Università di Roma *Tor Vergata*

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Calcolo delle Probabilità e Statistica **a.a 2002-2003** M. Abundo, B. Torti

Lista di esercizi N.5

1. Se X e Y sono v.a. indipendenti e uniformemente distribuite in $[0,1]$, calcolare la legge di $Z = |X - Y|$; inoltre, trovare $E(Z)$, $Var(Z)$.

2. La v.a. X ha densitá $f(x) = |x|\mathbf{1}_{(-1,1)}(x)$. Trovare la legge di $Y = 1 - |X|$; trovare $E(Y)$, $Var(Y)$.

3.Se $U \sim N(m, \sigma^2)$, trovare la legge di $-U$. Siano X e Y v.a. indipendenti con legge $N(0,1)$; calcolare la legge di $Z = X - Y$.

4.Siano X e Y v.a. indipendenti e con legge $N(0,1)$.
(i) trovare le leggi di $2X - 2Y$ e $2X + 2Y$;
(ii) trovare $E(2X - 2Y)$, $E(2X + 2Y)$, $Var(2X - 2Y)$, $Var(2X + 2Y)$;
(iii) calcolare $P(X > Y)$ e $P(2X > 2Y + 1)$.

5. Sia $\{X_n\}$ una successione di v.a. indipendenti e di Poisson con parametro λ, e sia $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + ...X_n)$.
(i) stimare con la disuguaglianza di Chebicev $P(|\bar{X}_n - \lambda| \geq \epsilon)$
(ii) stimare la stessa quantità usando il T.L.C.
(iii) confrontare le due stime per $\lambda = 1$, $\epsilon = 1/100$, $n = 10000$.

6. Mauro e Giovanni hanno l'abitudine di giocare a Testa e Croce chi paga il caffé. Mauro ha l'impressione che tocchi a lui un po' troppo spesso (la moneta la fornisce Giovanni): 64 volte su 100. E' solo sfortuna?

7. Un professore per andare a scuola impiega in media 15 minuti con una deviazione standard di 3 min. Assumiamo una distribuzione normale. Se il professore ha la prima lezione alle 10.30, quando deve uscire di casa, affinché sia certo al 95 % di arrivare in tempo? se la scuola offre un caffé dalle 10 alle 10.30, quante volte il professore avrebbe il caffé prima della lezione se lascia la propria abitazione alle 10.10 ogni giorno?

8. Una moneta perfetta viene lanciata 1000 volte. Qual è la probabilitàche il numero delle Teste non superi 549?

9. Alcuni resistori hanno una resistenza distribuita uniformemente tra 900 e 1100 Ω. Se dieci di tali resistori sono connessi in serie, qual è la probabilità che la loro resistenza totale sia dentro il 5 % di 10000 Ω?

10. In una classe di 30 studenti viene svolto alla fine dell'anno l'ultimo compito di Latino. L' insegnante ha calcolato dai precedenti compiti che il voto medio e' 6.2 e $\sigma = 2.5$. Qual è la probabilità che in quest' ultimo compito il voto sia maggiore di 6 ma non superiore a 6.3?

11. Un dado equilibrato viene lanciato 900 volte; sia X il numero di volte che esce 6.

(i) quanto vale $E(X)$? e $P(X \geq 180)$?

(ii) una partita di dadi truccati produce il 6 con probabilità 2/9. Per decidere se un dado è della partita, procediamo così: esso viene lanciato 900 volte e decidiamo che è truccato se il 6 esce più di 180 volte. Qual è la probabilità che un dado truccato venga effettivamente individuato?

12. Sia X una v.a. continua con funzione di distribuzione strettamente crescente $F(x)$. Si consideri la trasformazione $Y = F(x)$.

(i) Calcolare la f.d.d. $G(y)$ di Y, verificando che è la f.d.d. di una v.a. uniforme in $[0, 1]$.

(ii) Se $V = -\log Y$, calcolare la legge di V, $E(V)$, $Var(V)$.

(iii) Sia $\{X_n\}$ una succ. di v.a. equdistribuite e indipendenti con la stessa legge di X. Trovare un'approssimazione asintotica ($n \to \infty$) della f.d.d. di

$$Z = \sum_{i=1}^{n} [-\log F(X_i)]$$

13. Sia $\{X_n\}$ una successione di v.a. indipendenti con densità esponenziale di media 1. Trovare un intervallo di fiducia di livello 0.95 per $S_{200} = X_1 + X_2 + .. + X_{200}$.

14. Si lancia una moneta 100 volte e si trova che la proporzione di Teste uscite è 0.47. Sia p la probabilità che esca Testa in ogni singolo lancio. Trovare un intervallo di confidenza di livello 0.95 per p.