Complementi di Probabilità e Statistica
Laurea Magistrale Ing. Info.
Esercizi su catene di Markov a tempo continuo & affidabilità M. Abundo

1. Gli arrivi dei clienti a un negozio di parrucchiere sono regolati da un processo di Poisson di intensità $\lambda > 0$. Il negozio ha s parrucchieri e N posti di attesa; ogni parrucchiere lavora (su un singolo cliente) se c'è un cliente da servire, ed ad ogni cliente che arrivi quando il negozio è pieno (cioé il numero di clienti presenti è $N + s$) non viene concesso l'ingresso. Ogni cliente ammesso attende in coda e poi è servito; la durata del tempo di servizio ha distribuzione esponenziale di parametro $\mu > 0$. Si suppone che i tempi di servizio dei vari clienti ammessi siano indipendenti; inoltre, dopo aver completato l'acconciatura ai capelli, il cliente lascia il negozio e non vi fa più ritorno.

Descrivere un modello per il numero di clienti $X(t)$ presenti nel negozio al tempo $t \geq 0$. Discutere l'esistenza della distribuzione stazionaria (o di equilibrio) π in funzione dei parametri λ e μ e, nel caso esista, determinarla.
Determinare, in particolare, la distribuzione stazionaria per $s = 3, N = 2$ e $\lambda = 1,\ \mu = 2$.

2. Si consideri una coda $M/M/1$ ove gli arrivi sono Poissoniani con intensità $\lambda = 1$ e i tempi di servizio hanno distribuzione esponenziale di parametro $\mu = 2$. Sia $X(t)$ il numero di clienti presenti nel sistema al tempo $t \geq 0$.
(i) Calcolare la probabilità che nessun cliente sia presente nel sistema all'equilibrio, cioé $P(X(\infty)) = 0$.
(ii) Discutere l'esistenza della distribuzione stazionaria $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots)$ tale che $\pi_i = P(X(\infty) = i)$ e trovarne esplicitamente la legge.
(iii) Calcolare la media e la varianza del processo X all'equilibrio, cioé $E(X(\infty))$ e $Var(X(\infty))$.
(iv) Calcolare $P(4 \leq X(\infty) < 7)$.
(v) Che cosa cambierebbe, relativamente al punto (ii), se fosse $\lambda = 2$ e $\mu = 1$?

3. Si consideri una coda $M/M/\infty$ ove gli arrivi sono Poissoniani con intensità $\lambda = 1$ e i tempi di servizio hanno distribuzione esponenziale di parametro $\mu = 1$. Sia $X(t)$ il numero di clienti presenti nel sistema al tempo $t \geq 0$.
(i) Calcolare la probabilità che nessun cliente sia presente nel sistema all'equilibrio, cioé $P(X(\infty)) = 0$.
(ii) Discutere l'esistenza della distribuzione stazionaria $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots)$ tale che $\pi_i = P(X(\infty) = i)$ e trovarne esplicitamente la legge.
(iii) Calcolare la media e la varianza del processo X all'equilibrio, cioé $E(X(\infty))$ e $Var(X(\infty))$.
(iv) Calcolare $P(3 < X(\infty) \leq 5)$.

4. Si consideri una coda $M/M/7$ ove gli arrivi sono Poissoniani con intensità $\lambda = 1$ e i tempi di servizio hanno distribuzione esponenziale di parametro $\mu = 2$. Sia $X(t)$ il numero di clienti presenti nel sistema al tempo $t \geq 0$.

(i) Calcolare la probabilità che nessun cliente sia presente nel sistema all'equilibrio, cioé $P(X(\infty)) = 0$.
(ii) Discutere l'esistenza della distribuzione stazionaria $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots)$ tale che $\pi_i = P(X(\infty) = i)$ e trovarne esplicitamente la legge.
(iii) Calcolare $P(X(\infty) = 4)$.

5. Si consideri una coda $M/M/1$ ove gli arrivi sono Poissoniani con intensità $\lambda = 1$ e i tempi di servizio hanno distribuzione esponenziale di parametro $\mu = 2$. Sia $X(t)$ il numero di clienti presenti nel sistema al tempo $t \geq 0$.
Trovare, nel regime stazionario:
(i) il numero medio di clienti nel sistema;
(ii) il numero medio dei clienti in attesa nella coda;
(iii) il tempo medio che un cliente trascorre nel sistema;
(iv) il tempo medio di attesa di un cliente nella coda.

6. Si consideri una coda $M/M/1$ ove gli arrivi sono Poissoniani con intensità λ e i tempi di servizio hanno distribuzione esponenziale di parametro μ. Sia $X(t)$ il numero di clienti presenti nel sistema al tempo $t \geq 0$.
Si sa che il tempo medio che un cliente trascorre nel sistema è 2, mentre il tempo medio di attesa di un cliente nella coda è 1 (rispetto ad una unità di misura fissata).
(i) Calcolare la probabilità che nessun cliente sia presente nel sistema all'equilibrio, cioé $P(X(\infty)) = 0$.
(ii) Trovare esplicitamente, se esiste, la distribuzione stazionaria $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots)$ tale che $\pi_i = P(X(\infty) = i)$.
(iii) Calcolare la media e la varianza del processo X all'equilibrio, cioé $E(X(\infty))$ e $Var(X(\infty))$.
(iv) Calcolare $P(5 \leq X(\infty) < 8)$.

7. Si consideri una coda $M/M/\infty$ ove gli arrivi sono Poissoniani con intensità λ e i tempi di servizio hanno distribuzione esponenziale di parametro μ. Sia $X(t)$ il numero di clienti presenti nel sistema al tempo $t \geq 0$.
Trovare, nel regime stazionario l'espressione analitica in funzione di λ e μ di:
(i) il numero medio di clienti nel sistema;
(ii) il numero medio dei clienti in attesa nelle code;
(iii) il tempo medio che un cliente trascorre nel sistema;
(iv) il tempo medio di attesa di un cliente in coda.

8. Si consideri una coda $M/M/n$ ove gli arrivi sono Poissoniani con intensità λ e i tempi di servizio hanno distribuzione esponenziale di parametro μ. Sia $X(t)$ il numero di clienti presenti nel sistema al tempo $t \geq 0$.
Utlizzando anche le relazioni di Little, trovare, nel regime stazionario le espressioni esplicite, in funzione di λ e μ di:
(i) il numero medio di clienti nel sistema;
(ii) il numero medio dei clienti in attesa nella coda;
(iii) il tempo medio che un cliente trascorre nel sistema;

(iv) il tempo medio di attesa di un cliente nella coda.

9. Si consideri un supermercato in cui entrano 10 clienti al minuto; supponiamo che una cassiera riesca a smaltire un cliente ogni 2 minuti.
(i) Quante casse occorre predisporre per fare in modo che il tempo di attesa globale dei clienti (compreso il tempo di servizio) sia inferiore a 5 minuti?
(ii) Per ridurre il numero delle casse si introducono delle casse rapide (max 10 pezzi). Supponiamo che il 30% dei clienti acquisti meno di 10 pezzi e che ognuno di questi clienti abbia bisogno di 1/2 minuto per essere servito: vi saranno 7 clienti al minuto che occupano una cassa per 2 minuti e 3 che la occupano per 1/2 minuto. Il tasso di servizio μ delle cassiere delle casse veloci sarà quindi pari a 2 clienti al minuto. Calcolare quante casse "lente" occorre ora predisporre per fare in modo che il tempo di attesa globale dei clienti (compreso il tempo di servizio) sia inferiore a 5 minuti.
(iii) Volendo abbassare il tempo medio d'attesa e di servizio alle casse veloci a 4 minuti, quante casse lente e veloci occorrerà predisporre?

10. Siano $a, b > 0$; una v.a. $T \geq 0$ avente funzione di distribuzione:

$$F(t) = 1 - e^{-at^b}, \ t > 0$$

si dice di *Weibull* di parametri a e b.
(i) Trovare la funzione *rischio di guasto istantaneo* (istantaneous failure rate) corrispondente.
(ii) Cosa avviene nel caso $b = 1$?

11. Due componenti elettronici hanno tempi di vita $T_1 \geq 0$ e $T_2 \geq 0$, tra loro indipendenti. Siano $\lambda_1(t)$ e $\lambda_2(t)$ le corrispondenti intensità di guasto istantaneo.
(i) Se T denota il tempo di vita dell'apparecchiatura ottenuta collegando i due componenti in serie, trovare l'intensità di guasto dell'apparecchiatura così composta.
(ii) Che cosa si può dire, nel caso in cui i due componenti vengano collegati in parallelo?

12. Supponiamo che un certo prodotto commerciale abbia intensità di rottura:

$$\lambda(t) = 2t^{3/2}, \ t > 0,$$

dove il tempo t viene misurato in anni.
(i) Calcolare la probabilità che esso duri per più di 2 anni.
(ii) Calcolare la probabilità che si guasti tra 0.5 e 1.5 anni.