(d) Vero (infatti $\det C = \det A \cdot \det B$).
(e) Falso. Infatti $A+B)(A-B) = A^2 - B^2 - (AB - BA)$ e il termine tra parentesi sulla destra è in generale diverso da zero perché il prodotto di matrici non è commutativo.
(f) Vero (infatti dall'uguaglianza $AB = BA$ segue $A^{-1}(AB)A^{-1} = A^{-1}(BA)A^{-1}$ ovvero $BA^{-1} = A^{-1}B$).

16. Si ha $A^2 = \mathrm{Id}$, da cui segue immediatamente che, se n è pari, $A^n = \mathrm{Id}$ mentre se n è dispari allora $A^n = A$.
17. A dispetto dell'apparenza innocua, si tratta dell'esercizio più difficile della serie. Una possibile dimostrazione è la seguente: se esistesse B tale che $B = A^2$, allora $BA = A^2 \cdot A = A^3 = A \cdot A^2 = AB$, dunque B commuta con A. Scriviamo
$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$
Alora
$$AB = \begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad BA = \begin{pmatrix} 0 & b_{11} \\ 0 & b_{21} \end{pmatrix}.$$
Dunque, da $AB = BA$ segue $b_{21} = 0$ e $b_{11} = b_{22}$ ovvero
$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{11} \end{pmatrix}.$$
Ne segue
$$B^2 = \begin{pmatrix} (b_{11})^2 & b_{11} \cdot b_{12} \\ 0 & (b_{11})^2 \end{pmatrix}.$$
Ma $B^2 = A$ e quindi $b_{11} = 0$ da cui $B = 0$. Ma allora $A = 0$ il che è assurdo.
18. Si tratta semplicemente di risolvere il sistema lineare
$$\begin{cases} a - b + 2c = 3 + a \\ a + b + c = c \\ a + c = -2 \end{cases}$$
La soluzione è
$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

12. Il determinante della matrice dei coefficienti è
$$-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + 3 = -(\lambda - 3)(\lambda - 1)^2$$
Dunque per $\lambda \neq 1$ e $\lambda \neq 3$ la matrice di coefficienti ha rango 3. Il rango della matrice completa sarà necessariamente 3 anch'esso: il sistema ammette un'unica soluzione.

    Se $\lambda = 1$ sia il rango della matrice dei coefficenti che quello della matrice completa sono uguali ad 1: il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da due parametri. Per $\lambda = 3$ il rango della matrice dei coefficienti è uguale a 2 mentre che quello della matrice completa è uguale a 3: il sistema non ha soluzioni.
13. Una matrice quadrata A è invertibile se esiste un'altra matrice quadrata B tale che $AB = BA = \mathrm{Id}$. In questo caso si scrive $B = A^{-1}$. Una nozione equivalente è la seguente: una matrice quadrata è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da zero.
14. Si ha
$$C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 14 \\ 10 & 2 & 13 & 35 \\ 6 & 5 & 0 & 23 \\ 4 & 3 & -1 & 24 \end{pmatrix}$$
Per calcolare il determinante di C sfruttiamo il fatto che $\det C = \det A \cdot \det B$. I determinanti delle matrici A e B si calcolano immediatamente perché si tratta di matrici triangolari. In questo modo si trova $\det C = 384$. Avendo determinante diverso da zero, la matrice C è invertibile e si ha
$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -33/16 & 19/32 & 29/32 & -17/32 \\ 41/24 & -25/48 & -5/16 & 1/16 \\ 7/8 & -3/16 & -5/16 & 1/16 \\ 1/6 & -1/24 & -1/8 & 1/8 \end{pmatrix}$$
15. Dire quali delle seguenze affermazioni è vera o falsa. Se l'affermazione è falsa dare un controesempio.
    (a) Falso. Ad esempio
    $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
    $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
    (b) Falso. Per essere invertibile una matrice quadrata deve avere determinante diverso da zero.
    (c) Vero (il suo determinante è -1).

Per $\lambda = -2$ sia il rango della matrice dei coefficienti che quello della matrice completa sono uguali ad 2: il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da un parametro. Se $\lambda = 1$ il rango della matrice dei coefficenti è 1 mentre quello della matrice completa è 2: il sistema non ha soluzioni.

8. Il determinante della matrice dei coefficienti è
$$-\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda = -\lambda (\lambda - 6)^2$$
Dunque per $\lambda \neq 0$ e $\lambda \neq 6$ la matrice di coefficienti ha rango 3. Il rango della matrice completa sarà necessariamente 3 anch'esso: il sistema ammette un'unica soluzione.

   Se $\lambda = 0$ il rango della matrice dei coefficenti è 2 mentre quello della matrice completa è 3: il sistema non ha soluzioni.

   Per $\lambda = 0$ sia il rango della matrice dei coefficienti che quello della matrice completa sono uguali ad 1: il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da due parametri.
9. Il determinante della matrice dei coefficienti è
$$-(\lambda + 2)$$
Dunque per $\lambda \neq -2$ la matrice di coefficienti ha rango 3. Il rango della matrice completa sarà necessariamente 3 anch'esso: il sistema ammette un'unica soluzione.

   Se $\lambda = -2$ il rango della matrice dei coefficenti è 2 mentre quello della matrice completa è 3: il sistema non ha soluzioni.
10. Indipendentemente da λ, il rango della matrice dei coefficienti e quello della matrice completa sono uguali a 2 (la sottomatrice 2×2 a sinistra ha determinante diverso da zero). Dunque il sistema ha sempre soluzioni, e queste dipendono da un parametro.
11. Semplifichiamo la matrice mediante eliminazione gaussiana. Cominciamo con scambiare alcune righe:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & h+2 & -2k \\ 0 & 1 & h+3 & -k+1 \\ -1 & 1 & h-1 & k+1 \\ 0 & 2 & 5h & -2k+2 \end{pmatrix}$$
da qui è facile ottenere per eliminazione gaussiana la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & h+2 & -2k \\ 0 & 1 & h+3 & -k+1 \\ 0 & 0 & h-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
da cui si vede che, indipendentemente da k, se $h \neq 2$ il rango della matrice è 3, altrimenti è 2.

Gauss. La matrice del sistema è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Cominciamo scambiando un po' di righe:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Da qui è facile ottenere la matrice del sistema in forma canonica:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

e si vede che il sistema non ha soluzioni (ovvero i due sistemi dati non ammettono soluzioni comuni).

6. Il determinante della matrice dei coefficienti è

$$-\lambda^3 + 3\lambda - 2 = -(\lambda + 2)(\lambda - 1)^2$$

Dunque per $\lambda \neq -2$ e $\lambda \neq 1$ la matrice di coefficienti ha rango 3. Il rango della matrice completa sarà necessariamente 3 anch'esso: il sistema ammette un'unica soluzione.

Se $\lambda = -2$ il rango della matrice dei coefficenti è 2 mentre quello della matrice completa è 3: il sistema non ha soluzioni. Per $\lambda = 1$ sia il rango della matrice dei coefficienti che quello della matrice completa sono uguali ad 1: il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da due parametri.

7. Il determinante della matrice dei coefficienti è

$$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda + 2)(\lambda - 1)^2$$

Dunque per $\lambda \neq -2$ e $\lambda \neq 1$ la matrice di coefficienti ha rango 3. Il rango della matrice completa sarà necessariamente 3 anch'esso: il sistema ammette un'unica soluzione.

5. Il determinante della matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{cases} -x+2y+z=\lambda+1 \\ x-y=\mu \\ y+z=0 \end{cases}$$

è zero. D'altronde il determinante della sottomatrice 2×2 in alto a sinistra è diverso da zero. Dunque la matrice dei coefficienti ha rango 2 e la terza colonna dipende linermente dalle prime due. Il calcolo del rango della matrice completa si riduce allo studio del determinante

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 2 & \lambda+1 \\ 1 & -1 & \mu \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \lambda+\mu+1\,.$$

Se $\lambda+\mu+1\neq 0$ non ci sono soluzioni, altrimenti ci sono infinite soluzioni dipendenti da un parametro. In modo del tutto analogo si ricava che il sistema

$$\begin{cases} x-y+z=-\mu \\ x+z=\frac{1}{2} \\ x+y+z=\lambda \end{cases}$$

ammette soluzioni solo se $\lambda-\mu-1=0$ e in questo caso le soluzioni sono infinite, dipendenti da un parametro. Affiché sia possibile che i due sistemi abbiano soluzioni comuni deve pertento risultare

$$\begin{cases} \lambda+\mu=-1 \\ \lambda-\mu=1 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} \lambda=0 \\ \mu=-1 \end{cases}$$

Le soluzioni comuni dei due sistemi sono semplicemnte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} -x+2y+z=1 \\ x-y=-1 \\ y+z=0 \\ x-y+z=1 \\ x+z=\frac{1}{2} \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

che si ottiene mettendo insieme i due sistemi dati con $\lambda=0$ e $\mu=-1$. E' bene semplificarsi un po' la vita col metodo dell'eliminazione di l'interpretazione geometrica di questo sistema è un po' complessa. Abbiamo tre piani variabili nello spazio. Indichiamoli con π_a, π_b e π_c in quanto il primo dipende dal solo parametro a, il secondo da b ed il terzo da c. Indichiamo con r_{ab} la retta intersezione dei primi due piani (dipende sia da a che da b). Poiché il rango dalla matrice dei coefficienti è sempre 2, il terzo piano è sempre parallelo alla retta r_{ab} (quali che siano i valori dei parametri). Se $c \neq a+b$ non contiene r_{ab} e dunque non la interseca mai. In caso contrario contiene interamente la retta.

4. Si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 6 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & -7 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{52}\begin{pmatrix} 13 & 10 & -1 \\ 13 & -18 & 7 \\ 13 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 & 2 \\ 5 & -9 & -8 & 2 \\ -10 & 18 & 18 & -4 \\ 6 & -10 & -10 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice $\begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ -7 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ non è invertibile (il suo determinante è zero).

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{961}\begin{pmatrix} 131 & -113 & 146 & 56 & 102 \\ 152 & 199 & -36 & 131 & 67 \\ 128 & 117 & 172 & -92 & 107 \\ 113 & 306 & 302 & 129 & 132 \\ 251 & 297 & 67 & 210 & -98 \end{pmatrix}$$

La matrice $\begin{pmatrix} 3 & -9 & 6 & 0 & -18 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & -6 \\ -2 & -4 & 2 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ non è invertibile (il suo determinante è zero).

Poiché

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & -1 & 2\\ 4 & 1 & -2\end{pmatrix} = 56\,,$$

il rango della matrice completa è 3. Dunque è diverso dal rango della matrice dei coefficienti e dal teorema di Rouché-Capelli segue che in questo caso il sistema non ha alcuna soluzione.

Infine, per $a = 4$, il rango della matrice dei coefficienti è sempre 2; per calcolare il rango della matrice completa ci riduciamo a calcolare

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & -1 & 2\\ 4 & 1 & 6\end{pmatrix} = 0\,.$$

Dunque anche la matrice completa ha rango 2: il sistema è risolubile ed ha infinite soluzioni dipendenti da un parametro.
L'interpretazione geometrica di questo sistema lineare è la seguente: le prime due equazioni rappresentano due piani fissi, che si incontrano in una retta r. la terza equazione rappresenta un piano variabile, dipendente dal parametro a. Per $a \neq -4, 4$ il terzo piano si trova in posizione generica rispetto alla retta r e la interseca in un punto. Per $a = -4$ il piano è parallelo alla retta r (e non la contiene): piano e retta non si intersecano. Infine per $a = 4$ il piano contiene interamente la retta r.

3. Il determinante della matrice dei coefficienti è zero. Dunque le tre colonne sono linearmente dipendenti. In particolare, poiché il determinante della sottomatrice

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

(in alto a sinistra) è diverso da zero, le prime due colonne sono lineramente indipendenti, il rango della matrice dei coefficienti è 2 e la terza colonna dipende linearmente dalle prime due. Per calcolare il rango della matrice completa possiamo eliminare la terza colonna (dipende linearmente dalle prime due) e ridurci pertanto al calcolo di

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & 0 & b\\ 2 & 1 & c\end{pmatrix} = a + b - c\,.$$

Se $c \neq a = b$ la matrice completa ha rango maggiore della matrice dei coefficienti, ed il sistema non ha soluzioni. Se $c = a + b$ il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da un parametro.

di ordine uguale al rango della matrice dei coefficienti in alto a sinistra. Se non viene effettuato lo scambio di colonne, la matrice finale è comunque a scala:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

2. Il determinante della matrice dei coefficienti è

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & a^2-14 \end{pmatrix} = -7(a^2-16)\,.$$

Dunque, per $a \neq -4$ e $a \neq 4$ la matrice dei coefficienti ha rango 3. Ne segue che anche la matrice completa del sistema ha rango 3. Dunque dal teorema di Rouché-Capelli si ricava che in questi casi il sistema ammette un'unica soluzione.

Per $a = -4$, la matrice dei coefficienti diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sappiamo che il suo rango non può essere tre, in quanto il dererminante si annulla. D'altronde il determinante della sottomatrice 2×2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(si tratta della sottomatrice in alto a sinistra) è -7. Dunque le prime due colonne sono lineramente indipendenti e il rango della matrice dei coefficienti è 2. Inoltre la terza colonna deve essere linearmente dipendente dalle prime due. Calcoliamo adesso il rango della matrice completa

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Già sappiamo che la terza colonna dipende lineramente dalle prime due, quindi possiamo trascurarla: dobbiamo semplicemente calcolare il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

da cui si vede che il sistema ammette infinite soluzioni dipendenti da due parametri. Infatti, riscrivendo l'ultima matrice in forma di sistema (e ricordando che x_3 sta sulla quarta colonna mentre x_4 sta sulla terza) troviamo

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2x_3 \\ x_4 = -3x_5 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si osservi che $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è una soluzione particolare del sistema, mentre $\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ è la soluzione generale del sistema omogeneo associato. Un'osservazione finale: chiaramente sarebbe stato possibile risolvere il sistema operando semplicemente sulle righe (ovvero mediante moltiplicazioni a sinistra per matrici elementari), senza scambiare la terza e quarta colonna. Questo scambio serve infatti solamente ad avere la matrice finale nella forma canonica con una matrice identità

Dunque il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da un parametro:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3/7 \\ 4/7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La soluzione rappresenta una retta in $\mathbb{R}^3$.

Infine, per il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 2 \\ 6x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 6 \\ 2x_2 - 4x_3 - 6x_4 - 18x_5 = 0 \end{cases}$$

abbiamo

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & -4 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & -4 & -6 & -18 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & -6 & -18 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -6 & -18 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & 18 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & -6 & -18 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -6 & -18 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & 54 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & 54 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -18 & -54 & 0 \end{array}\right) \to$$

scambiamo la terza e la quarta colonna, ricordandoci che da questo momento in poi la terza colonna rappresenta i coefficienti di x_4 e la quarta colonna i coefficienti di x_3 (attenzione: questo passaggio non è un'operazione sulle righe, e non si può pertanto ottenere come una moltiplicazione a sinistra per una matrice elementare)

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 0 & 54 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 0 & 54 & 0 \\ 0 & 0 & -18 & 0 & -54 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 0 & 54 & 0 \\ 0 & 0 & -18 & 0 & -54 & 0 \end{array}\right)$$

La soluzione rappresenta un punto nello spazio $\mathbb{R}^3$. Osserviamo che, se fossimo stati interessati semplicemente nel mettere la matrice del sistema in forma a scala, senza volere necessariamente le entrate "1" sulla diagonale, allora sarebbero bastate due trasformazioni elementari: moltilpicando a sinistra la matrice del sistema a sinistra per la matrice elementare

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, si ottiene la matrice $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -7/2 & -5/2 & -11 \\ 0 & -9 & 1 & -6 \end{array}\right)$ che,

moltiplicata a sinistra per la matrice elementare $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -18/7 & 1 \end{pmatrix}$, diventa la matrice a scala

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -7/2 & -5/2 & -11 \\ 0 & 0 & 52/7 & 156/7 \end{array}\right)$. Per gli altri due sistemi dell'esercizio ci limitiamo a scrivere i risultati dei vari passaggi nell'eliminazione gaussiana, senza indicare esplicitamente le operazioni sulle righe e le matrici elementari corrispondenti. Per il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ -7x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

abbiamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 0 \\ -7 & 7 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 0 \\ 0 & 14 & 8 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4/7 & 0 \\ 0 & 7 & 14 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/7 & 0 \\ 0 & 1 & 4/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ritraducendo questa matrice in un sistema lineare troviamo

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{7}x_3 x_2 = -\frac{4}{7}x_3 \end{cases}$$

elementare sulle righe

$$\begin{aligned}\text{prima riga} &\rightarrow \text{prima riga}\\ \text{seconda riga} &\rightarrow \text{seconda riga}\\ \text{terza riga} &\rightarrow \text{terza riga} + 9\cdot\text{seconda riga}\end{aligned}$$

che corrisponde a moltiplicare a sinistra per la matrice elementare $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&9&1\end{pmatrix}$. Troviamo la matrice $\left(\begin{array}{ccc|c}1&1/2&1/2&4\\0&1&5/7&22/7\\0&0&52/7&156/7\end{array}\right)$ che, moltiplicata a sinistra per la matrice elementare $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&7/52\end{pmatrix}$, diventa $\left(\begin{array}{ccc|c}1&1/2&1/2&4\\0&1&5/7&22/7\\0&0&1&3\end{array}\right)$. A questo punto facciamo l'eliminazione gaussiana dal basso verso l'altto. Iniziamo col fare la trasformazione elementare sulle righe

$$\begin{aligned}\text{prima riga} &\rightarrow \text{prima riga} - 1/2\cdot\ \text{terza riga}\\ \text{seconda riga} &\rightarrow \text{seconda riga} - 5/7\cdot\ \text{terza riga}\\ \text{terza riga} &\rightarrow \text{terza riga}\end{aligned}$$

che corrisponde alla moltiplicazione a sinistra per la matrice elementare $\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\0&1&-5/7\\0&0&1\end{pmatrix}$, ottenendo la matrice $\left(\begin{array}{ccc|c}1&1/2&0&5/2\\0&1&0&1\\0&0&1&3\end{array}\right)$. Infine, operando la trasformazione elementare sulle righe

$$\begin{aligned}\text{prima riga} &\rightarrow \text{prima riga} - 1/2\cdot\ \text{seconda riga}\\ \text{seconda riga} &\rightarrow \text{seconda riga}\\ \text{terza riga} &\rightarrow \text{terza riga}\end{aligned}$$

che corrisponde alla moltiplicazione a sinistra per la matrice elementare $\begin{pmatrix}1&-1/2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,otteniamo la matrice in forma canonica $\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&3\end{array}\right)$. Dunque il sistema ammentte un'unica soluzione e questa è

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}.$$

Facoltà di Ingegneria a.a 2002-2003

GEOMETRIA 1 proff. Baldoni e Piacentini Cattaneo - 14 ottobre 2002

Risoluzione di sistemi lineari. Interpretazione geometrica delle soluzioni di alcuni sistemi. Sistema omogeneo associato ad un sistema. Rango di una matrice. Sistemi dipendenti da parametri. Matrici invertibili. Determinazione dell'inversa di una matrice invertibile.

- Soluzioni -

1. La matrice del sistema $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases}$ è $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 3 & 10 \end{array}\right)$. Moltiplicandola a sinistra per la matrice elementare $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, che corrisponde a moltiplicare la prima riga per $1/2$ e lasciare le altre due righe invariate, otteniamo la matrice $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 4 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 3 & 10 \end{array}\right)$. A questo punto possiamo eliminare il 3 e il 4 nella prima colonna mediante l'operazione elementare sulle righe

$$\begin{aligned} \text{prima riga} &\to \text{prima riga} \\ \text{seconda riga} &\to \text{seconda riga} - 3 \cdot \text{prima riga} \\ \text{terza riga} &\to \text{terza riga} - 4 \cdot \text{prima riga} \end{aligned}$$

che corrisponde alla moltiplicazione a sinistra per la matrice elementare $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Otteniamo così la matrice $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 4 \\ 0 & -7/2 & -5/2 & -11 \\ 0 & -9 & 1 & -6 \end{array}\right)$.

Moltiplicando la seconda riga per $-2/7$, ovvero moltiplicando a sinistra per la matrice elementare $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2/7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, otteniamo la matrice $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 4 \\ 0 & 1 & 5/7 & 22/7 \\ 0 & -9 & 1 & -6 \end{array}\right)$. A questo punto eseguiamo l'operazione