Università di Roma *Tor Vergata*

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Calcolo delle Probabilità e Statistica **a.a 2002-2003** M. Abundo, B. Torti

Lista di esercizi N.4

1. Sia $f(x)$ la funzione definita da:

$$f(x) = \begin{cases} 1/(4x^2), & \mid x \mid > 1 \\ a, & \mid x \mid \leq 1 \end{cases}$$

Trovare $a \in \mathbf{R}$ in modo che f sia la densità di una variabile aleatoria continua X. Trovare la funzione di distribuzione di X.
2. Sia X una v.a. uniforme su $[0,1]$ e $Y = X + 1$. Trovare la densità e la funzione di distribuzione della v.a. Y.
3. Sia X una v.a. uniforme su $[0,1]$. Posto $Y = [3X] + 1$, calcolare la legge di Y ($[\ \ ]$ denota la parte intera).
4. Sia $f(x)$ la funzione definita da:

$$f(x) = \begin{cases} kx^3 exp(-x/2) \ se \ x \geq 0 \\ 0 \ se \ x < 0 \end{cases}$$

(i) determinare k in modo che f sia una densità;
(ii) trovare la densità di $2X$.
5. Due v.a. X e Y sono indipendenti e uniformi su [0,1]. Calcolare:
(i) $P(XY > 1/2)$
(ii) $P(XY < 1/4 | X > 1/2)$
(iii) $P(XY > 1/4 | X/Y > 2)$
(iv) $P(\mid X - Y \mid > 1/2$ e $P(\mid X - Y \mid \leq 1/3$
6. Sia X una v.a. esponenziale di parametro $\lambda = 2$. Trovare la densità e la funzione di distribuzione di $Y = -2X + 3$.
7. Siano X e Y indipendenti ed uniformemente distribuite in $[0,1]$. Trovare la densità di $Z = X + Y$. Inoltre calcolare $E(Z)$ e $Var(Z)$.
8. Se $X \sim N(m, \sigma)$, trovare la legge di $Y = -X$.
9. Il punteggio ottenuto da un gruppo di studenti nella prova scritta di Analisi Matematica I si può modellizzare con una v.a. di legge normale di media 22 e varianza 9. Qual è la percentuale di studenti che hanno ottenuto un voto non inferiore a 24? Qual è la percentuale di studenti che hanno ottenuto un voto inferiore a 18?
10. Un componente elettronico ha un tempo di vita che segue una legge esponenziale di media 10 giorni. Un secondo componente è composto da 2 elementi in parallelo (cioè esso funziona fintanto che uno dei due elementi è funzionante), ciascuno dei quali ha tempo di vita esponenziale di media 8 giorni.
(i) qual è la densità del tempo di vita del secondo componente?
(ii) qual è la probabilità che il primo componente duri più a lungo del secondo?

11. Sia X una v.a. esponenziale di parametro λ. Trovare la legge di $Y = [X]$.
12. Per $\alpha > 0, \lambda > 0$, si consideri la funzione

$$f(t) = \begin{cases} \lambda\alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t^\alpha} & se\ t > 0 \\ 0 & se\ t \leq 0 \end{cases}$$

(i) mostrare che f è una densità (densitaà di *Weibull*) e calcolarne la funzione di distribuzione;
(ii) Sia T una v.a. di densità f. Calcolare

$$P(T > t + s | T > s)$$

Per quali valori di α e λ questa funzione è crescente in s? Per quali valori è decrescente? Dovendo modellizzare con T il tempo di rottura di un'apparecchiatura soggetta ad usura, quali valori di α e λ sarebbe meglio scegliere?
(iii) Sia X una v.a. esponenziale di parametro λ e sia $\beta > 0$. Quanto vale $E(X^\beta)$? Qual è la legge di X^β? Quanto vale il valore di aspettazione di una legge di Weibull di parametri α, λ?
13. Un componente viene prodotto da una fabbrica che utilizza due diverse linee di lavorazione da cui escono elementi esteriormente indistinguibili ma di diversa qualità. Si sa che i pezzi prodotti dalla prima e dalla seconda linea hanno un tempo di vita esponenziale di parametri λ, μ, rispettivamente con $\mu > \lambda$. Le proporzioni di pezzi prodotti dalle due linee sono rispettivamente p e $q = 1 - p$.
(i) Un pezzo viene scelto a caso e indichiamo con T il suo tempo di vita. Qual è la legge di T? Quanto vale $E(T)$?
(ii) Sapendo che il pezzo è ancora funzionante al tempo s, qual è la probabilità che esso provenga dalla prima linea? Quanto vale questa probabilità per s grande?
14. Sia X una v.a. uniforme su $(-\pi/2, \pi/2)$. Calcolare la legge di $Y = tang(X)$. Quanto vale $E(Y)$? (la densità di Y è detta di *Cauchy*).
15. Si sa che l'altezza delle donne in Italia segue approsimativamente una v.a. normale di media 165 (cm) e varianza 80. Qual è la percentuale di italiane di statura superiore a 180 cm ? Qual è la percentuale di donne di altezza inferiore a 153 cm?