Calcolo delle Probabilità e Statistica, Ingegneria Civile e A&T e Informatica
Prova scritta del 20 febbraio 2020

Punteggi: **1:** $5 + 4$; **2:** 4×3; **3:** $4 + 5$. **Durata della prova: 2.5 h**

1. Un'urna contiene palline numerate con $1, 2, 3$. Si estrae prima una pallina dall'urna, poi si lancia una moneta regolare tante volte quante ne indica il numero della pallina estratta: sia X il numero di volte che esce Testa.
(i) Trovare la distribuzione di X.
(ii) Calcolare $E(X)$ e $P(X \geq 2)$.

2. Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \lambda \frac{\sqrt{y}}{x^2} & \text{se } 1 < x < 2,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(i) Calcolare il valore di λ affinché la funzione $f(x,y)$ rappresenti una densità di probabilità e, per il valore di λ trovato, si consideri il vettore aleatorio (X,Y) avente $f(x,y)$ come densità congiunta.
(ii) Calcolare la probabilità $P(Y \leq \frac{2}{3}X)$.
(iii) Calcolare le densità di probabilità marginali delle variabili aleatorie X ed Y. Si tratta di variabili alatorie indipendenti?

3. Per assemblare un televisore si utilizza un certo tipo di componente, la cui durata è una v.a. con distribuzione esponenziale di media 100 ore. Ogni volta che una componente si guasta, esso viene immediatamente sostituito con un altro, identico. Si suppongono trascurabili i tempi necessari per le sostituzioni (e fra loro indipendenti le durate dei diversi componenti).
(a) Qual è la probabilità che, utilizzando 50 componenti, un televisore funzioni per almeno 3000 ore e non più di 6000?
(b) Quanti componenti si dovranno utilizzare affinché un televisore funzioni per non meno di 5000 ore con una probabilità di almeno 0.95?

Soluzioni della prova scritta del 20 febbraio 2020

1. (i) Indichiamo con A, B, C, rispettivamente, gli eventi che si sia estratta la pallina numero $1, 2$ o 3. Risulta $P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$. La v.a X può assumere valori $0, 1, 2, 3$ e si ha:

$$P(X = 0|A) = P(X = 1|A) = 1/2$$

$$P(X = 0|B) = P(X = 2|B) = 1/4, \; P(X = 1|B) = 1/2$$

$$P(X = 0|C) = P(X = 3|C) = 1/8, \; P(X = 1|C) = \binom{3}{1}\frac{1}{8} = \frac{3}{8},$$

$$P(X = 2|C) = \binom{3}{2}\frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

Dunque:

$$P(X = 0) = P(X = 0|A)P(A) + P(X = 0|B)P(B) + P(X = 0|C)P(C) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{24}$$

$$P(X = 1) = P(X = 1|A)P(A) + P(X = 1|B)P(B) + P(X = 1|C)P(C) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{24}$$

$$P(X = 2) = P(X = 2|A)P(A) + P(X = 2|B)P(B) + P(X = 2|C)P(C) =$$

$$= \left(0 + \frac{1}{4} + \frac{3}{8}\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{24}$$

$$P(X = 3) = P(X = 3|A)P(A) + P(X = 3|B)P(B) + P(X = 3|C)P(C) =$$

$$= \left(0 + 0 + \frac{1}{8}\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{24}.$$

(ii) Risulta

$$E(X) = 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2) + 3 \cdot P(X = 3) = \frac{11}{24} + \frac{10}{24} + \frac{3}{24} = 1.$$

Inoltre $P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{5}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{4}$.

2. (i) Affinché $f(x, y)$ sia una densità bisogna risolvere la seguente equazione nell'incognita λ :

$$\int_{R^2} f(x, y)dxdy = 1.$$

Esplicitamente

$$\int_1^2 \int_0^1 \lambda \frac{\sqrt{y}}{x^2} dxdy = 1.$$

Ma

$$\int_1^2 \int_0^1 \lambda \frac{\sqrt{y}}{x^2} dxdy = \frac{2\alpha}{3} \int_1^2 \frac{1}{x^2} \Big[y\sqrt{y} \Big]_{y=0}^{y=1} dx = \frac{2\lambda}{3} \left(\frac{-1}{x} \right) \Big|_1^2 = \frac{\lambda}{3}.$$

Pertanto la funzione $f(x, y)$ è una densità per $\lambda = 3$.
(ii)

$$P(2X \geq 3Y) = \int_1^{\frac{3}{2}} \int_0^{\frac{2x}{3}} \frac{3\sqrt{y}}{x^2} dxdy + \int_{\frac{3}{2}}^2 \int_0^1 \frac{3\sqrt{y}}{x^2} dxdy =$$

$$= \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{2}{x^2} y\sqrt{y} \Big|_0^{\frac{2x}{3}} dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{2}{x^2} y\sqrt{y} \Big|_0^1 dx = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{x} dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{2}{x^2} dx =$$

$$= \frac{8}{9} \sqrt{\frac{2}{3}} x\sqrt{x} \Big|_1^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{x} \Big|_{\frac{3}{2}}^2 = \frac{4}{3} - \frac{8}{9} \sqrt{\frac{2}{3}} - 1 + \frac{4}{3} = \frac{5}{3} - \frac{8}{9} \sqrt{\frac{2}{3}}$$

(ii) Calcoliamo le densità marginali di X ed Y; $f_X(x) = 0$ se $x \notin [1, 2]$, altrimenti si ha

$$f_X(x) = \int_R f(x, y) dy = \int_0^1 \frac{3\sqrt{y}}{x^2} dy = \frac{2}{x^2} \;\; se \; x \in [1, 2].$$

$f_Y(y) = 0$ se $y \notin [0, 1]$, altrimenti si ha

$$f_Y(y) = \int_R f(x, y) dx = \int_1^2 \frac{3\sqrt{y}}{x^2} dx = \frac{3\sqrt{y}}{2}$$

e quindi X ed Y sono indipendenti dal momento che $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$.

3.

Sia X la durata di un generico componente e λ il parametro della legge esponenziale seguita da X. Per formule note si ha $100 = E[X] = 1/\lambda$, $VarX = 1/\lambda^2$, da cui $\lambda = 10^{-2}$ e $VarX = 10^4$.
(a) Per $i = 1, 2, \ldots 50$, sia X_i la durata dell' i-esimo componente. Il tempo totale di funzionamento di un televisore è dato evidentemente da $S_{50} = X_1 + X_2 + \ldots + X_{50}$. Si chiede di calcolare $P(3000 \leq S_{50} \leq 6000)$, cioé $P(S_{50} \leq 6000) - P(S_{50} < 3000)$. Posto $\mu = E[X_i]$ e $\sigma^2 = Var(X_i)$, dai dati si ricava $\mu = 10^2$ e $\sigma^2 = 10^4$. Dato che le X_i sono indipendenti, hanno la stessa legge e media e varianza finita (e $n = 50$ è abbastanza grande) si può applicare la formula dell' approssimazione normale, fornita dal TLC:

$$P(S_{50} \leq 6000) = P\left(\frac{S_{50} - 50\mu}{\sigma\sqrt{50}} \leq \frac{6000 - 50\mu}{\sigma\sqrt{50}} \right) = P\left(\frac{S_{50} - 50\mu}{\sigma\sqrt{50}} \leq \frac{6000 - 5000}{100\sqrt{50}} \right) =$$

$$= P\left(\frac{S_{50} - 50\mu}{\sigma\sqrt{50}} \leq 1.41 \right) \approx \Phi(1.41) = 0.921$$

ove Φ denota la f.d.d. di una v.a. normale standard; analogamente:

$$P(S_{50} \leq 3000) = P\left(\frac{S_{50} - 50\mu}{\sigma\sqrt{50}} \leq \frac{3000 - 50\mu}{\sigma\sqrt{50}}\right) = P\left(\frac{S_{50} - 50\mu}{\sigma\sqrt{50}} \leq \frac{3000 - 5000}{100\sqrt{50}}\right) =$$

$$= P\left(\frac{S_{50} - 50\mu}{\sigma\sqrt{50}} \leq -2.83\right) \approx \Phi(-2.83) = 1 - \Phi(2.83) = 1 - 0.997 = 0.003$$

Dunque, la probabilità cercata è uguale a $0.921 - 0.003 = 0.918$.
(b) Sia n il numero di componenti necessari e, per $i = 1, 2 \ldots, n$ sia X_i la durata dell'i-esimo componente. In modo analogo al punto precedente, si osserva che il tempo totale di funzionamento di un televisore è dato evidentemente da $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, e si chiede che risulti $P(S_n \geq 5000) \geq 0.95$ Dalla formula dell'approssimazione normale, si ottiene

$$P(S_n \geq 5000) = P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \geq \frac{5000 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) =$$

$$= P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \geq \frac{50 - n}{\sqrt{n}}\right) \approx 1 - \Phi((50 - n)/\sqrt{n}) = \Phi(-(50 - n)/\sqrt{n})$$

Dovrà dunque essere

$$\Phi((n - 50)/\sqrt{n}) \geq 0.95$$

D'altra parte, $0.95 = \Phi(1.65)$, pertanto, essendo Φ crescente, deve aversi

$$\frac{n - 50}{\sqrt{n}} \geq 1.65$$

Risolvendo rispetto a n la disuguaglianza precedente, si ricava $\sqrt{n} \geq 7.94$ da cui $n \geq 63.02$, e dunque $n \geq 64$.