Facoltà di Ingegneria
Calcolo delle Probabilità e Statistica
Ingegneria Civile e A&T e Informatica

IV Prova scritta 2022 - 16 Settembre 2022
A.A. 2021-2022

Durata della prova 2.5 h
Punteggi: 1) $3 + 4 + 4$; **2)** $4 + 4 + 4$; **3)** $3 + 4$.

Totale = 30.

Esercizio 1 Daniele getta ripetutamente un dado perfetto: sia M il numero di lanci necessari ad ottenere per la prima volta un punteggio < 3. Francesco invece lancia una moneta truccata in modo che *Testa* esca con probabilità $\frac{2}{3}$ in ogni lancio: sia N il numero di lanci necessari ad ottenere *Testa* per la prima volta.

(i) Trovare le leggi di M ed N e calcolare $E(M), E(N)$. Si può ritenere che N ed M siano v.a. indipendenti? Spiegare...

(ii) Calcolare $P(M - 5N < 0)$ e $P(\min(M, N) = 2)$.

(iii) Si lancia ora un'altra moneta truccata in modo che in ogni lancio esca *Testa* con probabilità $1.2 \cdot 10^{-3}$. Se si effettuano 3000 lanci, stimare la probabilità che il numero di *Teste* uscite sia ≥ 4.

Esercizio 2 Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} k(2x + y) & \text{se } \ x > 0,\ y > 0,\ x + y < 1; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Determinare il valore del parametro k che rende f una densità di probabilità.

(ii) Si consideri un vettore aleatorio (X, Y) con densità congiunta f. Calcolare le densità marginali di X e Y e $cov(X, Y)$.

(iii) Calcolare $P(Y > X)$ e il valore medio condizionato di Y dato $\{X = \frac{1}{3}\}$.

Esercizio 3 Una cantina produce vino che viene venduto in bottiglie di contenuto nominale netto di 710 ml. Il contenuto effettivo è espresso tramite una variabile aleatoria $X \sim N(\mu, 25 \text{ ml}^2)$. Per essere immesse sul mercato le bottiglie devono contenere una quantità di vino non inferiore a 708 ml. Per tarare meglio il valore μ si controlla il contenuto di 10 bottiglie e si prende nota della media campionaria $\overline{X}_{10} = 709$ ml. Calcolare

(i) un intervallo di confidenza di livello $1 - \alpha = 0.99$ per μ.

(ii) Se la macchina imbottogliatrice viene tarata a $\mu = 709$ ml, calcolare il numero di bottiglie n necessario affinché $P(\overline{X}_n \geq 708) \geq 0.95$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica, a.a. 2021-22

Soluzioni della IV Prova scritta 2022 - 16 Settembre 2022

Esercizio 1 (i) M ed N sono istanti di primo successo in una serie di prove indipendenti e di Bernoulli in ciascuna delle quali la probabilità del successo vale, rispettivamente, $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$. Dunque si ha:

$$P(M = k) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}, k = 1, 2, \ldots$$

e

$$P(N = h) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{h-1}, h = 1, 2, \ldots$$

Risulta $E(M) = \frac{1}{3}^{-1} = 3$ e $E(N) = \frac{2}{3}^{-1} = \frac{3}{2}$. Si può ritenere che M ed N siano indipendenti, in quanto i risultati di un esperimento aleatorio non influenzano quelli dell'altro esperimento aleatorio.

(ii) Si ha $P(M - 5N < 0) = 1 - P(M - 5N \geq 0)$; calcoliamo prima $P(M \geq 5N)$. Risulta:

$$P(M \geq 5N) = \sum_{k=1}^{\infty} P(M \geq 5k, N = k)$$

e per l'indipendenza di M ed N, tale probabilità è

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(M \geq 5k)P(N = k)$$

Ricordando che per una v.a. $X \sim Geom(p)$ risulta $P(X \geq h) = (1-p)^h$, siccome $M - 1 \doteq X$ è geometrica di parametro $\frac{1}{3}$, si ottiene $P(M \geq 5k) = P(M-1 \geq 5k-1) = (1-1/3)^{5k-1}$. Riprendendo il calcolo di prima:

$$P(M \geq 5N) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{5k-1}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = ... = 3\left(\frac{1}{1 - 2^5/3^6} - 1\right) = 0.1377\ .$$

ed infine $P(M - 5N < 0) = 1 - P(M \geq 5N) = 1 - 0.1377 = 0.8623$.

Inoltre, per l'indipendenza di M ed N :

$$P(\min(M, N) > k) = P(M > k)P(N > k) = \left(1 - \frac{1}{3}\right)^k\left(1 - \frac{2}{3}\right)^k = \left(\frac{2}{9}\right)^k = \left(1 - \frac{7}{9}\right)^k;$$

quindi $\min(M, N)$ ha distribuzione Geometrica modificata di parametro $\frac{7}{9}$.

Pertanto, $P(\min(M, N) = 2) = \frac{7}{9}\left(\frac{2}{9}\right)^{2-1} = \frac{14}{81}$.

(iii) Il numero Z di *Teste* uscite in 3000 lanci della moneta ha distribuzione binomiale di parametri $(3000, 1.2\cdot 10^{-3})$. Siccome la probabilità del successo in ogni prova è molto piccola $(1.2 \cdot 10^{-3})$, possiamo usare l'approssimazione di Poisson, ottenendo cosi' $P(Z = k) \approx P(Y = k)$, dove Y ha distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = np = 3000\cdot 1.2\cdot 10^{-3} = 3.6$. Pertanto, siccome $P(Y = k) = e^{-3.6}(3.6)^k/k!, k = 0, 1, ...,$ si ottiene

$$P(Z \geq 4) = 1 - P(Z = 0) - P(Z = 1) - P(Z = 2) - P(Z = 3)$$

$$\approx 1 - e^{-3.6}(1 + 3.6 + (3.6)^2/2 + (3.6)^3/6) = 0.4847$$

Esercizio 2 (i) Affinché f sia una densità deve essere

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = 1, \quad \text{ovvero}$$

$$1 = \int_0^1 \int_0^{1-x} k(2x+y)dxdy = k\int_0^1 (2xy + \frac{y^2}{2})\big|_0^{1-x} dx = k\int_0^1 (2x(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2})dx =$$
$$= k\int_0^1 (\frac{1}{2} + x - \frac{3}{2}x^2)dx = \frac{k}{2}.$$

Pertanto deve essere $k = 2$.

(ii) Calcoliamo le densità marginali

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} 0 & x \notin [0,1]; \\ \int_0^{1-x} 2(2x+y)dy & x \in [0,1]. \end{cases}$$

Quindi per $x \in [0,1]$ si ha

$$f_X(x) = \int_0^{1-x} 2(2x+y)dy = (4xy + y^2)\Big|_0^{1-x} = (4x(1-x) + (1-x)^2) = 1 + 2x - 3x^2.$$

Analogamente

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} 0 & y \notin [0,1]; \\ \int_0^{1-y} 2(2x+y)dx & y \in [0,1]. \end{cases}$$

Quindi per $y \in [0,1]$ si ha

$$f_Y(y) = (2x^2 + 2xy)\Big|_0^{1-y} = (2(1-y)^2 + 2y(1-y)) = 2(1-y).$$

Si ha:

$$E(X) = \int_0^1 x\left(1 + 2x - 3x^2\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{5}{12}$$

$$E(Y) = \int_0^1 2y\left(1-y\right)dy = \left(y^2 - \frac{2y^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$E(XY) = \int_0^1 xdx \int_0^{1-x} 2y(2x+y)dy = \int_0^1 xdx\left(2xy^2 + \frac{2y^3}{3}\right)\Big|_0^{1-x} =$$
$$= \int_0^1 x\left(2x(1-x)^2 + \frac{2(1-x)^3}{3}\right)dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \left(4x^4 + -6x^3 + 2x\right)dx =$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{10}.$$

Pertanto $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{10} - \frac{5}{12}\frac{1}{3} = -\frac{7}{180}$.

(iii)

$$P(Y > X) = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{1-x} 2(2x+y)dy = \int_0^{\frac{1}{2}} dx(4xy + y^2)\Big|_x^{1-x} =$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}} (1 + 2x - 8x^2)dx = (x + x^2 - \frac{8}{3}x^3)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{12}$$

La densità condizionale di Y dato $\{X = \frac{1}{2}\}$ ha la seguente espressione

$$f_{Y|X}(y|\frac{1}{3}) = \frac{f(\frac{1}{3}, y)}{f_X(\frac{1}{3})} = \begin{cases} \frac{2(\frac{2}{3}+y)}{1+\frac{2}{3}-3\frac{1}{9}} = 1 + \frac{3}{2}y & 0 < y < 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Quindi

$$E[Y|X = \frac{1}{3}] = \int_0^{\frac{2}{3}} (1 + \frac{3}{2}y) y dy = \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{2}\Big|_0^{\frac{2}{3}} = \frac{10}{27}.$$

Esercizio 3 (i) Come noto, un intervallo di confidenza a livello $1 - \alpha$ per la media incognita μ di una distribuzione di cui è nota la varianza σ^2 è il seguente:

$$I = \left[\bar{x}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\phi_{1-\alpha/2}, \bar{x}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\phi_{1-\alpha/2}\right],$$

dove $\bar{x}_n$ denota la media campionaria e ϕ_β è il quantile della Gaussiana standard, tale che $\Phi(\phi_\beta) = \beta$. Nel caso attuale, risulta $\bar{x}_n = 709$, $\sigma = \sqrt{25} = 5$, $n = 10$. Essendo $1 - \alpha = 0.99$, si ha $\alpha/2 = 0.005$, $1 - \alpha/2 = 0.995$ e $\phi_{1-\alpha/2} = 2.58$. In conclusione, un intervallo di confidenza per μ al livello 0.99 è

$$\left[709 - \frac{5}{\sqrt{10}} \cdot 2.58,\ 709 + \frac{5}{\sqrt{10}} \cdot 2.58\right] = [704.9,\ 713.08]\ .$$

(ii)

$$P(\overline{X}_n \geq 708) = P(\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - 709}{5} \geq \sqrt{n}\frac{708 - 709}{5}) \simeq 1 - \Phi(-0.2\sqrt{n}).$$

Deve quindi essere

$$\Phi(0.2\sqrt{n}) \geq 0.95 = \Phi(1.65).$$

Pertanto si ottiene

$$0.2\sqrt{n} \geq 1.65 \text{ ovvero } n \geq 25 \times 1.65^2, \quad n \geq 68.0625$$

cioè $n = 69$.