Calcolo delle Probabilità e Statistica, Ingegneria Civile e A&T e Informatica
Prova scritta del 31 gennaio 2020

Punteggi: 1. $4 + 4 + 2$; **2.** $4 + 4 + 4$; **3.** $4 + 4$. **Durata della prova 2.5 h**

1. In una certa località, la popolazione delle persone in possesso della patente automobilistica è composta per il 47 % da uomini e per il 53 % da donne.
Le statistiche mostrano che il 40 % degli uomini ha un incidente nell'arco di un anno, mentre la stessa percentuale per le donne scende al 20 %.
(a) Qual è la probabilità che un individuo (in possesso di patente) abbia avuto un incidente nel 2013?
(b) Se un individuo ha avuto un incidente nel 2013, qual è la probabilità che si trattasse di una donna?
(c) Qual è invece la probabilità che si trattasse di un uomo? Quale delle due probabilità è maggiore?

2. Sia (X, Y) un vettore aleatorio di densità congiunta:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x, y) \notin E \\ 9e^{-3y} & \text{se } (x, y) \in E \end{cases},$$

dove $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x < y\}$.
(i) Calcolare $P(Y > 1 - X)$.
(ii) Trovare le densità marginali di X e Y e dire se X e Y sono indipendenti.
(iii) Trovare la densità di $Z = Y - X$ e calcolare $E(Z)$, $Var(Z)$ e $P(Z < 1/3)$.

3. Supponiamo che il numero di incidenti stradali che avvengono giornalmente in una certa città abbia distribuzione di Poisson con media 1.
(i) Qual è la probabilità che si verifichino più di 20 incidenti in 2 settimane?
(ii) Ipotizzando sempre una distribuzione di Poisson, quale dovrebbe essere invece la media del numero di incidenti giornalieri, affinché, con probabilità ≥ 0.95, si abbiano meno di 13 incidenti in 20 giorni?

Soluzioni della prova scritta del 31 gennaio 2020

1. Consideriamo gli eventi
I =“l’individuo ha avuto un incidente nel 2013”; D =“l’individuo è una donna”;
U =“l’individuo è un uomo”. Dai dati si ricava che $P(D) = 0.53, P(U) = 0.47, P(I|D) = 0.2, P(I|U) = 0.4$.
(a) $P(I) = P(I|D)P(D) + P(I|U)P(U) = 0.2 \cdot 0.53 + 0.4 \cdot 0.47 = 0.294$
(b) Dobbiamo calcolare $P(D|I)$. Per il teorema di Bayes, si ha $P(D|I) = \frac{P(I|D)P(D)}{P(I)} = \frac{0.106}{0.294} \cong 0.36$
(c) Occorre ora calcolare $P(U|I)$. Sempre per il teorema di Bayes, si ha
$P(U|I) = \frac{P(I|U)P(U)}{P(I)} = \frac{0.4 \cdot 0.47}{0.294} \cong 0.64$, che si poteva anche trovare, calcolando
$1 - P(D|I) \cong 1 - 0.36 = 0.64$. La seconda probabilità è allora maggiore della prima.

2. (i) Si ha:

$$P(Y > 1 - X) = \int\int_A f(u, v) du dv$$

dove $A = \{(u, v) : 0 < u < v,\ v > 1 - u\} = A_1 \cup A_2$ e
$A_1 = \{(u, v) : 0 < u < 1/2,\ v > 1 - u\},\ A_2 = \{(u, v) : u > 1/2,\ v > u\}$.
Dunque:

$$P(Y > 1 - X) = \int_0^{1/2} du \int_{1-u}^{+\infty} dv 9e^{-3v} + \int_{1/2}^{+\infty} du \int_u^{+\infty} dv 9e^{-3v}$$

$$= 9 \int_0^{1/2} du \Big[\frac{e^{-3v}}{-3}\Big]_{v=1-u}^{v=+\infty} + 9 \int_{1/2}^{+\infty} du \Big[\frac{e^{-3v}}{-3}\Big]_{v=u}^{v=+\infty}$$

$$= 3 \int_0^{1/2} e^{-3(1-u)} du + 3 \int_{1/2}^{+\infty} e^{-3u} du = ...2e^{-3/2} - e^{-3}.$$

(ii) Le densità marginali di X e Y sono:

$$f_X(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} 9e^{-3v} \mathbf{1}_E(u, v) dv = \int_u^{+\infty} 9e^{-3v} = 3e^{-3u}$$

per $u > 0$.

$$f_Y(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} 9e^{-3v} \mathbf{1}_E(u, v) du = \int_0^v 9e^{-3v} du = 9ve^{-3v}$$

Come si vede, X e Y non sono indipendenti, in quanto $f(u, v) \neq f_X(u) f_Y(v)$.
(iii) Sia $Z = Y - X$, cambiamo variabili: $(X, Y) \to (X, Z)$ con $X = X$ e $Y = X + Z$. La matrice Jacobiana è

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

pertanto la densità di (X, Z) è $f(x, z) = 9e^{-3(u+z)}$ per $0 < u < u + z$, ovvero per $u, z > 0$. La densità di Z risulta quindi

$$f_Z(z) = \int_0^{+\infty} 9e^{-3(u+z)} du = 3e^{-3z},$$

cioè esponenziale di parametro 3. Quindi $E(Z) = 1/3$, $Var(Z) = 1/9$ e $P(Z < 1/3) = 1 - e^{-3 \cdot \frac{1}{3}} = 1 - e^{-1}$.

3. (i) Se X_i rappresenta il numero di incidenti che avvengono nell' i-esimo giorno, essa è una v.a. di Poisson di parametro 1. Si ha:

$$P(X_1 + X_2 + \ldots + X_{14} > 20) = P\left(\frac{X_1 + \ldots + X_{14} - 14 \cdot 1}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{14}} > \frac{20 - 14}{\sqrt{14}}\right)$$

Utilizzando l'approssimazione normale, tale probabilità vale circa

$$1 - \Phi(\frac{6}{3.74}) = 1 - \Phi(1.604) \simeq 1 - 0.9452 = 0.0548 \ .$$

(ii) Siano ora X_i v.a. di Poisson di parametro (e media) λ. Si ha:

$$P(X_1 + \ldots + X_{20} < 13) = P\left(\frac{X_1 + \ldots + X_{20} - 20 \cdot \lambda}{\sqrt{\lambda} \cdot \sqrt{20}} < \frac{13 - 20\lambda}{\sqrt{\lambda} \cdot \sqrt{20}}\right)$$

Utilizzando l'approssimazione normale, tale probabilità vale circa

$$\Phi\left(\frac{13 - 20\lambda}{\sqrt{\lambda}\sqrt{20}}\right).$$

Affinché tale valore sia $\geq 0.95 = \Phi(1.65)$, deve essere

$$\frac{13 - 20\lambda}{\sqrt{\lambda}\sqrt{20}} \geq 1.65$$

ovvero $20\lambda + 7.37\sqrt{\lambda} - 13 \leq 0$. Posto $x = \sqrt{\lambda}$, la disequazione da risolvere è $20x^2 + 7.37x - 13 \leq 0$. Delle due radici dell'equazione associata, una è negativa e si scarta, l'altra è $x = \sqrt{\lambda} = \frac{33.08 - 7.37}{40} \simeq 0.642$. Pertanto, si ottiene infine $\lambda \leq 0.642^2 = 0.41$.