

SOLUZIONI ESERCIZI ASSEGNATI

CONTENTS

1. SOLUZIONI ESERCIZI DEL §8.3.

1

[B] Dispense a cura del Docente. ("http://www.mat.uniroma2.it/~bartoluc/AMI(ING)0809.html")

1. SOLUZIONI ESERCIZI DEL §8.3.

ESERCIZI: Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi x + x^{\frac{3}{2}}}{e x^4 + x^9} \sin\left(\frac{3x^5 + 2x^8}{x^2 + 6x^{\frac{5}{2}}}\right), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-4x} \sin(e^{-4x}).$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (\log|x|)^4 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{(\log|x|)^4}\right)\right)$$

Soluzione:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\pi x + x^{\frac{3}{2}}}{e x^4 + x^9} \sin\left(\frac{3x^5 + 2x^8}{x^2 + 6x^{\frac{5}{2}}}\right) = \frac{3\pi}{e}.$

Si osserva innanzitutto che il problema non è ben posto nel limite per $x \rightarrow 0^-$, perché $x^{\frac{3}{2}}$ e $x^{\frac{5}{2}}$ non sono definite per $x < 0$. Si considera quindi solo il limite per $x \rightarrow 0^+$. Dato che, per $x \rightarrow 0^+$, si ha

$$\frac{3x^5 + 2x^8}{x^2 + 6x^{\frac{5}{2}}} = \frac{x^5}{x^2} \cdot \frac{3 + 2x^3}{1 + 6\sqrt{x}} = x^3 \cdot \frac{3 + 2x^3}{1 + 6\sqrt{x}} \rightarrow 0 \cdot \frac{1 + 0}{1 + 0} = 0,$$

e

$$\frac{\pi x + x^{\frac{3}{2}}}{e x^4 + x^9} = \frac{x}{x^4} \cdot \frac{\pi + \sqrt{x}}{e + x^5} = \frac{1}{x^3} \cdot \frac{\pi + \sqrt{x}}{e + x^5},$$

allora possiamo concludere che,

$$\left(\frac{\pi x + x^{\frac{3}{2}}}{e x^4 + x^9}\right) \left(\frac{3x^5 + 2x^8}{x^2 + 6x^{\frac{5}{2}}}\right) \frac{\sin\left(\frac{3x^5 + 2x^8}{x^2 + 6x^{\frac{5}{2}}}\right)}{\frac{3x^5 + 2x^8}{x^2 + 6x^{\frac{5}{2}}}} = \frac{1}{x^3} \cdot \frac{\pi + \sqrt{x}}{e + x^5} \cdot x^3 \cdot \frac{3 + 2x^3}{1 + 6\sqrt{x}} \frac{\sin\left(\frac{3x^5 + 2x^8}{x^2 + 6x^{\frac{5}{2}}}\right)}{\frac{3x^5 + 2x^8}{x^2 + 6x^{\frac{5}{2}}}} =$$
$$\frac{\pi + \sqrt{x}}{e + x^5} \cdot \frac{3 + 2x^3}{1 + 6\sqrt{x}} \frac{\sin\left(\frac{3x^5 + 2x^8}{x^2 + 6x^{\frac{5}{2}}}\right)}{\frac{3x^5 + 2x^8}{x^2 + 6x^{\frac{5}{2}}}} \rightarrow \frac{\pi + 0}{e + 0} \cdot \frac{3 + 0}{1 + 0} \cdot 1 = \frac{3\pi}{e}, \quad x \rightarrow 0^+.$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-4x} \sin(e^{-4x})$ non esiste.

Questo esercizio è più delicato. Osserviamo che il Teorema 8.8 in [B] §8.1 pg. 16, asserisce che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = L = \lim_{y \rightarrow y_0} f(y)$$

se $g(x) \rightarrow y_0$ e $g(x) \neq y_0$ definitivamente, e se esiste finito o infinito $\lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = L$. In questo caso, ponendo $g(x) = e^{-4x}$ e $f(y) = y \sin y$, si ha $e^{-4x} \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow -\infty$. Quindi, definendo $y_0 = +\infty$, si potrebbe pensare di applicare il Teorema cercando di calcolare direttamente $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(y)$. Ma in questo caso, questa operazione **non è giustificata**, perché $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(y)$ non esiste, come andiamo a dimostrare. Osserviamo che

$$\text{se } a_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}, \text{ si ha } f(a_n) = \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow +\infty, n \rightarrow +\infty$$

$$\text{se } b_n = 2n\pi + \frac{3\pi}{2}, \text{ si ha } f(a_n) = \left(2n\pi + \frac{3\pi}{2}\right) \sin\left(2n\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = -\left(2n\pi + \frac{3\pi}{2}\right) \rightarrow -\infty, n \rightarrow +\infty,$$

e quindi il limite di $f(y)$ per $y \rightarrow +\infty$ non esiste.

Usando le due successioni a_n e b_n , si può dimostrare in questo caso particolare, che anche il limite di $f(g(x))$ non esiste. Infatti, osserviamo che:

$$\text{se } c_n = -\frac{1}{4} \log\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right), \text{ si ha } f(g(c_n)) = \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow +\infty, n \rightarrow +\infty$$

$$\text{se } d_n = -\frac{1}{4} \log\left(2n\pi + \frac{3\pi}{2}\right), \text{ si ha } f(g(d_n)) = \left(2n\pi + \frac{3\pi}{2}\right) \sin\left(2n\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = -\left(2n\pi + \frac{3\pi}{2}\right) \rightarrow -\infty, n \rightarrow +\infty,$$

e quindi il limite dato non esiste.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{2}$.

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(y)}{y^2} = \frac{1}{2}.$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\log|x|)^4 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{(\log|x|)^4}\right)\right) = 0$.

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\log|x|)^4 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{(\log|x|)^4}\right)\right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(y)}{y} = 0.$$

ESERCIZI: Calcolare i seguenti limiti al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \sin(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha (1 - \cos(x)).$$

Soluzione:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \sin(x)$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \sin(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha+1} \frac{\sin(x)}{x} = \begin{cases} 0 \cdot 1 = 0, & \alpha + 1 > 0, \\ 1 \cdot 1 = 1, & \alpha + 1 = 0, \\ +\infty \cdot 1 = +\infty, & \alpha + 1 < 0. \end{cases}$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha (1 - \cos(x))$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha (1 - \cos(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha+2} \frac{(1 - \cos(x))}{x^2} = \begin{cases} 0 \cdot \frac{1}{2} = 0, & \alpha + 2 > 0, \\ 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, & \alpha + 2 = 0, \\ +\infty \cdot \frac{1}{2} = +\infty, & \alpha + 2 < 0. \end{cases}$$

ESERCIZI: Calcolare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha.$$

Soluzione.

Se $\alpha = 0$, l'argomento della parentesi è identicamente uguale a 1. Quindi in questo caso stiamo considerando il limite di $1^x = 1 \forall x \in \mathbb{R}$, che è certamente pari a $1 = e^0$. Se $\alpha > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y \cdot \alpha} = \left(\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right)^\alpha = e^\alpha,$$

dove si è usata la continuità della funzione $f(s) = s^\alpha$, $s > 0$. Se $\alpha < 0$,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow \mp\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y \cdot \alpha} = \left(\lim_{y \rightarrow \mp\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right)^\alpha = e^\alpha,$$

dove si è usata la continuità della funzione $f(s) = s^\alpha$, $s > 0$. Quindi il limite dato vale e^α .

Osserviamo che, in modo equivalente, se $\alpha \neq 0$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{x \log\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)} = \lim_{y \rightarrow 0^\pm} e^{\frac{1}{y} \log(1 + \alpha y)} = \lim_{t \rightarrow 0} e^{\frac{\alpha}{t} \log(1+t)} = e^{\alpha \cdot 1} = e^\alpha,$$

dove si è usata la continuità della funzione $f(s) = e^s$, $s \in \mathbb{R}$. Notare che in questo caso non è necessario distinguere i casi $\alpha > 0$ e $\alpha < 0$, perché si ha $t = \alpha y \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0^\pm$, indipendentemente dal segno di α .

ESERCIZIO. Calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(4 - e^x)^\pi - 4^\pi}{e^{2x}} = -\infty.$$

Soluzione.

$$\begin{aligned} \frac{(4 - e^x)^\pi - 4^\pi}{e^{2x}} &= 4^\pi \frac{\left(1 - \frac{1}{4}e^x\right)^\pi - 1}{e^{2x}} = 4^{\pi-1} \frac{e^x}{e^{2x}} (-1) \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{4}e^x\right)^\pi - 1}{-\frac{1}{4}e^x} = \\ &= -4^{\pi-1} e^{-x} \frac{\left(1 - \frac{1}{4}e^x\right)^\pi - 1}{-\frac{1}{4}e^x} \longrightarrow -4^{\pi-1} \cdot (+\infty) \cdot \pi = -\infty, \quad x \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

ESERCIZI: Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^x - 1)^2}{\sin(x) \log(1+x)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)^4}{(\sin(x))^3 \log(1+x)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\tan(x)}.$$

Soluzione.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^x - 1)^2}{\sin(x) \log(1+x)} = (\log 2)^2$.

Si ha,

$$\frac{(2^x - 1)^2}{\sin(x) \log(1+x)} = \frac{(e^{x \log 2} - 1)^2}{(x \log 2)^2} \frac{(x \log 2)^2}{x^2} \frac{x \cdot x}{\sin(x) \log(1+x)} =$$

$$\left(\frac{e^{x \log 2} - 1}{x \log 2} \right)^2 \cdot (\log 2)^2 \frac{1}{\frac{\sin(x) \log(1+x)}{x}} \rightarrow 1 \cdot (\log 2)^2 \cdot \frac{1}{1 \cdot 1} = (\log 2)^2, x \rightarrow 0.$$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)^4}{(\sin(x))^3 \log(1+x)} = 0$.

Si ha,

$$\frac{(\cos x - 1)^4}{(\sin(x))^3 \log(1+x)} = \frac{(\cos x - 1)^4}{(x^2)^4} \frac{(x^2)^4}{(x)^3 x} \frac{(x)^3 x}{(\sin(x))^3 \log(1+x)} =$$

$$\left(\frac{\cos x - 1}{x^2} \right)^4 \cdot x^4 \cdot \left(\frac{x}{\sin(x)} \right)^3 \frac{x}{\log(1+x)} \rightarrow \left(\frac{1}{2} \right)^4 \cdot 0 \cdot (1)^3 \cdot 1 = 0, x \rightarrow 0.$$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$.

Si ha,

$$\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x} \rightarrow 1 \cdot \frac{1}{1} = 1, x \rightarrow 0.$$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\tan(x)} = 3$.

Si ha,

$$\frac{\sin(3x)}{\tan(x)} = \frac{\sin(3x) \cos(x)}{\sin(x)} = \cos x \frac{\sin(3x)}{3x} \frac{3x}{x} \frac{x}{\sin(x)} \rightarrow 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{1} = 3, x \rightarrow 0.$$

ESERCIZIO. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(x)} - 1}{x^\alpha}.$$

Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{m}{n}, m \text{ e } n \text{ primi tra loro, } n \text{ dispari}\}$. Se $\alpha \notin A$, x^α non è definita per $x < 0$. Quindi se $\alpha \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}} A$, si considera solo il limite per $x \rightarrow 0^+$. Quindi, se $\alpha \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}} A$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sin(x)} - 1}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} \frac{e^{\sin(x)} - 1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1-\alpha} \frac{\sin(x)}{x} \frac{e^{\sin(x)} - 1}{\sin x} = \begin{cases} 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0, & 1 - \alpha > 0, \\ 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1, & 1 - \alpha = 0, \\ +\infty \cdot 1 \cdot 1 = +\infty, & 1 - \alpha < 0. \end{cases}$$

Se invece $\alpha \in A$, si ha,

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{e^{\sin(x)} - 1}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} \frac{e^{\sin(x)} - 1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} x^{1-\alpha} \frac{\sin(x)}{x} \frac{e^{\sin(x)} - 1}{\sin x} = \begin{cases} 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0, & 1 - \alpha > 0, \\ 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1, & 1 - \alpha = 0, \\ \pm\infty \cdot 1 \cdot 1 = \pm\infty, & 1 - \alpha < 0. \end{cases}$$

In particolare se $\alpha \in A \cap (1, +\infty)$ il limite non esiste.