $\alpha > 0$, $\beta > 0$ e $0 < a < 1$, i limiti considerati non danno luogo a forme indeterminate. Si suggerisce di verificare il valore dei limiti dati in questi casi particolari.

Prima di passare alla dimostrazione di questo Teorema, introduciamo una notazione di uso comune per i limiti di successioni.

Se $a_n \rightarrow +\infty$, $b_n \rightarrow +\infty$ e se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

si dice che " a_n è un o -piccolo di b_n per $n \rightarrow +\infty$ " e si scrive $a_n = o(b_n)$. Si dice anche che " b_n è un infinito di ordine superiore a a_n per $n \rightarrow +\infty$ ".

Se $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 0$ e se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

si dice che " a_n è un o -piccolo di b_n per $n \rightarrow +\infty$ " e si scrive $a_n = o(b_n)$. Si dice anche che " a_n è un infinitesimo di ordine superiore a b_n per $n \rightarrow +\infty$ ". Con queste notazioni si ha per esempio

$$a_n = n^2, \quad b_n = 3^n \implies a_n = o(b_n),$$

$$a_n = 3^{-n}, \quad b_n = \frac{1}{n^2} \implies a_n = o(b_n).$$

Dimostrazione.

Osserviamo innanzitutto che è sufficiente dimostrare la tesi solo per uno dei limiti di cui sopra per

ogni data riga. La dimostrazione si conclude infatti applicando la (7.2.3) al reciproco delle frazioni che compaiono nei limiti. Per esempio se è noto che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty,$$

allora dalla (7.2.3) concludiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^n}{n!} \right)^{-1} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Dimostreremo innanzitutto che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^{\beta n^\gamma}}{n^\alpha} = +\infty, \quad (7.3.1)$$

limitandoci per ora al caso $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1$. Per la dimostrazione del caso $\alpha \neq 1, \beta \neq 1, \gamma \neq 1$ (da ritenersi facoltativa) rimandiamo alla fine del paragrafo 7.6.

Iniziamo dunque il caso $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1$, ovvero dimostriamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n} = +\infty. \quad (7.3.2)$$

Si tratta di far vedere che

$$\forall M > 0 \quad \exists \nu_M \in \mathbb{N} : \frac{a^n}{n} > M \quad \forall n > \nu_M. \quad (7.3.3)$$

Usiamo la (6.4.4) in [B] §6.4, ovvero

$$a^n > \frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2, \quad \forall a > 1, \forall n \geq 2. \quad (7.3.4)$$

Si ha allora:

$$\forall M > 0, \quad \frac{a^n}{n} > (n-1) \frac{(a-1)^2}{2} > M, \quad \forall n > \nu_{M,a}, \quad (7.3.5)$$

se $\nu_{M,a}$ è definito da

$$\nu_{M,a} = \left[\frac{2}{(a-1)^2} M + 1 \right] + 1.$$

La (7.3.3) è dimostrata.

Dimostriamo ora che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{(\log_a(n^\beta))^\gamma} = +\infty, \quad (7.3.6)$$

limitandoci per ora al caso $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1$. Per la dimostrazione del caso $\alpha \neq 1, \beta \neq 1, \gamma \neq 1$ (da ritenersi facoltativa) rimandiamo alla fine del paragrafo 7.6.

Si tratta di far vedere che

$$\forall M > 0, \quad \exists \nu_M \in \mathbb{N} : \frac{n}{(\log_a(n))} > M, \quad \forall n > \nu_M.$$

Osserviamo che per ogni $n \geq 2$

$$\frac{n}{(\log_a(n))} > M \iff n > M(\log_a(n)) \iff a^n > a^{M \log_a(n)} \iff a^n > n^M \iff \frac{a^n}{n^M} > 1.$$

Usando la (7.3.1) concludiamo che, per ogni $M > 0$ fissato, $n > M(\log_a(n))$ è verificata per ogni n sufficientemente grande. La (7.3.6) è dimostrata.

Dimostriamo [Facoltativo] che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n!)^\alpha}{a^{\beta n}} = +\infty. \quad (7.3.7)$$

Iniziamo con il caso $a > 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$. Per la dimostrazione del caso $\alpha \neq 1, \beta \neq 1$ (da ritenersi facoltativa) rimandiamo alla fine del paragrafo 7.6.

Dimostriamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty. \quad (7.3.8)$$

Sia $a > 1$ fissato e $k_a \in \mathbb{N} : k_a \geq 2a + 1$. Per ogni $n > 2k_a$ e per ogni $j \in \{1, 2, \dots, n - (k_a + 1)\}$ si ha

$$n - j \geq n - (n - (k_a + 1)) = k_a + 1 > 2a.$$

Se ne deduce che per ogni $n > 2k_a$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{n!}{a^n} &= \frac{n}{a} \frac{n-1}{a} \frac{n-2}{a} \dots \frac{k_a}{a} \frac{k_a-1}{a} \dots \frac{2}{a} \frac{1}{a} \geq \underbrace{\frac{2a}{a} \frac{2a}{a} \frac{2a}{a} \dots \frac{k_a}{a} \frac{k_a-1}{a} \dots \frac{2}{a} \frac{1}{a}}_{n-k_a \text{ volte}} = \\ &2^{n-k_a} \frac{k_a!}{a^{k_a}} = C_a 2^n, \quad \text{dove} \quad C_a = \frac{k_a!}{(2a)^{k_a}}. \end{aligned}$$

Dato che C_a non dipende da n ma solo da a , concludiamo che

$$\forall M > 0, \quad \frac{n!}{a^n} \geq C_a 2^n > M, \quad \forall n > \nu_M,$$

se ν_M è definito da

$$\nu_M = \max \left\{ 2k_a, \left\lceil \log_2 \left(\frac{M}{C_a} \right) \right\rceil \right\}.$$

La (7.3.8) segue allora dalla definizione di limite.

Dimostriamo [Facoltativo] che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\alpha n}}{a^{\beta n}} = +\infty. \quad (7.3.9)$$

La dimostrazione in questo caso è conseguenza del fatto che per ogni $\alpha > 0, \beta > 0, a > 1$ si ha

$$\frac{n^{\alpha n}}{a^{\beta n}} = \left(\frac{n^\alpha}{a^\beta} \right)^n \geq \frac{n^\alpha}{a^\beta}, \quad \forall n \geq \left\lceil a^{\frac{\beta}{\alpha}} \right\rceil + 1.$$

Completare i dettagli per esercizio.

Dimostriamo ora che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty. \quad (7.3.10)$$

Usiamo il metodo induttivo per dimostrare che

$$\frac{n^n}{n!} > 2^n \quad \forall n \geq 6. \quad (7.3.11)$$

Per $n = 6$ si ha $\frac{6^6}{6!} = \frac{4}{5} 3^4 = 2^6 + \frac{4}{5} > 2^6$. Supponiamo allora che per $n \geq 6$ fissato si abbia $\frac{n^n}{n!} > 2^n$ e deduciamo che

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} > 2^{n+1}.$$

Infatti si ha

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)}{(n+1)} \frac{(n+1)^n}{n!} = \frac{(n+1)^n}{n^n} \frac{n^n}{n!} = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \frac{n^n}{n!} > 2 \frac{n^n}{n!} > 2(2^n) = 2^{n+1}, \quad \forall n \geq 2$$

dove si è usato il fatto che

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n > 2, \quad \forall n \geq 2. \quad (7.3.12)$$

La dimostrazione della (7.3.12) si ottiene dimostrando prima che la successione $a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ è monotona strettamente crescente e poi che $a_1 = 2$. Per una dimostrazione della stretta monotonia in un caso più generale vedere la fine del paragrafo 7.6.

Il principio di induzione garantisce allora la validità della (7.3.11), che a sua volta, usando la definizione di limite, implica la (7.3.10).

Osservare in particolare che la (7.3.11) implica un risultato molto più forte della (7.3.10). Dimostrare per esercizio usando la (7.3.11) che, per ogni $b \in [1, 2)$, si ha

$$\lim_n \frac{n^n}{b^n n!} = +\infty.$$

■

Esercizio. Si vogliono calcolare i limiti:

$$\lim_n (3^n - n^4), \quad \lim_n (n! - n^n), \quad \lim_n (n^2 - \log_2 n).$$

Dal Teorema si ha

$$\begin{aligned} (3^n - n^4) &= 3^n \left(1 - \frac{n^4}{3^n}\right) \longrightarrow (+\infty) \cdot (1 - 0) = (+\infty) \cdot 1 = +\infty, \\ (n! - n^n) &= n^n \left(-1 + \frac{n!}{n^n}\right) \longrightarrow (+\infty) \cdot (-1 + 0) = (+\infty) \cdot (-1) = -\infty, \\ (n^2 - \log_2 n) &= n^2 \left(1 - \frac{\log_2 n}{n^2}\right) \longrightarrow (+\infty) \cdot (1 - 0) = (+\infty) \cdot 1 = +\infty. \end{aligned}$$

Quindi,

$$\lim_n (3^n - n^4) = +\infty, \quad \lim_n (n! - n^n) = -\infty, \quad \lim_n (n^2 - \log_2 n) = +\infty.$$

■

Esercizio. Si vuole calcolare il limite:

$$\lim_n \frac{3^n + n^4}{n^n + n!}.$$

Consideriamo prima il numeratore. Dal Teorema sappiamo che

$$\frac{n^4}{3^n} \rightarrow 0,$$

quindi il termine dominante è 3^n . Per il denominatore, dal Teorema sappiamo che

$$\frac{n!}{n^n} \rightarrow 0,$$

quindi il termine dominante è n^n . Ma allora abbiamo anche

$$\frac{3^n + n^4}{n^n + n!} = \frac{3^n}{n^n} \frac{1 + \frac{n^4}{3^n}}{1 + \frac{n!}{n^n}} \longrightarrow 0 \cdot \frac{1 + 0}{1 + 0} = 0,$$

dove abbiamo usato il fatto che, sempre dal Teorema, si ha anche

$$\frac{3^n}{n^n} \rightarrow 0.$$

Quindi

$$\lim_n \frac{3^n + n^4}{n^n + n!} = 0.$$

■

Esercizio. Si vuole calcolare il limite:

$$\lim_n \frac{2^{2n} + n! + n^4}{5n^n + (\log_4 n)^7 - 6^n + n}.$$

A numeratore il termine dominante è $n!$, a denominatore è $5n^n$. Quindi

$$\frac{2^{2n} + n! + n^4}{5n^n + (\log_4 n)^7 - 6^n + n} = \frac{n!}{n^n} \frac{1 + \frac{2^{2n}}{n!} + \frac{n^4}{n!}}{5 + \frac{(\log_4 n)^7}{n^n} - \frac{6^n}{n^n} + \frac{n}{n^n}} \rightarrow 0 \cdot \frac{1 + 0 + 0}{5 + 0 - 0 + 0} = 0,$$

dove si è usato il Teorema per ottenere

$$\lim_n \frac{n^4}{n!} = \lim_n \frac{n^4}{2^n} \frac{2^n}{n!} = 0 \cdot 0 = 0,$$

$$\lim_n \frac{n}{n^n} = \lim_n \frac{n}{n!} \frac{n!}{n^n} = \lim_n \frac{n}{n^4} \frac{n^4}{n!} \frac{n!}{n^n} = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0,$$

e

$$\lim_n \frac{(\log_4 n)^7}{n^n} = \lim_n \frac{(\log_4 n)^7}{n^4} \frac{n^4}{n^n} = \lim_n \frac{(\log_4 n)^7}{n^4} \frac{n^4}{n!} \frac{n!}{n^n} = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0,$$

Quindi

$$\lim_n \frac{2^{2n} + n! + n^4}{5n^n + (\log_4 n)^7 - 6^n + n} = 0.$$

■

ESERCIZI:

$$\lim_n \frac{3^n + 4^n}{4^n + 7^n}, \quad \lim_n \frac{n! + 2^n}{(3n - \sqrt{n})(n-1)!}, \quad \lim_n \frac{(6n^2 + 1)((\log_2(n))^3 - n^{-n})}{(n \log_2(n) - \sqrt{n})(n + 3^{-n})(\log_2(n))^2},$$

7.4. Teoremi di Confronto.

Osservazione [Disuguaglianze che valgono definitivamente]

Supponiamo che a_n e b_n siano regolari, e che $a_n \geq 0$, $b_n > 0$ definitivamente in n . Se $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$, allora $a_n < b_n$ definitivamente in n . In particolare, $\forall \varepsilon > 0$, a_n è definitivamente minore di εb_n . Infatti, dato che, per la definizione di limite $\forall \varepsilon > 0 \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} : \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon \forall n > \nu_\varepsilon$, si ha che $0 \leq a_n < \varepsilon b_n$, definitivamente in n . Segue in particolare dall'ultima osservazione che, per esempio, dato che $\forall \alpha > 0$, $\forall \beta > 0$ e $\forall a > 1$, si ha

$$\lim_n \frac{n^\alpha}{a^{\beta \cdot n}} = 0,$$

allora, fissati $\alpha > 0$, $\beta > 0$ e $a > 1$, si ha

$$n^\alpha < a^{\beta \cdot n}, \quad \text{definitivamente in } n.$$

□

Vale in particolare il seguente,

TEOREMA [PERMANENZA DEL SEGNO]

Sia a_n una successione regolare. Se $\lim_n a_n = a > 0$, allora a_n è definitivamente strettamente positiva. In particolare

$$\forall \delta \in (0, a), \quad \exists \nu_\delta \in \mathbb{N} : a_n > \delta, \quad \forall n > \nu_\delta.$$

Dimostrazione.

Per definizione di limite si ha,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \nu_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n > \nu_\varepsilon.$$

Per $\delta \in (0, \alpha)$ fissato, sia $\varepsilon_\delta > 0$ tale che $\varepsilon_\delta < a - \delta$. Si ha allora

$$a_n - a > -\varepsilon_\delta \iff a_n > a - \varepsilon_\delta > \delta,$$

l'ultima disuguaglianza essendo verificata in particolare per ogni $n > \nu_\delta = \nu_{\varepsilon_\delta}$. ■

Osservazione. Un risultato analogo vale per successioni definitivamente negative. Formulare e dimostrare tale risultato per esercizio.

COROLLARIO 7.4

Se $a_n \rightarrow a$ e $a_n \geq 0$ definitivamente, allora $a \geq 0$.

Dimostrazione.

Supponiamo per assurdo che $a < 0$. Per il teorema di permanenza del segno la successione a_n deve essere definitivamente negativa, contro l'ipotesi $a_n \geq 0$ definitivamente. ■

Esempio. L'argomento nella dimostrazione del Teorema della permanenza del segno consente la deduzione di disuguaglianze che sono di difficile verifica algebrica. Si è visto poco sopra che

$$\lim_n \frac{c_n}{b_n} = \lim_n \frac{2^{2n} + n! + n^4}{5n^n + (\log_4 n)^7 - 6^n + n} = 0.$$

Con lo stesso argomento si conclude che

$$\lim_n (b_n - c_n) = \lim_n b_n \left(1 - \frac{c_n}{b_n}\right) = +\infty(1 - 0) = +\infty.$$

Il Teorema di permanenza del segno implica che la successione $a_n = b_n - c_n$ è definitivamente positiva. In questo caso tuttavia possiamo dire di più sulla differenza $a_n = b_n - c_n$. Sia $\nu \in \mathbb{N} : \frac{c_n}{b_n} \leq \frac{1}{2}$ per ogni $n > \nu$. Esplicitamente questa condizione equivale alla

$$5n^n + (\log_4 n)^7 - 6^n + n \geq 2(2^{2n} + n! + n^4),$$

definitivamente in n . Equivalentemente si può concludere anche che

$$b_n - c_n = b_n \left(1 - \frac{c_n}{b_n}\right) \geq b_n \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{b_n}{2}, \quad \forall n > \nu,$$

ovvero che

$$(5n^n + (\log_4 n)^7 - 6^n + n) - (2^{2n} + n! + n^4) \geq \frac{1}{2}(5n^n + (\log_4 n)^7 - 6^n + n),$$

definitivamente in n . ■

Il limite

$$\lim_n \frac{(2)^{n^2}}{n^n},$$

non può essere risolto tramite i limiti ottenuti nel paragrafo precedente. Un modo per risolvere il problema è il seguente. Si osserva che

$$\frac{(2)^{n^2}}{n^n} = 2^{n^2 - n \log_2(n)} = 2^{n^2(1 - \frac{\log_2(n)}{n})}.$$

Dato che $\frac{\log_2(n)}{n} \rightarrow 0$, per $n \rightarrow +\infty$, allora $0 < \frac{\log_2(n)}{n} \leq \frac{1}{2}$ definitivamente in n . In particolare

$$\frac{(2)^{n^2}}{n^n} \geq 2^{\frac{n^2}{2}}, \quad (7.4.1)$$

definitivamente in n . Dal paragrafo precedente sappiamo che $\lim_n 2^{\frac{n^2}{2}} = +\infty$. Utilizzando questo fatto e la (7.4.1) non è difficile verificare che

$$\lim_n \frac{(2)^{n^2}}{n^n} = +\infty.$$

Intuitivamente, quello che si vorrebbe fare è passare al limite nella disuguaglianza (7.4.1) e utilizzare il fatto che il limite a sinistra sia maggiore o uguale al limite a destra. Questo è in sostanza il contenuto dei Teoremi di confronto.

TEOREMA 7.4.1 [CALCOLO DI LIMITI-CONFRONTO PER SUCCESSIONI DIVERGENTI]

Siano a_n e b_n due successioni. Supponiamo che

$$a_n \longrightarrow +\infty (-\infty),$$

e anche che

$$b_n \geq a_n (b_n \leq a_n), \quad \text{definitivamente in } n.$$

Allora, b_n è regolare e in particolare

$$b_n \longrightarrow +\infty (b_n \longrightarrow -\infty).$$

Dimostrazione. [Facoltativa]

Consideriamo per semplicità il caso $a_n \longrightarrow +\infty$. Per la definizione di limite

$$\forall M > 0 \exists \nu_M \in \mathbb{N} : a_n > M, \forall n > \nu_M.$$

Per ipotesi $b_n \geq a_n$ definitivamente e quindi

$$\exists \nu \in \mathbb{N} : b_n \geq a_n, \forall n > \nu.$$

Scegliendo $\tilde{\nu}_M = \max\{\nu_M, \nu\}$ si ha

$$\forall M > 0, b_n \geq M, \forall n > \tilde{\nu}_M,$$

ovvero $b_n \longrightarrow +\infty$. ■

Esempio. Sia $b_n = -3^n + \sin(n^2 + \log_2(n))$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dato che $b_n \leq -3^n + 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e $-3^n + 1 \rightarrow -\infty$, si ha $b_n \rightarrow -\infty$. ■

TEOREMA 7.4.2 [CALCOLO DI LIMITI-CONFRONTO PER SUCCESSIONI CONVERGENTI]

Siano a_n , b_n e c_n tre successioni. Supponiamo che

$$a_n \longrightarrow L_1 \in \overline{\mathbb{R}}, \quad b_n \longrightarrow L_2 \in \overline{\mathbb{R}},$$

e anche che

$$a_n \leq c_n \leq b_n, \quad \text{definitivamente in } n.$$

Allora si ha:

(i) Se c_n è regolare e $c_n \longrightarrow c \in \overline{\mathbb{R}}$, allora

$$L_1 \leq c \leq L_2.$$

(ii) Se $L_1 = L_2$, sia L il valore comune definito da $L \equiv L_1 = L_2$. Allora c_n è regolare e in particolare

$$c_n \longrightarrow L.$$

Dimostrazione. [Facoltativa]

(i) Se $L_1 = -\infty$ o se $c = +\infty$, necessariamente $L_1 \leq c$. Se $L_1 = +\infty$ allora si ha $c = +\infty$ dal Teorema 7.4.1 (e in questo caso non è richiesta l'ipotesi di regolarità su c_n) e se $c = +\infty$ allora si ha $L_2 = +\infty$ dal Teorema 7.4.1. Supponiamo quindi senza perdita di generalità che $L_1 \in \mathbb{R}$ e $c < +\infty$. Sia $d_n = a_n - c_n$. Per ipotesi $d_n \leq 0$ definitivamente e $d_n \longrightarrow L_1 - c$. Se $c = -\infty$, allora $d_n \rightarrow +\infty$, fatto questo chiaramente impossibile perché d_n è per ipotesi definitivamente negativa. Supponiamo quindi senza perdita di generalità che $c \in \mathbb{R}$. Dato che $d_n \leq 0$ e $d_n \rightarrow L_1 - c$, dal Corollario 7.4 si ha $L_1 \leq c$.

Alternativamente, ragionando per assurdo, supponiamo che $L_1 - c > 0$. Allora, dalla definizione di limite si ha (scegliendo $\varepsilon = \frac{L_1 - c}{4}$)

$$|d_n - (L_1 - c)| < \frac{L_1 - c}{4}, \quad \text{definitivamente in } n,$$

e in particolare

$$d_n - (L_1 - c) > -\frac{L_1 - c}{4}, \quad \text{definitivamente in } n. \quad (7.4.2)$$

È chiaro che la (7.4.2) è assurda perché implica $d_n > \frac{3(L_1 - c)}{4}$ definitivamente, contro l'ipotesi che $d_n \leq 0$ definitivamente. Questa contraddizione implica che l'ipotesi $L_1 - c > 0$ è assurda e quindi $L_1 \leq c$. In modo analogo si ottiene $c \leq L_2$ (o anche moltiplicando la disuguaglianza per -1 e utilizzando il risultato appena dimostrato). La (i) è dimostrata.

(ii) Sia L il valore comune definito da $L \equiv L_1 = L_2$. I casi $L = \pm\infty$ seguono dal Teorema 7.4.1. Supponiamo quindi senza perdita di generalità che $L \in \mathbb{R}$. Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Dalla definizione di limite,

$$a_n > L - \varepsilon, \quad e \quad b_n < L + \varepsilon, \quad \text{definitivamente in } n.$$

In particolare, usando l'ipotesi: " $a_n \leq c_n \leq b_n$ definitivamente in n ", si ha

$$L - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < L + \varepsilon, \quad \text{definitivamente in } n.$$

D'altra parte, dire che

$$\forall \varepsilon > 0, L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon, \quad \text{definitivamente in } n,$$

è equivalente a dire che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} : L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon, \forall n > \nu_\varepsilon,$$

ovvero $c_n \rightarrow L$. ■

Esempio. Sia

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \arctan \left(\frac{e^n + n}{n! + 5} \right).$$

Dato che:

$$-\frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \arctan \left(\frac{e^n + n}{n! + 5} \right) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\pi}{2}, \quad \text{definitivamente in } n,$$

e

$$\frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0,$$

si ha $c_n \rightarrow 0$. ■

Esempio. Sia $k \in \mathbb{N}$ fissato e $c_n = \frac{n^k}{n^n}$. Dato che:

$$0 < \frac{n^k}{n^n} = \frac{1}{n^{n-k}} \leq \frac{1}{2^{n-k}} = 2^k \frac{1}{2^n}, \quad \forall n \geq k + 1,$$

e

$$\frac{1}{2^n} \rightarrow 0, \quad \text{si ha} \quad \frac{n^k}{n^n} \rightarrow 0. \quad \text{■}$$

Esercizio. Si vuole calcolare

$$\lim_n \frac{n^5 + \sin(n^2)}{4n^5 + (\cos(e^n))^3}.$$

Dato che:

$$-\frac{1}{n^5} \leq \frac{\sin(n^2)}{n^5} \leq \frac{1}{n^5}, \quad \forall n \geq 1,$$

e

$$-\frac{1}{n^5} \leq \frac{(\cos(e^n))^3}{n^5} \leq \frac{1}{n^5}, \quad \forall n \geq 1,$$

si ha,

$$\frac{\sin(n^2)}{n^5} \rightarrow 0, \quad \text{e} \quad \frac{(\cos(e^n))^3}{n^5} \rightarrow 0.$$

Quindi

$$\frac{n^5 + \sin(n^2)}{4n^5 + (\cos(e^n))^3} = \frac{1 + \frac{\sin(n^2)}{n^5}}{4 + \frac{(\cos(e^n))^3}{n^5}} \rightarrow \frac{1+0}{4+0} = \frac{1}{4},$$

ovvero

$$\lim_n \frac{n^5 + \sin(n^2)}{4n^5 + (\cos(e^n))^3} = \frac{1}{4}.$$

■

ESERCIZIO. Fissato $a > 1$, calcolare il limite

$$\lim_n \frac{(\log_a(n))^2 3^n - 2^n \sin(n)}{\left(2(\log_a(n)) - \cos(n)\sqrt{\log_a(n)}\right) 2^n \left(\left(\frac{3}{2}\right)^n \log_a(n) - n^4 \arctan(n)\right)}.$$

Osservazione

È importante tenere presente che se $|a| < 1$, ovvero se $-1 < a < 1$, allora $a^n \rightarrow 0$. Se $a \in (0, 1)$ questo fatto è solo un modo equivalente di dire un fatto già noto. Infatti, se $a \in (0, 1)$, allora $b = \frac{1}{a} > 1$, e concludiamo che $a^n = \frac{1}{b^n} \rightarrow 0$. Viceversa, se $a \in (-1, 0)$, si può osservare che $|a|^n \rightarrow 0 \implies a^n \rightarrow 0$. □

ESERCIZIO. Dimostrare che si ha

$$\lim_n \frac{(2)^{\sqrt{n}}}{n^n} = 0, \quad \lim_n \frac{(2)^{(\log_2 n)^2}}{n} = +\infty, \quad \lim_n \frac{(2)^{\sqrt{\log_2 n}}}{n} = 0.$$

TEOREMA [CONFRONTO DI SUCCESSIONI REGOLARI]

Siano a_n e b_n regolari. Se

$$a_n \leq b_n (a_n \geq b_n), \quad \text{o se} \quad a_n < b_n (a_n > b_n),$$

allora

$$\lim_n a_n \leq \lim_n b_n (\lim_n a_n \geq \lim_n b_n).$$

Dimostrazione.[Facoltativa] La dimostrazione di questo Teorema è una immediata conseguenza dei Teoremi di confronto precedenti. ■

Esempio. Sia $a_n = \frac{1}{n^2}$ e $b_n = \frac{1}{n^2} + 1$. È chiaro che $a_n < b_n, \forall n \in \mathbb{N}$. In questo caso si ha,

$$\lim_n a_n = 0 < 1 = \lim_n b_n.$$

Se invece $a_n = \frac{1}{n^2}$ e $b_n = \frac{1}{n}$, è chiaro che $a_n < b_n$, definitivamente, e inoltre

$$\lim_n a_n = 0 = \lim_n b_n.$$

■

7.5. Successioni Monotone.

Definizione[SUCCESSIONI MONOTONE CRESCENTI/STRETTAMENTE CRESCENTI]

Una successione a_n si dice **monotona crescente (strettamente crescente)** se

$$a_n \leq a_{n+1} \quad (a_n < a_{n+1}), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definizione[SUCCESSIONI MONOTONE DECRESCENTI/STRETTAMENTE DECRESCENTI]

Una successione a_n si dice **monotona decrescente (strettamente decrescente)** se

$$a_n \geq a_{n+1} \quad (a_n > a_{n+1}), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Notare che questa definizione è ridondante, dato che una successione è una particolare funzione definita su $\mathbb{N}$. Vedere [B] §4.4.

Esempio. Per ogni $a > 1$, $\alpha > 0$ e $b > 0$ le successioni, definite nel loro dominio naturale, $(\log_a(n))^\beta$, n^α , $a^{\beta n}$, $n^{\alpha n}$, sono monotone strettamente crescenti, mentre le loro opposte $-(\log_a(n))^\beta$, $-n^\alpha$, $-a^{\beta n}$, $-n^{\alpha n}$, sono monotone strettamente decrescenti. Viceversa, le successioni, definite nel loro dominio naturale, $\frac{1}{(\log_a(n))^\beta}$, $\frac{1}{n^\alpha}$, $\frac{1}{a^{\beta n}}$, $\frac{1}{n^{\alpha n}}$, sono monotone strettamente decrescenti, mentre le loro opposte $-\frac{1}{(\log_a(n))^\beta}$, $-\frac{1}{n^\alpha}$, $-\frac{1}{a^{\beta n}}$, $-\frac{1}{n^{\alpha n}}$, sono monotone strettamente crescenti. ■

TEOREMA [REGOLARITÀ DELLE SUCCESSIONI MONOTONE]

Sia a_n una successione monotona crescente (decrescente). Allora

(i) a_n è inferiormente(superiormente) limitata, e si ha

$$\min_{n \in \mathbb{N}} a_n = a_1 \quad (\max_{n \in \mathbb{N}} a_n = a_1).$$

(ii) a_n è regolare e

$$\lim_n a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n \quad (\lim_n a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n).$$

Dimostrazione.[Facoltativa]

(i) Dimostrare per esercizio.

(ii) Supponiamo a_n monotona decrescente e sia $\ell = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$. Supponiamo anche per semplicità che $\ell \in \mathbb{R}$.

Per definizione di inf si ha $a_n \geq \ell$ e rimane da dimostrare solo che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} : a_n < \ell + \varepsilon, \quad \forall n > \nu_\varepsilon. \quad (7.5.1)$$

Dato che $\ell = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$, per definizione di inf si ha

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} : a_{\nu_\varepsilon} < \ell + \varepsilon.$$

Ma a_n è monotona decrescente e allora si ha

$$a_n \leq a_{\nu_\varepsilon}, \quad \forall n > \nu_\varepsilon.$$

Le ultime due relazioni implicano la (7.5.1) e la tesi è dimostrata per a_n decrescente.

Il caso a_n crescente si discute in modo analogo (o anche moltiplicando a_n per -1 e utilizzando il risultato appena dimostrato). ■

Osservazione

Se a_n è definita per $n \geq k \geq 1$ ed è monotona crescente/decrescente allora il min / max è raggiunto su a_k . □

Osservazione

Altre notazioni equivalenti per indicare il $\min / \max / \sup / \inf$ di una successione a_n sono:

$$\min_{\mathbb{N}}\{a_n\}, \quad \min_{\mathbb{N}} a_n, \quad \min\{a_n\},$$

dove $\{a_n\}$ è da considerarsi una notazione abbreviata per

$$\{a_n, n \in \mathbb{N}\},$$

ovvero l'insieme i cui elementi sono i valori assunti dalla successione, ovvero l'immagine della successione stessa. $\square$

Esempio. Per ogni $a > 1$, $\alpha > 0$ e $b > 0$, le successioni, definite nel loro dominio naturale, $(\log_a(n))^\beta$, n^α , $a^{\beta n}$, $n^{\alpha n}$, sono monotone strettamente crescenti e hanno minimo rispettivamente $(\log_a(1))^\beta = 0$, $1^\alpha = 1$, $a^{\beta \cdot 0} = 1$, $1^{\alpha \cdot 1} = 1$. Inoltre hanno tutte immagine superiormente illimitata ($\sup\{a_n\} = +\infty$) e infatti sono tutte divergenti a $+\infty$. Viceversa, le successioni, definite nel loro dominio naturale, $\frac{1}{(\log_a(n))^\beta}$, $\frac{1}{n^\alpha}$, $\frac{1}{a^{\beta n}}$, $\frac{1}{n^{\alpha n}}$, sono monotone strettamente decrescenti e hanno massimo rispettivamente $\frac{1}{(\log_a(2))^\beta}$, $\frac{1}{1^\alpha} = 1$, $\frac{1}{a^{\beta \cdot 0}} = 1$, $\frac{1}{1^{\alpha \cdot 1}} = 1$. Inoltre hanno tutte immagine inferiormente limitata ($\inf\{a_n\} = 0$) e infatti sono tutte infinitesime. $\blacksquare$

COROLLARIO 7.5.1 [CONVERGENZA DELLE SUCCESSIONI MONOTONE]

Ogni successione monotona e limitata è convergente.

Dimostrazione.

Immediata conseguenza del Teorema di regolarità. $\blacksquare$

TEOREMA [DEFINIZIONE DEL NUMERO DI NEPERO]

Sia

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \forall n \geq 1.$$

Si ha:

- (i) a_n è monotona strettamente crescente;
- (ii) a_n è limitata, $2 \leq a_n < 4$, $\forall n \geq 1$.

*In particolare a_n è convergente ad un numero reale irrazionale, che si indica con e , detto **numero di Nepero***

$$e := \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Dimostrazione.

La dimostrazione della monotonia di a_n è stata svolta a lezione. Per una dimostrazione della monotonia in un caso più generale vedere la fine del paragrafo. Lo stesso argomento mostra che la successione $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n \geq 1$ è strettamente decrescente. Dato che $b_n > a_n$ ne segue

$$2 = a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1 = 4, \quad \forall n \geq 1.$$

$\blacksquare$

Osservazione

Si ha $e \simeq 2,71828$.

Osservazione [LOGARITMO NATURALE]

Da ora in avanti, e per tutto il resto del corso, indicheremo con $\log$ il logaritmo in base e , detto anche **logaritmo naturale**, $\log(x) = \log_e(x)$, $x \in (0, +\infty)$.

Nel seguito di questo paragrafo useremo le seguenti regole che sono a tutti gli effetti una integrazione delle regole di somma, sottrazione, prodotto e divisione di elementi di $\mathbb{R}$ con $\pm\infty$ viste al §3.1.

Se $x \in \mathbb{R}$, allora:

- (i) Se $x > 1$, allora $x^{+\infty} = +\infty$, $x^{-\infty} = 0$;
- (ii) Se $x \in (0, 1)$, allora $x^{+\infty} = 0$, $x^{-\infty} = +\infty$;
- (iii) Se $x > 0$, allora $(+\infty)^x = +\infty$ e se $x < 0$, allora $(+\infty)^x = 0$;
- (iv) Se $x > 0$, allora $0^x = 0$;
- (v) $(+\infty)^{(+\infty)} = +\infty$, $(+\infty)^{(-\infty)} = 0$, $0^{+\infty} = 0$.

7.6. Altri limiti di successioni e soluzione di altre forme indeterminate.

TEOREMA [LIMITI DI SUCCESSIONI ELEVATI A LIMITI DI SUCCESSIONI]

Siano a_n e b_n due successioni regolari. Supponiamo che $a_n > 0$ definitivamente in n , e indichiamo con $a \in [0, +\infty]$ e $b \in \mathbb{R}$ i limiti $\lim_n a_n = a$ e $\lim_n b_n = b$.

Se la potenza in base a di b ,

$$a^b$$

non dà luogo ad una delle forme indeterminate

$$1^{\pm\infty}, \quad (+\infty)^0, \quad 0^b \text{ con } b \leq 0,$$

allora si ha

$$\lim_n \left((a_n)^{b_n} \right) = \left(\lim_n a_n \right)^{\lim_n b_n} = a^b.$$

In particolare, se $a = 0$ e $b < 0$ si ha

$$\lim_n \left((a_n)^{b_n} \right) = +\infty.$$

Vale inoltre

$$\lim_n \log(a_n) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a = +\infty \\ \log(a) & \text{se } a \in (0, +\infty) \\ -\infty & \text{se } a = 0. \end{cases}$$

Osservazione

L'ipotesi " $a_n > 0$ definitivamente" si rende necessaria a causa del fatto che, se $a_n = 0$ e $b_n < 0$ per qualche n l'espressione $a_n^{b_n}$ risulta mal definita. Se anche si escludesse questo caso con qualche ipotesi aggiuntiva, bisognerebbe comunque supporre $a_n \geq 0$ definitivamente. Infatti, se $a_n < 0$ e b_n non fosse una frazione del tipo $\frac{m}{k}$ con k un numero dispari, allora $a_n^{b_n}$ non sarebbe ben definita. Si pensi per esempio alle espressioni $(-\frac{1}{n})^\pi$, $\sqrt{-\frac{1}{n}} = (-\frac{1}{n})^{\frac{1}{2}}$, che infatti non rappresentano nessun numero reale, e che avrebbero tuttavia come limite formale rispettivamente le forme $0^\pi = 0$, $\sqrt{0} = 0$. $\square$

Dimostrazione.

Iniziamo a discutere il caso

$$\mathbf{a_n} \equiv \mathbf{a} \in (0, +\infty) \setminus \{1\} \quad \text{e} \quad \mathbf{b_n} \rightarrow \mathbf{b} \in \mathbb{R}. \quad (7.6.1)$$

Scrivendo

$$a^{b_n} = e^{b_n(\log a)},$$

e sostituendo b_n con $b_n(\log a)$, si può supporre senza perdita di generalità che $a = e$.

Si tratta quindi di dimostrare che $e^{b_n} \rightarrow e^b$, ovvero che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} : |e^{b_n} - e^b| < \varepsilon \quad \forall n > \nu_\varepsilon. \quad (7.6.2)$$

Osserviamo che

$$|e^{b_n} - e^b| < \varepsilon \iff -\varepsilon + e^b < e^{b_n} < e^b + \varepsilon.$$

Se $-\varepsilon + e^b \leq 0$ la $-\varepsilon + e^b < e^{b_n}$ risulta automaticamente verificata. In particolare, possiamo supporre senza perdita di generalità che $-\varepsilon + e^b > 0$ e concludere che la (7.6.2) è equivalente a

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} : \log(1 - e^{-b}\varepsilon) < b_n - b < \log(1 + e^{-b}\varepsilon) \quad \forall n > \nu_\varepsilon. \quad (7.6.3)$$

Siano $\sigma_{\varepsilon,+} = \log(1 + e^{-b}\varepsilon)$ e $\sigma_{\varepsilon,-} = \log(1 - e^{-b}\varepsilon)$. Dato che il logaritmo di un numero maggiore di 1 è strettamente positivo e il logaritmo di un numero minore di 1 è strettamente negativo, definendo

$$\sigma_\varepsilon = \frac{1}{2} \min\{\sigma_{\varepsilon,+}, |\sigma_{\varepsilon,-}|\}, \quad \text{si ha } \sigma_\varepsilon > 0$$

e inoltre

$$\log(1 - e^{-b}\varepsilon) < -\sigma_\varepsilon, \quad \sigma_\varepsilon < \log(1 + e^{-b}\varepsilon). \quad (7.6.4)$$

Dato che $b_n \rightarrow b$, si ha

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} : -\sigma_\varepsilon < b_n - b < \sigma_\varepsilon \quad \forall n > \nu_\varepsilon. \quad (7.6.5)$$

Le (7.6.4) e (7.6.5) implicano la (7.6.3). La (7.6.2) è dimostrata.

Osservazione

La (7.6.5) si ottiene dalla definizione di limite per b_n come segue.

Dato che $b_n \rightarrow b$, si ha

$$\forall \sigma > 0 \quad \exists \mu_\sigma \in \mathbb{N} : -\sigma < b_n - b < \sigma \quad \forall n > \mu_\sigma. \quad (7.6.6)$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ si può allora scegliere $\sigma = \sigma_\varepsilon$ e definire $\nu_\varepsilon = \mu_{\sigma_\varepsilon}$. Con queste posizioni la (7.6.6) coincide con la (7.6.5). $\square$

Discutiamo ora il caso

$$\mathbf{a}_n \equiv \mathbf{a} \in (0, +\infty) \setminus \{1\} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}_n \rightarrow \mathbf{b} \in \{-\infty, +\infty\}. \quad (7.6.7)$$

È sufficiente dimostrare che

$$a^{b_n} \rightarrow +\infty, \quad \text{se } a > 1 \quad \text{e} \quad b_n \rightarrow +\infty, \quad (7.6.8)$$

e

$$a^{b_n} \rightarrow 0, \quad \text{se } a < 1 \quad \text{e} \quad b_n \rightarrow -\infty. \quad (7.6.9)$$

Infatti, segue dalla (7.6.9) che

$$a^{b_n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-b_n} \rightarrow 0, \quad \text{se } a < 1 \quad \text{e} \quad b_n \rightarrow +\infty,$$

come anche segue dalla (7.6.8) che

$$a^{b_n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-b_n} \rightarrow +\infty, \quad \text{se } a < 1 \quad \text{e} \quad b_n \rightarrow -\infty,$$

Come sopra, possiamo supporre senza perdita di generalità che $a = e$.

Per la (7.6.8) dobbiamo far vedere che

$$\forall M > 0 \quad \exists \nu_M \in \mathbb{N} : e^{b_n} > M, \quad \forall n > \nu_M. \quad (7.6.10)$$

Osserviamo che

$$e^{b_n} > M \iff b_n > \log M.$$

Sia $R_M = 2 \log M > \log M$. Si ha $R_M > \log M$, e dato che $b_n \rightarrow +\infty$,

$$\forall M > 0 \quad \exists \nu_M \in \mathbb{N} : b_n > R_M, \quad \forall n > \nu_M, \quad (7.6.11)$$

e la (7.6.10) è dimostrata.

Osservazione

La (7.6.11) si ottiene dalla definizione di limite per b_n come segue.

Dato che $b_n \rightarrow +\infty$, si ha

$$\forall R > 0 \quad \exists \mu_R \in \mathbb{N} : b_n > R, \quad \forall n > \mu_R. \quad (7.6.12)$$

Si può allora scegliere $R = R_M = 2 \log M$ e definire $\nu_M = \mu_{R_M}$. Con queste posizioni la (7.6.12) coincide con la (7.6.11). $\square$

Per la (7.6.9) dobbiamo far vedere che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} : -\varepsilon < e^{b_n} < \varepsilon, \quad \forall n > \nu_\varepsilon. \quad (7.6.13)$$

Osserviamo che

$$e^{b_n} > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{e che} \quad e^{b_n} < \varepsilon \iff b_n < \log \varepsilon.$$

Sia $R_\varepsilon = \max\{-2 \log \varepsilon, 0\}$. Si ha $-R_\varepsilon < \log \varepsilon$. Dato che $b_n \rightarrow -\infty$, per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$\exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} : b_n < -R_\varepsilon, \quad \forall n > \nu_\varepsilon, \quad (7.6.14)$$

e la (7.6.13) è dimostrata.

Osservazione

La (7.6.14) si ottiene dalla definizione di limite come segue.

Dato che $b_n \rightarrow -\infty$, si ha

$$\forall R > 0 \quad \exists \mu_R \in \mathbb{N} : b_n < -R, \quad \forall n > \mu_R. \quad (7.6.15)$$

Si può allora scegliere $R = R_\varepsilon = -2 \log \varepsilon$ e definire $\nu_\varepsilon = \mu_{R_\varepsilon}$. Con queste posizioni la (7.6.15) coincide con la (7.6.14). $\square$

Osservazione[LOGARITMI DI LIMITI]

Con ragionamenti analoghi (il lettore è invitato a completare i dettagli per esercizio) si può dimostrare che se $a_n > 0$ definitivamente in n e $a_n \rightarrow a \in [0, +\infty]$, allora si ha

$$\log(a_n) \rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{se } a = +\infty \\ \log(a) & \text{se } a \in (0, +\infty) \\ -\infty & \text{se } a = 0. \end{cases}$$

$\square$

Utilizzando questa Osservazione e la tesi dimostrata nei casi particolari (7.6.1), (7.6.7) possiamo ora discutere i casi rimanenti.

Consideriamo innanzitutto

$$\mathbf{a}_n \rightarrow \mathbf{a} \in (0, +\infty) \setminus \{1\} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}_n \rightarrow \mathbf{b} \in \overline{\mathbb{R}}. \quad (7.6.16)$$

Dato che $a_n > 0$ definitivamente, possiamo scrivere $a_n = e^{\log(a_n)}$ definitivamente in n . In particolare

$$a_n^{b_n} = e^{b_n \log(a_n)}$$

definitivamente in n . Possiamo allora applicare la (7.2.2) al prodotto $b_n \log a_n$. Dato che $a \notin \{0, 1, +\infty\}$, l'Osservazione precedente garantisce che il prodotto dei limiti $b \log a$ non dà luogo a forme indeterminate. Se ne deduce che (usando la tesi dimostrata nei casi particolari (7.6.1), (7.6.7))

$$a_n^{b_n} = e^{b_n \log(a_n)} \longrightarrow e^{b \log(a)} = a^b.$$

La dimostrazione del caso considerato nella (7.6.16) è completa.

Discutiamo ora il caso

$$\mathbf{a}_n \rightarrow \mathbf{a} = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{b}_n \rightarrow \mathbf{b} \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}. \quad (7.6.17)$$

Se $b \in (0, +\infty]$, dalla (7.2.2) (e usando la tesi dimostrata nei casi particolari (7.6.1), (7.6.7)) si ha

$$a_n^{b_n} = e^{b_n \log(a_n)} \longrightarrow e^{b \log(a)} = e^{b \cdot (-\infty)} = e^{-\infty} = 0.$$

Se $b \in [-\infty, 0)$, dalla (7.2.2) (e usando la tesi dimostrata nei casi particolari (7.6.1), (7.6.7)) si ha

$$a_n^{b_n} = e^{b_n \log(a_n)} \longrightarrow e^{b \log(a)} = e^{b \cdot (-\infty)} = e^{+\infty} = +\infty.$$

La dimostrazione del caso considerato nella (7.6.17) è completa.

Discutiamo ora il caso

$$\mathbf{a}_n \rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{1} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}_n \rightarrow \mathbf{b} \in \mathbb{R}. \quad (7.6.18)$$

Dato che $b \in \mathbb{R}$, dalla (7.2.2) (e usando la tesi dimostrata nei casi particolari (7.6.1), (7.6.7)) si ha

$$a_n^{b_n} = e^{b_n \log(a_n)} \longrightarrow e^{b \log(a)} = e^{b \cdot 0} = e^0 = 1.$$

La dimostrazione del caso considerato nella (7.6.18) è completa.

Discutiamo ora il caso

$$\mathbf{a}_n \rightarrow \mathbf{a} = +\infty \quad \text{e} \quad \mathbf{b}_n \rightarrow \mathbf{b} \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{\mathbf{0}\}. \quad (7.6.19)$$

Se $b \in (0, +\infty]$, dalla (7.2.2) (e usando la tesi dimostrata nei casi particolari (7.6.1), (7.6.7)) si ha

$$a_n^{b_n} = e^{b_n \log(a_n)} \longrightarrow e^{b \log(a)} = e^{b \cdot (+\infty)} = e^{+\infty} = +\infty.$$

Se $b \in [-\infty, 0)$, dalla (7.2.2) (e usando la tesi dimostrata nei casi particolari (7.6.1), (7.6.7)) si ha

$$a_n^{b_n} = e^{b_n \log(a_n)} \longrightarrow e^{b \log(a)} = e^{b \cdot (+\infty)} = e^{-\infty} = 0.$$

La dimostrazione del caso considerato nella (7.6.19) è completa.

Tutti gli altri casi possibili corrispondono ad una delle forme indeterminate

$$1^{\pm\infty}, \quad (+\infty)^0, \quad 0^0.$$

La dimostrazione è completa. ■

Esempio. Siano $a_n = e$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 1$. Dato che in questo caso si ha, con le notazioni del Teorema, $a = e$, $b = 0$, allora $a^b = e^0$. Possiamo quindi concludere che

$$a_n^{b_n} \longrightarrow e^0,$$

ovvero che

$$\lim_n a_n^{b_n} = \lim_n \left(e^{\frac{1}{n}} \right) = e^0 = 1. \quad \text{■}$$

Esempio. Siano $a_n = \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 1$, $b_n = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dato che in questo caso si ha, con le notazioni del Teorema, $a = 0$, $b = +\infty$, allora $a^b = 0^{+\infty}$. Possiamo quindi concludere che

$$a_n^{b_n} \longrightarrow 0^{+\infty},$$

ovvero che

$$\lim_n a_n^{b_n} = \lim_n \left(\frac{1}{n} \right)^n = 0^{+\infty} = 0. \quad \text{■}$$

Esempio. Siano $a_n = \frac{5n^2+1}{n^2+e^{-n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \pi$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dato che in questo caso si ha, con le notazioni del Teorema, $a_n \rightarrow a = 5$, $b = \pi$, allora $a^b = 5^\pi$. Possiamo quindi concludere che

$$a_n^{b_n} \longrightarrow 5^\pi,$$

ovvero che

$$\lim_n a_n^{b_n} = \lim_n \left(\frac{5n^2+1}{n^2+e^{-n}} \right)^\pi = 5^\pi.$$

■

Esercizio. Si vuole calcolare il limite

$$\lim_n \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n}}.$$

In questo caso, con le notazioni del Teorema, avremmo $a = 0$, $b = 0$, ovvero la forma indeterminata

$$a_n^{b_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \rightarrow 0^0.$$

Per "risolvere" la forma indeterminata, osserviamo che

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \log(\frac{1}{n})}.$$

Dato che $\frac{1}{n} \log(\frac{1}{n}) = -\frac{1}{n} \log(n) \rightarrow 0$, applicando il Teorema, si ha

$$e^{\frac{1}{n} \log(\frac{1}{n})} = e^{-\frac{1}{n} \log(n)} \rightarrow e^0,$$

e possiamo allora concludere che

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_n \left(e^{-\frac{1}{n} \log(n)}\right) = e^0 = 1.$$

■

Esercizio. Si vuole calcolare il limite

$$\lim_n (n)^{\frac{1}{n}} = \lim_n \sqrt[n]{n}.$$

Certamente si può osservare che $\sqrt[n]{n} = \left(\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{\frac{1}{n}}\right)^{-1}$, e usare l'esempio precedente e la (7.2.3) per concludere che $\sqrt[n]{n} = \left(\frac{1}{\frac{1}{n}}\right)^{-1} \rightarrow 1$. Altrimenti, con le notazioni del teorema, avremmo $a = +\infty$, $b = 0$, ovvero la forma indeterminata

$$a_n^{b_n} \rightarrow (+\infty)^0.$$

Per "risolvere" la forma indeterminata, osserviamo che

$$(n)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \log(n)}.$$

Dato che $\frac{1}{n} \log(n) \rightarrow 0$, si ha

$$e^{\frac{1}{n} \log(n)} \rightarrow e^0,$$

e possiamo allora concludere nuovamente che

$$\lim_n (n)^{\frac{1}{n}} = \lim_n \left(e^{\frac{1}{n} \log(n)}\right) = e^0 = 1.$$

■

Osservazione[CALCOLO DI LIMITI CON FORME INDETERMINATE $1^{\pm\infty}$]

È chiaro che il limite che definisce il numero di Nepero porta ad una forma indeterminata del tipo $1^{\pm\infty}$. La formula fondamentale per risolvere le forme indeterminate del tipo $1^{\pm\infty}$ è infatti la seguente:

Se $a_n \rightarrow +\infty$, si ha

$$\lim_n \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e. \quad (7.6.20)$$

Dimostrare per esercizio (difficile).

□

Esercizio. Si vuole calcolare il limite

$$\lim_n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

Osserviamo che

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n}} = \left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}}.$$

Usiamo allora la (7.6.20), per concludere che

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \longrightarrow e.$$

Possiamo applicare il Teorema con $a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \rightarrow e$, $b_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, ovvero

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} \longrightarrow e^0.$$

Se ne deduce che

$$\lim_n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = e^0 = 1.$$

■

Esercizio. Si vuole calcolare il limite

$$\lim_n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^3}.$$

Osserviamo che

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^3} = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2 \cdot n} = \left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^n.$$

Usiamo allora la (7.6.20), per concludere che

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \longrightarrow e.$$

Possiamo applicare il Teorema con $a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \rightarrow e$, $b_n = n \rightarrow +\infty$, ovvero

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^3} = \left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^n \longrightarrow e^{+\infty}.$$

Se ne deduce che

$$\lim_n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^3} = e^{+\infty} = +\infty.$$

■

Esercizio. Si vuole calcolare il limite

$$\lim_n \left(1 + \frac{5}{n^2}\right)^{n^2}.$$

Osserviamo che

$$\left(1 + \frac{5}{n^2}\right)^{n^2} = \left(1 + \frac{5}{n^2}\right)^{\frac{5n^2}{5}} = \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n^2}{5}}\right)^{\frac{n^2}{5}}\right]^5.$$

Usiamo allora la (7.6.20), per concludere che

$$\left(1 + \frac{1}{\left(\frac{n^2}{5}\right)}\right)^{\frac{n^2}{5}} \rightarrow e.$$

Possiamo applicare il Teorema con $a_n = \left(1 + \frac{1}{\frac{n^2}{5}}\right)^{\frac{n^2}{5}} \rightarrow e$, $b_n = 5 \rightarrow 5$, ovvero

$$\left(1 + \frac{5}{n^2}\right)^{n^2} = \left[\left(1 + \frac{5}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{5}}\right]^5 \rightarrow e^5.$$

Se ne deduce che

$$\lim_n \left(1 + \frac{5}{n^2}\right)^{n^2} = e^5.$$

■

Esercizio. Calcolare il limite

$$\lim_n \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 5}\right)^{3 \cdot n}.$$

Questo limite è meno immediato. È chiaro che il limite dà luogo alla forma indeterminata $1^{+\infty}$. Osserviamo allora che

$$\begin{aligned} \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 5}\right)^{3 \cdot n} &= \left(1 + \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 5} - 1\right)^{3 \cdot n} = \left(1 + \frac{n - 4}{n^2 + 5}\right)^{3 \cdot n} = \\ &= \left(1 + \frac{n - 4}{n^2 + 5}\right)^{3 \cdot n \cdot \frac{n^2 + 5}{n - 4} \cdot \frac{n - 4}{n^2 + 5}} = \left[\left(1 + \frac{n - 4}{n^2 + 5}\right)^{\frac{n^2 + 5}{n - 4}}\right]^{3n \frac{n - 4}{n^2 + 5}}. \end{aligned}$$

Usiamo allora la (7.6.20) per concludere che

$$\left(1 + \frac{n - 4}{n^2 + 5}\right)^{\frac{n^2 + 5}{n - 4}} \rightarrow e.$$

Possiamo applicare il Teorema con $a_n = \left(1 + \frac{n - 4}{n^2 + 5}\right)^{\frac{n^2 + 5}{n - 4}} \rightarrow e$, $b_n = 3n \frac{n - 4}{n^2 + 5} \rightarrow 3$, ovvero

$$\left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 5}\right)^{3 \cdot n} = \left[\left(1 + \frac{n - 4}{n^2 + 5}\right)^{\frac{n^2 + 5}{n - 4}}\right]^{3n \frac{n - 4}{n^2 + 5}} \rightarrow e^3$$

Se ne deduce che

$$\lim_n \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 5}\right)^{3 \cdot n} = e^3.$$

ESERCIZI: Calcolare i seguenti limiti

$$\begin{aligned} \lim_n (n^n)^{\frac{1}{n}}, \quad \lim_n (n^n)^{\frac{n+1}{n^2+e^{-n}}}, \quad \lim_n \left(n^{\frac{n^2+1}{n+e^{-n}}}\right)^{\frac{3n+1}{n^2+e^{-n}}}, \quad \lim_n (n^n)^{\frac{1}{\log(n)}}, \quad \lim_n (n^n)^{\frac{3n+1}{n^3+e^{-n}}}; \\ \lim_n \left(1 \pm \frac{1}{n^2}\right)^{\mp n}, \quad \lim_n \left(1 \pm \frac{1}{n^2}\right)^{\mp n^3}, \quad \lim_n \left(1 \pm \frac{5}{n^2}\right)^{\mp n^2}. \end{aligned}$$

NOTA: Il calcolo degli ultimi tre limiti può essere omesso. In particolare, il calcolo di alcuni degli ultimi tre limiti risulta notevolmente semplificato se si considera che la (7.6.20) continua a valere anche se

$a_n \rightarrow -\infty$ (Dimostrare per esercizio). Si suggerisce di eseguire il calcolo dei tre limiti suddetti, inizialmente senza l'ausilio di questa proprietà.

ESERCIZI: Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_n \frac{(n+5)! \cdot (n+\pi)^{(n+2)}}{n^{n+6}[(n+1)! + 5^n]}, \quad \lim_n \frac{(n+3)^{n+1} \log(n)}{n(n^n \log(n) + 1)},$$

$$\lim_n \frac{(n+3)^{n+1} \log(n) - (n!) \sin(3n+2) \cos(n)}{n\sqrt{\log(n)}(n^n \sqrt{\log(n)} - 4 \arctan(\log(n)))}.$$

Dimostrazione della (7.3.1) per $\alpha \neq 1, \beta \neq 1, \gamma \neq 1$.

Consideriamo il caso $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma \geq 1$. Si ha (ponendo $b = a^{\frac{\beta}{\alpha}} > 1$)

$$\frac{a^{\beta n^\gamma}}{n^\alpha} = \left(\frac{a^{\frac{\beta}{\alpha} n^\gamma}}{n} \right)^\alpha \geq \left(\frac{b^n}{n} \right)^\alpha, \quad (7.6.21)$$

la disuguaglianza seguendo dal fatto che $n^\gamma \geq n$ se $\gamma \geq 1$ e $n \in \mathbb{N}$. Osserviamo ora che

$$\forall M > 0, \quad \left(\frac{b^n}{n} \right)^\alpha > M \iff \frac{b^n}{n} > M^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (7.6.22)$$

Dato che $b > 1$ e $\alpha > 0$, possiamo applicare la (7.3.5) con a sostituito da b e M sostituito da $M^{\frac{1}{\alpha}}$. Possiamo allora concludere che

$$\forall M > 0, \quad \frac{a^{\beta n^\gamma}}{n^\alpha} \geq \left(\frac{b^n}{n} \right)^\alpha > M, \quad \forall n > \nu_{M^{\frac{1}{\alpha}}, b}.$$

La (7.3.1) è dimostrata.

Osservazione

Osserviamo che, avendo a disposizione la (7.3.2), non è necessario usare la (7.3.5) come sopra per dimostrare la (7.3.1). Infatti, dato che $b > 1$, dalla (7.3.2) e dalla definizione di limite si ha

$$\forall R > 0, \quad \exists \mu_R \in \mathbb{N} : \left(\frac{b^n}{n} \right) > R \quad \forall n > \mu_R.$$

Sia $R_M = 2M^{\frac{1}{\alpha}}$ e $\nu_M = \mu_{R_M}$. Si ha $R_M > M^{\frac{1}{\alpha}}$, e usando la (7.6.22)

$$\forall M > 0, \quad \frac{a^{\beta n^\gamma}}{n^\alpha} \geq \left(\frac{b^n}{n} \right)^\alpha > M, \quad \forall n > \nu_M.$$

Si usa riassumere questo argomento dicendo che la (7.3.2) implica che, per ogni $M > 0$, $\frac{b^n}{n} > M^{\frac{1}{\alpha}}$ è verificata per ogni n sufficientemente grande. $\square$

Per dimostrare la (7.3.1) per $0 < \gamma < 1$ osserviamo innanzitutto che

$$\frac{a^{\beta n^\gamma}}{n^\alpha} = \left(\frac{a^{\frac{\beta}{\alpha} n^\gamma}}{n} \right)^\alpha = \left(\frac{b^{n^\gamma}}{n} \right)^\alpha, \quad (7.6.23)$$

con $b = a^{\frac{\beta}{\alpha}} > 1$. Usando l'osservazione precedente, possiamo allora supporre senza perdita di generalità che $\alpha = 1$ e $\beta = 1$.

Dimostriamo preliminarmente che per ogni $x > 0$ si ha,

$$\left(1 + \frac{x}{k+1} \right)^{k+1} > \left(1 + \frac{x}{k} \right)^k, \quad (7.6.24)$$

per ogni $k \geq 1$. La (7.6.24) è equivalente a

$$\left(\frac{k(k+1+x)}{(k+1)(k+x)} \right)^k > \left(\frac{k+1}{k+1+x} \right).$$

Sommando e sottraendo 1 nelle due parentesi otteniamo

$$\left(1 - \frac{x}{(k+1)(k+x)} \right)^k > \left(1 - \frac{x}{k+1+x} \right). \quad (7.6.25)$$

Si osserva anche che

$$k(k+1+x) = (k+1)(k+x) - x < (k+1)(k+x), \quad \forall x > 0. \quad (7.6.26)$$

Sia

$$y_k = -\frac{x}{(k+1)(k+x)}.$$

Dato che $x > 0$ si verifica senza difficoltà che $y_k \geq -\frac{x}{2(1+x)} > -1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Dalla disuguaglianza di Bernoulli (vedere la (6.1) in [B] §6.2)

$$(1+y)^k \geq (1+ky), \quad y > -1, \quad k \in \mathbb{N},$$

con $y = y_k$ si ha

$$(1+y_k)^k = \left(1 - \frac{x}{(k+1)(k+x)} \right)^k \geq (1+ky_k) = \left(1 - \frac{kx}{(k+1)(k+x)} \right). \quad (7.6.27)$$

D'altra parte, usando la (7.6.26) si verifica subito che

$$1 - \frac{kx}{(k+1)(k+x)} > 1 - \frac{x}{k+1+x}, \quad \forall x > 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (7.6.28)$$

Dalle (7.6.27) e (7.6.28) otteniamo la (7.6.25). Ma la (7.6.25) è equivalente alla (7.6.24) e allora possiamo anche concludere che per ogni $x > 0$

$$e^x > \left(1 + \frac{x}{k} \right)^k,$$

per ogni $k \geq 1$, dove si è usata la (7.6.20) con $a_k = \frac{k}{x}$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{k} \right)^k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{a_k} \right)^{x a_k} = \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{a_k} \right)^{a_k} \right)^x = e^x.$$

A questo punto osserviamo che,

$$a^{n^\gamma} = e^{dn^\gamma}, \quad d = \log_a e > 0.$$

Sia $n \in \mathbb{N}$ fissato e $x = dn^\gamma > 0$. Sia $k_0 \in 2\mathbb{N} : \frac{\gamma}{2}k_0 \geq 2$. Dalla formula del Binomio di Newton [B] §6, si ha allora

$$e^{dn^\gamma} = e^x > \left(1 + \frac{x}{k_0} \right)^{k_0} > \left(\frac{k_0}{\frac{k_0}{2}} \right) \left(\frac{x}{k_0} \right)^{\frac{k_0}{2}} = \left(\frac{k_0}{\frac{k_0}{2}} \right) \left(\frac{dn^\gamma}{k_0} \right)^{\frac{k_0}{2}} = C_0 n^{\frac{\gamma}{2}k_0} \geq C_0 n^2, \quad \forall n \geq 1,$$

con

$$C_0 = \left(\frac{k_0}{\frac{k_0}{2}} \right) \frac{d^{\frac{k_0}{2}}}{k_0^{\frac{k_0}{2}}}.$$

Dato che C_0 dipende solo da k_0 e d concludiamo che per ogni $M > 0$

$$\frac{a^{n^\gamma}}{n} = \frac{e^{dn^\gamma}}{n} \geq C_0 n > M,$$

definitivamente in n . ■

Dimostrazione della (7.3.6) per $\alpha \neq 1, \beta \neq 1, \gamma \neq 1$.

Si tratta di far vedere che

$$\forall M > 0, \quad \exists \nu_M \in \mathbb{N} : \frac{n^\alpha}{(\log_a(n^\beta))^\gamma} > M, \quad \forall n > \nu_M.$$

Osserviamo che per ogni $n \geq 2$

$$n^\alpha > M(\log_a(n^\beta))^\gamma \iff a^{n^{\frac{\alpha}{\gamma}}} > a^{M^{\frac{1}{\gamma}} \log_a(n^\beta)} \iff a^{n^{\frac{\alpha}{\gamma}}} > n^{\beta M^{\frac{1}{\gamma}}} \iff a^{n^{\frac{\alpha}{\gamma}}} > n^{\beta M^{\frac{1}{\gamma}}}.$$

Usando la (7.3.1) (con γ sostituito da $\frac{\alpha}{\gamma} > 0$ e α sostituito da $\beta M^{\frac{1}{\gamma}}$) concludiamo che, per ogni $M > 0$ fissato, $n^\alpha > M(\log_a(n^\beta))^\gamma$ è verificata per ogni n sufficientemente grande. La (7.3.6) è dimostrata. ■

Dimostrazione della (7.3.7) per $\alpha \neq 1, \beta \neq 1$.

Consideriamo ora il caso $\alpha > 0, \beta > 0, a > 1$. Si ha, ponendo $b = a^{\frac{\beta}{\alpha}} > 1$

$$\frac{(n!)^\alpha}{a^{\beta n}} = \left(\frac{n!}{a^{\frac{\beta}{\alpha} n}} \right)^\alpha = \left(\frac{n!}{b^n} \right)^\alpha.$$

Dato che

$$\forall M > 0, \quad \left(\frac{n!}{b^n} \right)^\alpha > M \iff \frac{n!}{b^n} > M^{\frac{1}{\alpha}},$$

possiamo concludere anche in questo caso che questa relazione e la (7.3.8) implicano la (7.3.7).