LEZIONI 04-05

Contents

3. LA RETTA REALE ESTESA.

3.1. I simboli $\pm\infty$. Primi esempi di Forme Indeterminate.

Abbiamo visto che i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ superiormente(inferiormente) limitati ammettono estremo superiore(inferiore) in $\mathbb{R}$. Viceversa gli insiemi superiormente(inferiormente) non limitati non ammettono estremo superiore(inferiore) in $\mathbb{R}$. Si introducono allora due "elementi/simboli", che indicheremo con $-\infty$ e $+\infty$, che "completano" $\mathbb{R}$, nel senso che segue.

Definizione[RETTA REALE ESTESA]
Si definisce **Retta Reale Estesa**, *l 'insieme* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *dotato della relazione d' ordine totale "$\leq$", verificante quindi le* $(i) - (ii) - (iii)$ *del* §2.1 *e inoltre*

$$(iv) \quad -\infty \leq x \leq +\infty, \ \ \forall\, x \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Segue dalla definizione in particolare che $-\infty < x < +\infty, \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$, e che ogni insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ superiormente non limitato in $\mathbb{R}$ **ammette estremo superiore in** $\overline{\mathbb{R}}$, e si pone in questo caso $\sup A = +\infty$, e che ogni insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ inferiormente non limitato in $\mathbb{R}$ **ammette estremo inferiore in** $\overline{\mathbb{R}}$, e si pone in questo caso $\inf A = -\infty$.

Le operazioni fondamentali definite in $\mathbb{R}$ (somma, prodotto etc...) non si estendono con le stesse regole ai simboli $\pm\infty$. Valgono invece le seguenti regole:
Se $x \in \mathbb{R}$, allora

(a) $+\infty \pm x = +\infty, \ \ -\infty \pm x = -\infty, \ \ \frac{x}{\pm\infty} = 0;$

(b) Se $x > 0$, allora $\pm\infty \cdot x = \pm\infty;$

(c) Se $x < 0$, allora $\pm\infty \cdot x = \mp\infty;$

(d) $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty, \ \ (\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty.$

Viceversa sono da considerarsi NON DEFINITE le seguenti espressioni, dette anche **Forme Indeterminate**:

(i) $(+\infty) \pm (\mp\infty), \ \ \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \ \ \frac{\mp\infty}{\pm\infty};$

(ii) $\pm\infty \cdot 0.$

Esempio 4. $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq \pi\}$. $\max A = \pi$ e $\inf A = -\infty$.

Esempio 5. $A = \mathbb{N}$. $\min A = 1$ e $\sup A = +\infty$.

Esempio 6. $A = \mathbb{Z}$. $\inf A = -\infty$ e $\sup A = +\infty$.

3.2. **Intervalli.**
Definizione[INTERVALLO]
Un intervallo $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ è un insieme che verifica

$$x \in I, \;\; y \in I, \;\; x < z < y \Longrightarrow z \in I,$$

ovvero I è un intervallo se comunque dati due punti in I, allora tutti i punti tra loro compresi appartengono a I.

Un intervallo I può essere solo di quattro tipi. Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}, \;\; a \leq b$.

(*i*) $I = [a, b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a \leq x \leq b\}$;[INTERVALLO CHIUSO]

(*ii*) $I = (a, b) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a < x < b\}$;[INTERVALLO APERTO]

(*iii*) $I = [a, b) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a \leq x < b\}$;[INTERVALLO CHIUSO IN a, APERTO IN b]

(*iv*) $I = (a, b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a < x \leq b\}$;[INTERVALLO APERTO IN a, CHIUSO IN b]

È chiaro che in ognuno dei quattro casi si ha $\inf I = a$ e $\sup I = b$, che sono detti **estremi** dell' intervallo.
Se I è un intervallo limitato la quantità

$$\sup I - \inf I$$

si chiama **ampiezza** di I.

Esempio 1. $A = \{x \in \mathbb{Q} : -1 \leq x < 1\} = \mathbb{Q} \cap [-1, 1)$, non è un intervallo.

Esempio 2. $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 - 2 \leq 0\} = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 - 2 < 0\} = \mathbb{Q} \cap (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, non è un intervallo.

Esempio 3. $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2 \leq 0\} = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}], \;\; \sup I - \inf I = 2\sqrt{2}$.

Esempio 4. $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq \pi\} = (-\infty, \pi]$.

Esempio 5. $A = \mathbb{N}$ non è un intervallo.

Esempio 6. $A = \mathbb{Z}$ non è un intervallo.

ESERCIZI: Determinare il più piccolo intervallo che contiene gli insiemi:
$A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, $A = \left\{\frac{(-1)^n}{n+3} : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}$, $A = \left\{\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) : n \in \mathbb{Z}\right\}$, $A = \left\{1 - \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$,
$A = \{(-1)^n n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, $A = \left\{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) : n \in \mathbb{Z}\right\}$.

4. **FUNZIONI.**

4.1. **Funzioni, dominio, codominio, immagine, grafico.**

Definizione[FUNZIONE, DOMINIO, IMMAGINE, GRAFICO]
Siano X, Y due insiemi non vuoti. Una **funzione** *da X in Y è una applicazione che ad ogni elemento $x \in X$ associa uno ed un solo elemento $y \in Y$, detto anche* **valore** *della funzione in x.*
L' insieme X si dice **dominio** *(o dominio di definizione o insieme di definizione) della funzione.*
L' insieme Y si dice **codominio** *della funzione. Si usa specificare una funzione scrivendo:*

$$f : X \mapsto Y,$$

$$y = f(x).$$

L' insieme dei valori assunti dalla funzione si dice **immagine** *della funzione e si indica con* $\mathrm{Im}(f)$,

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x),\ x \in X\} = \{y \in Y :\ \exists\, x \in X : y = f(x)\} \subseteq Y.$$

Se $y \in \mathrm{Im}(f)$ e $f(x) = y$, il valore x si dice **controimmagine** *tramite f di y.*
L' insieme delle coppie ordinate formate dagli elementi del dominio e dai corrispondenti valori della funzione si dice **grafico** *della funzione e si indica con* $\mathrm{graf}(f)$,

$$\mathrm{graf}(f) = \{(x, y) \in X \times Y : (x, y) = (x, f(x))\} \subseteq X \times Y.$$

Osservazione
In tutti i casi in cui viene specificata solo la applicazione $f(x)$ e non è specificato il dominio, si definisce il dominio di f come il più grande insieme dove f è ben definita. Tale insieme si dice **dominio naturale** della funzione e si indica con $\mathrm{dom}(f)$,

$$\mathrm{dom}(f) = \{x \in X :\ \ f(x)\ \text{ è ben definita}\}.$$

$\square$

Osservazione
Una notazione di uso comune per specificare una funzione è anche,

$$f : X \mapsto Y,$$

$$x \mapsto f(x),$$

oppure

$$y = f(x),\ \ x \in X,$$

senza specificare il codominio. $\square$

NOTA
Per la prima parte del corso, andremo a considerare solo funzioni reali (ovvero il cui codominio è $\mathbb{R}$) di variabile reale (ovvero il cui dominio X verifica $X \subseteq \mathbb{R}$),

$$f : X \mapsto \mathbb{R}.$$

4.2. **Dominio naturale e immagine di alcune funzioni elementari.**

Esempio. [POTENZE CON ESPONENTE INTERO POSITIVO]
$f(x) = x^2$, $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$.
$f(x) = x^3$, $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Esempio. [POTENZE CON ESPONENTE INTERO NEGATIVO]
$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$, $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$, $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $\mathrm{Im}(f) = (0, +\infty)$.

Esempio. [RADICI]
$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $\mathrm{dom}(f) = [0, +\infty)$, $\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$.
$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$, $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Esempio. [LOGARITMI]
$a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $f(x) = \log_a x$, $\mathrm{dom}(f) = (0, +\infty)$, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Esempio. [ESPONENZIALI]
$b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $f(x) = b^x$, $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(f) = (0, +\infty)$.

Esempio. [SENI e COSENI]
$f(x) = \sin x$, $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(f) = [-1, 1]$.
$f(x) = \cos x$, $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(f) = [-1, 1]$.

Esempio. [TANGENTE]
$f(x) = \tan x$, $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}(2k+1),\ k \in \mathbb{Z}\}$, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Esempio. [ARCOTANGENTE]
$f(x) = \arctan x$, $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(f) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Osservazione
Se $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ con m e n primi tra loro, allora $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$ se n è dispari e $\mathrm{dom}(f) = [0, +\infty)$ se n è pari. $\square$

Esercizio. Determinare il dominio di $f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$.
$\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Esercizio. Determinare il dominio di $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$.
$\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x \geq 0\} = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$.

Esercizio. Determinare il dominio di $f(x) = \log_2 (x^2 - x)$.
$\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x > 0\} = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

Esercizio. Determinare il dominio di $f(x) = \log_{10} [\log_2 (x^2 - x)]$.
$\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : \log_2 (x^2 - x) > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : (x^2 - x) > 1\} = \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$.

Esercizio. Determinare il dominio di $f(x) = \sqrt{\log_2 (x^2 - x)}$.
$\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : \log_2 (x^2 - x) \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : (x^2 - x) \geq 1\} = \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$.

ESERCIZI: Determinare il dominio di definizione di:
$f(x) = x^2 - 2$, $f(x) = \frac{1}{2-x^2}$, $f(x) = \sqrt{2-x^2}$, $f(x) = \log_{10}(2-x^2)$, $f(x) = \log_2[\log_{10}(2-x^2)]$,
$f(x) = \sqrt{\log_2(2-x^2)}$.

Definizione[INSIEMI SIMMETRICI, FUNZIONI PARI/DISPARI]
Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un **insieme simmetrico***, ovvero*

$$x \in I \Longrightarrow -x \in I.$$

Una funzione $f : I \mapsto \mathbb{R}$ si dice **pari***, se*

$$f(-x) = f(x),\ \forall\, x \in I,$$

si dice **dispari***, se*

$$f(-x) = -f(x),\ \forall\, x \in I.$$

Esempio. Se $a \in (0, +\infty]$ e $I = (-a, a)$ o $I = [-a, a]$, allora I è un intervallo simmetrico. Inoltre $f(x) = x^2, \forall\, x \in I$ è pari, mentre $f(x) = x^3, \forall\, x \in I$ è dispari. Più in generale, $f(x) = x^n, \forall\, x \in I$ è pari se $n \in 2\mathbb{N}$ ed è dispari se $n \in 2\mathbb{N} - 1$.

Osservazione
Osserviamo che non tutti gli insiemi simmetrici sono intervalli. Per esempio l'insieme $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ è simmetrico ma non è un intervallo. $\square$

ESERCIZIO: Dire quali delle funzioni elementari definite negli ESEMPI (NON negli ESERCIZI) di cui sopra sono pari/dispari.

4.3. **Funzioni limitate. Estremi di Funzioni.**

Definizione[FUNZIONI LIMITATE]
Sia $f : X \to \mathbb{R}$. f si dice:
superiormente limitata *se* $\mathrm{Im}(f)$ *è superiormente limitata, ovvero se*

$$\exists\, M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M,\ \forall\, x \in X;$$

superiormente illimitata *se* $\mathrm{Im}(f)$ *è superiormente illimitata, ovvero se*

$$\forall\, M \in \mathbb{R},\ \exists\, x \in X : f(x) > M;$$

limitata *se* $\mathrm{Im}(f)$ *è superiormente e inferiormente limitata, ovvero se*

$$\exists\, M \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq M,\ \forall\, x \in X.$$

ESERCIZIO: Dare analoghe definizioni di funzione inferiormente limitata/illimitata.

Definizione[ESTREMO SUPERIORE/MASSIMO ASSOLUTO DI FUNZIONI REALI]
Sia $f : X \to \mathbb{R}$. Si definisce **estremo superiore** *di f su X e si indica con $\sup\limits_X f$, l' estremo superiore di* $\mathrm{Im}(f)$*,*

$$\sup_X f = \sup \mathrm{Im(f)} = \sup\{f(x),\ x \in X\}.$$

Si definisce **massimo assoluto** *di f su X e si indica con $\max\limits_X f$, il massimo (se esiste) di* $\mathrm{Im}(f)$*,*

$$\max_X f = \max \mathrm{Im(f)} = \max\{f(x),\ x \in X\}.$$

Osservazione
Segue dalla definizione di sup che o f è superiormente illimitata, e allora $\sup_X f = +\infty$, oppure

$$\mathbb{R} \ni \mu = \sup_X f \iff \begin{cases} f(x) \le \mu, \ \ \forall\ x \in X, \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, x \in X :\ f(x) > \mu - \varepsilon. \end{cases}$$

Segue dalla definizione di max che

$$\mathbb{R} \ni \mu = \max_X f \iff \begin{cases} f(x) \le \mu, \ \ \forall\ x \in X, \\ \exists\, x \in X :\ f(x) = \mu. \end{cases}$$

$\square$

Definizione[ESTREMO INFERIORE/MINIMO ASSOLUTO DI FUNZIONI REALI]
Sia $f : X \to \mathbb{R}$. Si definisce **estremo inferiore** *di f su X e si indica con $\inf_X f$, l' estremo inferiore di* $\mathrm{Im}(f)$*,*

$$\inf_X f = \inf \mathrm{Im(f)} = \inf\{f(x),\ x \in X\}.$$

Si definisce **minimo assoluto** *di f su X e si indica con $\min_X f$, il minimo (se esiste) di* $\mathrm{Im}(f)$*,*

$$\min_X f = \min \mathrm{Im(f)} = \min\{f(x),\ x \in X\}.$$

ESERCIZIO: Caratterizzare $\inf f / \min f$ come fatto nell' osservazione di cui sopra per $\sup f / \max f$.

Esempio.
$f(x) = \arctan x$, $X = \mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(f) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Quindi $\inf_{\mathbb{R}} f = -\frac{\pi}{2}$, ma non è minimo e $\sup_{\mathbb{R}} f = +\frac{\pi}{2}$, ma non è massimo.

Esercizio. Determinare gli estremi di $f(x) = \cos x$ su:
$X = \mathbb{R}$. Si ha $\max f = 1$, $\min f = -1$.
$X = [0, \frac{\pi}{2})$. Si ha $\max f = 1$, $\inf f = 0$ e non è minimo.
$X = (0, \frac{\pi}{2}]$. Si ha $\sup f = 1$ e non è massimo, $\min f = 0$.
$X = (\frac{\pi}{2}, \frac{5}{4}\pi]$. Si ha $\sup f = 0$ e non è massimo, $\min f = -1$.

Esercizio. Determinare gli estremi di $f(x) = 2 - x^2$ su:
$X = \mathbb{R}$. Si ha $\inf f = -\infty$, $\max f = 2$.
$X = [1, 2]$. Si ha $\max f = 1$, $\min f = -2$.
$X = [-1, 2]$. Si ha $\max f = 2$, $\min f = -2$.

ESERCIZI: Determinare sup/inf/max/min delle funzioni elementari di cui agli ESEMPI del §4.2 (NON agli ESERCIZI).

4.4. **Funzioni Monotone.**

Definizione[FUNZIONI MONOTONE CRESCENTI/STRETTAMENTE CRESCENTI]
Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice **monotona crescente (strettamente crescente)***, se:*

$$x < y \Longrightarrow f(x) \le f(y)\ (f(x) < f(y)).$$

Esempi:$f(x) = x,\ f(x) = x^3,\ f(x) = e^x,\ f(x) = \log_2 x$, sono strettamente crescenti. La funzione **parte positiva**, definita come

$$f(x) = x^+ := \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

è crescente.

Definizione[FUNZIONI MONOTONE DECRESCENTI/STRETTAMENTE DECRESCENTI]
Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice **monotona decrescente (strettamente decrescente)***, se:*

$$x < y \Longrightarrow f(x) \geq f(y) \; (f(x) > f(y)).$$

Esempi: $f(x) = -x$, $f(x) = -x^3$, $f(x) = -e^x$, $f(x) = -\log_2 x$, sono strettamente decrescenti. La funzione **parte negativa**, definita come

$$f(x) = x^- := \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

è decrescente.

Esempio. Se $f(x) = x^2$, $x \in [0, +\infty)$ allora f è strettamente crescente.
Se $f(x) = x^2$, $x \in (-\infty, 0]$ allora f è strettamente decrescente.
Se $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, allora f non è monotona.

La funzione **modulo**, definita come

$$f(x) = |x| := \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

non è monotona.

Alcune importanti proprietà della funzione modulo sono:

$$\begin{array}{cc} |x| \geq 0 & |x| = 0 \iff x = 0 \\ |x + y| \leq |x| + |y| & \big||x| - |y|\big| \leq |x - y| \\ |x \cdot y| = |x| \cdot |y| & \left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \; \textit{se } y \neq 0. \end{array}$$

NOTA Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ è non decrescente(strettamente crescente) se e solo se

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geq 0 \left(\frac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0 \right),$$

per ogni $x, y \in X$ con $x \neq y$.

Osservazione[ESTREMI DI FUNZIONI MONOTONE SU DI UN INTERVALLO]
Sia $f : [a, b] \to R$ crescente. Allora $\min f = f(a)$, $\max f = f(b)$.
Sia $f : (a, b) \to R$ strettamente crescente. Allora f non ammette né massimo né minimo.
Infatti, nel primo caso, si ha

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b), \quad \forall \, x \in [a, b],$$

e quindi è immediato verificare che $\min\limits_{[a,b]} f = f(a)$, $\max\limits_{[a,b]} f = f(b)$.
Nel secondo caso, supponiamo per assurdo che esista il minimo di f. In particolare $\min\limits_{[a,b]} f = f(x)$ per qualche $x \in (a, b)$. D' altra parte $x \in (a, b) \Longrightarrow a < x < b$ e quindi se $y \in (a, b)$ e $a < y < x$ si ha $f(y) < f(x)$ per la stretta monotonia di f, fatto questo che contraddice la minimalità di $f(x)$. Il ragionamento per il massimo di f in (a, b) è analogo. □

ESERCIZIO: Estendere questo risultato agli intervalli $(a, b]$, $(b, a]$ e alle funzioni decrescenti/strettamente decrescenti.

Esempio. Sia $f(x) = x^3 + e^x + \log_2 x$, $x \in (1, 2]$. Dato che la somma di funzioni monotone crescenti è monotona crescente, f è monotona crescente in $(1, 2]$. Quindi il minimo non esiste e $\max f = f(2)$.