NOTA SUL CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO PER GLI INTEGRALI IMPROPRI.

TEOREMA [CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO] Siano fissati $-\infty < a < b \leq +\infty$ e siano $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, $g : [a, b) \to \mathbb{R}$, due funzioni Riemann integrabili in (a, t) per ogni $t \in (a, b)$. Supponiamo che si abbia:
(a) $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$, definitivamente per $x \to b^-$;

(b) $\displaystyle\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \quad L \in [0, +\infty]$.
Allora si ha:
(i) $L \in (0, +\infty)$. $\int\limits_a^b f(x)dx$ converge (diverge) se e solo se $\int\limits_a^b g(x)dx$ converge (diverge).
(ii) $L = 0$. Se $\int\limits_a^b f(x)dx$ diverge allora $\int\limits_a^b g(x)dx$ diverge, mentre se $\int\limits_a^b g(x)dx$ converge allora $\int\limits_a^b f(x)dx$ converge.
(iii) $L = +\infty$. Se $\int\limits_a^b f(x)dx$ converge allora $\int\limits_a^b g(x)dx$ converge, mentre se $\int\limits_a^b g(x)dx$ diverge allora $\int\limits_a^b f(x)dx$ diverge.

Dimostrazione.
Per semplicità trattiamo solo il caso $b = +\infty$.
(i) Per ipotesi si ha,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, x_\varepsilon \geq a \,:\, L - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < L + \varepsilon, \ \forall x > x_\varepsilon.$$

Dato che $g(x) \geq 0$ si ha in particolare,

$$(L - \varepsilon)g(x) < f(x) < g(x)(L + \varepsilon), \ \forall x > x_\varepsilon.$$

Dato che $L \in (0, +\infty)$ possiamo scgliere $\varepsilon = \frac{L}{2}$ e concludere che,

$$\frac{L}{2}g(x) < f(x) < g(x)\frac{3L}{2}, \ \forall x > x_\varepsilon.$$

Dalla disuguaglianza di destra e dal Teorema del confronto per gli integrali impropri segue che se $\int\limits_a^b f(x)dx$ diverge allora $\int\limits_a^b g(x)dx$ diverge, mentre se $\int\limits_a^b g(x)dx$ converge allora $\int\limits_a^b f(x)dx$ converge. Dalla disuguaglianza di sinstra e dal Teorema del confronto per gli integrali impropri segue che se $\int\limits_a^b f(x)dx$ converge allora $\int\limits_a^b g(x)dx$ converge, mentre se $\int\limits_a^b g(x)dx$ diverge allora $\int\limits_a^b f(x)dx$ diverge.
(ii) Per ipotesi si ha

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, x_\varepsilon \geq a \,:\, \frac{f(x)}{g(x)} < \varepsilon, \ \forall x > x_\varepsilon.$$

Dato che $g(x) \geq 0$ e $f(x) \geq 0$ si ha in particolare,

$$0 \leq f(x) < g(x)\varepsilon, \ \forall x > x_\varepsilon.$$

Dal Teorema del confronto per gli integrali impropri segue che se $\int_a^b g(x)dx$ converge allora $\int_a^b f(x)dx$ converge, mentre se $\int_a^b f(x)dx$ diverge allora $\int_a^b g(x)dx$ diverge.

(iii) Per ipotesi si ha

$$\forall\, M > 0,\ \exists\, x_{_M} \geq a\ :\ \frac{f(x)}{g(x)} > M,\ \forall\, x > x_{_M}.$$

Dato che $g(x) \geq 0$ si ha in particolare,

$$f(x) > g(x)M,\ \forall\, x > x_{_M}.$$

Dal Teorema del confronto per gli integrali impropri segue che se $\int_a^b g(x)dx$ diverge allora $\int_a^b f(x)dx$ diverge, mentre se $\int_a^b f(x)dx$ converge allora $\int_a^b g(x)dx$ converge. ■