NOTA SULLA FORMULA DI EULERO CON ESEMPI DI SERIE DI TAYLOR.

Consideriamo la formula del Polinomio di Taylor di ordine $2n$, con il Resto di Lagrange, per la funzione $\cos(\theta)$, $\theta \in [0, +\infty)$, ovvero,

$$\cos(\theta) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} + R_{2n}(\theta), \tag{0.1}$$

dove, per θ fissato in $[0, +\infty)$ si ha,

$$R_{2n}(\theta) = \frac{\left(D^{(2n+1)} \cos(\theta)\big|_{\theta=\xi} \right)}{(2n+1)!} \theta^{2n+1},$$

con ξ un valore (non esplicitamente noto) in $[0, \theta)$, $\xi \in [0, \theta)$. Chiaramente si ha,

$$0 \leq |R_{2n}(\theta)| \leq \sup_{\xi \in [0,\theta)} |R_{2n}(\theta)| \leq \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} \to 0, \; n \to +\infty,$$

e dunque in particolare, per θ fissato in $[0, +\infty)$, si ha $R_{2n}(\theta) \to 0$, $n \to +\infty$. Riscrivendo la (0.1) nella forma,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} = \cos(\theta) - R_{2n}(\theta),$$

e passando al limite per $n \to +\infty$, concludiamo che,

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} = \cos(\theta).$$

In altri termini il limite della somma a sinistra coincide con $\cos(\theta)$. Tale quantità si inidica con,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} := \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\theta^{2k}}{(2k)!},$$

e prende il nome di serie di Taylor relativa alla funzione coseno. Con argomenti simili si dimostra che anche le funzioni seno ed esponenziale si possono rappresentare mediante la loro serie di Taylor, ovvero, per ogni $\theta \in \mathbb{R}$, si ha,

$$\cos(\theta) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin(\theta) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad e^{\theta} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\theta^k}{k!}. \tag{0.2}$$

La formula di Taylor per la funzione esponenziale è il punto di partenza per la definizione della funzione esponenziale in campo complesso. Se $z = x + iy \in \mathbb{C}$ si definisce,

$$e^z = e^{x+iy} := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x+iy)^k}{k!}.$$

Verifichiamo che se $x = 0$, allora ritroviamo la formula di Eulero con $y = \theta$.

$$e^{i\theta} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (i)^{2k} \frac{(\theta)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} (i)^{2k+1} \frac{(\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(i\theta)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k i \frac{(\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos(\theta) + i \sin(\theta),$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato gli sviluppi in serie (0.2).
Utilizzando la rappresentazione per serie si dimostra anche che, per ogni $x + iy \in \mathbb{C}$, si ha,

$$e^{x+iy} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x+iy)^k}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x)^k}{k!} \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(iy)^k}{k!} \right) = e^x e^{iy}.$$