GRAFI, ALGEBRE, EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

Domenico Fiorenza

Dipartimento di Matematica
Università di Roma "La Sapienza" — ITALY
e–mail: fiorenza@mat.uniroma1.it

ABSTRACT: Questa è una versione divulgativa del lavoro *"Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry"*, di Maxim Kontsevich e Yuri Manin, *Comm. Math. Phys.*, 164(3):525-562,1994, e-print: `hep-th/9402147`

Incominciamo con un problema enumerativo molto semplice: quante curve piane di gardo d passano per n punti? Per rispondere a questa domanda basta osservare che una curva piana di grado d (non necessariamente irriducibile) è data da un polinomio omogeneo di grado d nelle variabili X_0, X_1, X_2 e questo polinomio è univocamende individuato a meno di multipli scalari. Ne segue

$$\{\text{Curve piane di grado } d\} \simeq \mathbb{P}\left(\binom{d+2}{2} - 1, \mathbb{C}\right).$$

La condizione di passaggio per un punto è lineare omogenea, dunque la condizione di passaggio per n punti generici equivale ad n condizioni lineari e linearmente indipendenti tra loro, da cui

$$\{\text{Curve piane di grado } d \text{ per } n \text{ punti generici}\} \simeq \mathbb{P}\left(\binom{d+2}{2} - (n+1), \mathbb{C}\right).$$

In particolare l'insieme di curve cercate è finito se e solo se $n = \binom{d+2}{2} - 1$, ed in questo caso c'è un'unica curva con le caratteristiche richieste. Ad esempio, per 2 punti passa una sola retta, per 5 punti una sola conica, per 9 punti una sola cubica e così via.

Proviamo adesso a risolvere un problema enumerativo un po' più compicato: quante curve razionali di grado d passano per n punti? Per $d = 1, 2$, si tratta della stessa domanda del problema precedente, in quanto rette e coniche sono curve razionali. Ma già per $d = 3$ la domanda cambia radicalmente: il punto è che per $d \geq 3$ l'essere razionali non è una condizione generica. Per cercare di risolvere il problema della conta delle curve razionali, iniziamo con l'osservare che una curva piana razionale irriducibile è descritta da una mappa

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{P}^1 &\to \mathbb{P}^2 \\ [\xi_0, \xi_1] &\mapsto [X_0(\xi_0,\xi_1), X_1(\xi_0,\xi_1), X_2(\xi_0,\xi_1)] \end{aligned}$$

dove gli $X_i(\xi_0, \xi_1)$ sono polinomi omogenei di grado d. L'appllicazione φ determina i polinomi X_i a meno della moltiplicazione per uno scalare, e dunque

$$\{\varphi \colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2 \text{ di grado } d\} \simeq \mathbb{P}\left(3(d+1)-1, \mathbb{C}\right).$$

D'altronde due mappe razionali definiscono la stessa curva se differiscono per una riparametrizzazione del loro dominio, ovvero per un automorfismo di $\mathbb{P}^1$. Il gruppo degli automorfismi di $\mathbb{P}^1$ è $PGL_2(\mathbb{C})$ che ha dimensione complessa 3. Ne segue che

$$\dim_{\mathbb{C}}\{\text{curve razionali di grado } d\} = 3d-1$$

Imporre il passaggio per n punti generici equivale ad imporre n condizioni (non lineari) indipendenti. Ne segue che il numero di curve razionali di grado d per n punti generici è finito se e solo se $n = 3d-1$. Ritroviamo così che per 2 punti passano un numero finito di rette e per 5 punti un numero finito di coniche. Inoltre adesso sappiamo che per 8 punti passa una sola cubica razionale. Ancora non sappiamo come calcolare il numero

$$N(d) := \#\{\text{curve razionali di grado } d \text{ per } n \text{ punti generici}\},$$

sappiamo solamente che $N(1) = N(2) = 1$. Per determinare $N(3)$ possiamo ragionare come segue. Una cubica piana è razionale se e solo se è singolare. Dalla soluzione del primo problema enumerativo che abbiamo affrontato sappiamo che le cubiche per 8 punti generici formano un sistema lineare di cubiche di dimensione 1, possiamo pertanto scriverle nella forma

$$C_{\alpha,\beta} := \alpha C_0 + \beta C_1.$$

La cubica $C_{\alpha,\beta}$ è singolare se e solo se il discriminante $\Delta(C_{\alpha,\beta})$ è uguale a zero. Il discriminante di una cubica è omogeneo di dodicesimo grado nei coefficienti. Poichè i coefficienti di $C_{\alpha,\beta}$ sono di primo gardo nelle variabili α e β, il polinomio $\Delta(\alpha, \beta) := \Delta(C_{\alpha,\beta})$ è un polinoimio omogeneo di dodicesimo grado nelle variabili α e β. Ne segue che i suoi zeri costituiscono un insieme di 12 punti nel sistema lineare di cubiche $\alpha C_0 + \beta C_1$. Dunque $N(3) = 12$. Potremmo a questo punto cercare di affrontare con la stessa tecnica il problema di determinare $N(4)$, ma le cose si complicano notevolmente in quanto per $d \geq 4$ non è più vero che una curva è razionale se e solo se è singolare[1]. E' meglio pertanto affrontare il problema da un altro punto di vista.

Indichiamo con $\mathcal{M}_{0,n}(\mathbb{P}^2, d)$ lo spazio di tutte le coppie $((x_1, \ldots, x_n), \varphi)$, dove $x_1, \ldots, x_n$ sono punti distinti di $\mathbb{P}^1$ e $\varphi \colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ è una mappa di grado d, modulo la relazione di equivalenza

$$((x_1, \ldots, x_n), \varphi) \simeq ((y_1, \ldots, y_n), \psi)$$

se e solo se esiste $\eta \colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ tale che $\eta(x_i) = y_i$ per ogni $i = 1, \ldots n$ e $\psi \circ \eta = \varphi$. C'è una mappa naturale di valutazione

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_d \colon \mathcal{M}_{0,n}(\mathbb{P}^2, d) &\to (\mathbb{P}^2)^n \\ [((x_1, \ldots, x_n), \varphi)] &\mapsto (\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)) \end{aligned}$$

[1]E' vero un enunciato più raffinato, ovvero che una curva è razionale se e solo se è abbastanza singolare; una sola singolarità nodale come nel caso delle cubiche non è abbastanza per $d \geq 4$.

Inoltre c'è una proiezione naturale che dimentica l'applicazione φ da $\mathcal{M}_{0,n}(\mathbb{P}^2, d)$ nello spazio $\mathcal{M}_{0,n}$ delle n-ple di punti distinti in $\mathbb{P}^2$ modulo la relazione di equivalenza

$$(x_1, \ldots, x_n) \simeq (y_1, \ldots, y_n)$$

se e solo se esiste $\eta \colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ tale che $\eta(x_i) = y_i$ per ogni $i = 1, \ldots n$. Abbiamo così un diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_{0,n}(\mathbb{P}^2, d) \arrow[r, "\mathrm{ev}_d"] \arrow[d, "\pi"'] & (\mathbb{P}^2)^n \\ \mathcal{M}_{0,n} & \end{tikzcd}$$

Lo spazio $\mathcal{M}_{0,n}$ è lo spazio dei moduli delle superfici di Riemann di genere zero n-puntate. E' una varietà quasi-proiettiva; ha una naturale compattificazione proiettiva ottenuta aggiungendo le curve alebrice di genere zero con n punti marcati e con singolarità nodali (sono tutte riducibili). Tale compattificazione, dovuta a Deligne e Mumford, prende il nome di spazio dei moduli delle curve stabili di genere zero ed n marcature e si indica con il simbolo $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$. In modo analogo si definisce una compattificazione $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^2, d)$ dello spazio delle mappe razionali, ottenendo lo spazio delle mappe stabili di genere zero, grado d e con n punti marcati. Il diagramma descritto sopra si estende alle compattificazioni:

$$\begin{tikzcd} \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^2, d) \arrow[r, "\mathrm{ev}_d"] \arrow[d, "\pi"'] & (\mathbb{P}^2)^n \\ \overline{\mathcal{M}}_{0,n} & \end{tikzcd}$$

Siano ora $x_1, \ldots, x_{3d-1}$ punti distinti in $\mathbb{P}^2$. Allora

$$N(d) = \# \left\{ \mathrm{ev}_d^{-1}(x_1, \ldots, x_n) \right\} = \deg(\mathrm{ev}_d)$$

Se indichiamo con $\omega_{(\mathbb{P}^2)^{3d-1}} := \omega_{\mathbb{P}^2} \wedge \cdots \wedge \omega_{\mathbb{P}^2}$ la classe fondamentale di $(\mathbb{P}^2)^{3d-1}$, otteniamo

$$N(d) = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,3d-1}(\mathbb{P}^2,d)} \mathrm{ev}_d^* \left(\omega_{(\mathbb{P}^2)^{3d-1}} \right) = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,3d-1}} \pi_* \mathrm{ev}_d^* \left(\omega_{\mathbb{P}^2}^{\wedge 3d-1} \right)$$

Il membro a destra di quest'equazione può essere definito anche per n diverso da $3d-1$ e si estende naturalmente a classi di coomologia di $\mathbb{P}^2$ e a classi di omologia di $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ diverse dalle classi fondametali $\omega_{\mathbb{P}^2}$ e $[\overline{\mathcal{M}}_{0,n}]$ rispettivamente. Iniziamo con l'osservare che l'isomorfismo di Kunneth identifica $H^*\left((\mathbb{P}^2)^n; \mathbb{C}\right)$ con $H^*\left(\mathbb{P}^2; \mathbb{C}\right)^{\otimes n}$, e definiamo

$$I_d^{GW} \colon H_*(\overline{\mathcal{M}}_{0,n}; \mathbb{C}) \to \mathrm{Hom}\left(H^*\left(\mathbb{P}^2; \mathbb{C}\right)^{\otimes n}; \mathbb{C} \right)$$

mediante la formula

$$I_{d,[\Gamma]}^{GW}(\gamma_1 \otimes \cdots \otimes \gamma_n) := \int_{[\Gamma]} \pi_* \mathrm{ev}_d^* \left(\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n\right)$$

dove si intende che l'integrale e nullo se $\dim \pi_* \mathrm{ev}_d^* (\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n) \neq \dim[\Gamma]$, ovvero se $\dim[\Gamma] \neq (\sum_{i=1}^n \deg \gamma_i) - 6d - 4$. I numeri complessi $I^{GW}_{d,[\Gamma]}(\gamma_1 \otimes \cdots \otimes \gamma_n)$ prendono il nome de invarianti di Gromov-Witten (di genere zero) di $\mathbb{P}^2$ (è possibile definire in modo analogo gli invarianti di Gromov-Witten per una generica varietà proiettiva V). mettiamo insieme le varie applicazioni I^{GW}_d definendo $I^{GW} := \sum_{d=0}^{\infty} I^{GW}_d$.

Per ogni $n \geq 3$, poniamo $Z_n := I^{GW}_{[\overline{\mathcal{M}}_{0,n}]}$. L'applicazione

$$Z_n \colon H^* \left(\mathbb{P}^2; \mathbb{C}\right)^{\otimes n} \to \mathbb{C}$$

è un tensore simmetrico. Lo spazio vettoriale complesso $H^* \left(\mathbb{P}^2; \mathbb{C}\right)$ ha un prodotto scalare non degenere $(-,-)$ dato dall'accoppiamento di Poincaré; poniamo

$$Z_2(\gamma_1 \otimes \gamma_2) := (\gamma_1, \gamma_2) = \int_{\mathbb{P}^2} \gamma_1 \wedge \gamma_2$$

Infine, poniamo

$$\begin{aligned} Z_1 \colon H^* \left(\mathbb{P}^2; \mathbb{C}\right) &\to \mathbb{C} \\ \gamma &\mapsto (\gamma, \Delta_0) \end{aligned}$$

dove $\Delta_0 \in H^0(\mathbb{P}^2; \mathbb{C})$ è la classe corrispondente alla classe fondamentale in omologia $[\mathbb{P}^2]$ mediante la dualità di Poincaré. La famiglia di tensori simmetrici $\{Z_n\}_{n \geq 1}$ insieme al prodotto scalare $(-,-)$ definisce una funzione di stato

$$Z \colon \text{Grafi} \to \mathrm{Hom}\left(H^* \left(\mathbb{P}^2; \mathbb{C}\right)^{\otimes *}; \mathbb{C}\right)$$

Il numero complesso $Z(\Gamma)$ prende il nome di ampiezza del grafo Γ. La notazione $[\Gamma]$ per le classi di omologia di $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ usata sopra non è casuale; è infatti ben noto che le classi di coomologia di $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ possono essere descritte mediante i cosiddetti grafi duali delle curve stabili. Si ha cioé un applicazione lineare

$$[\ ] \colon \text{Grafi} \to H_* \left(\overline{\mathcal{M}}_{0,*}; \mathbb{C}\right)$$

A questo punto possiamo enunciare il teorema fondamentale della teoria degli invarianti di Gromov-Witten, che poi è quello che uno si aspetta: $Z(\Gamma) = I^{GW}_{[\Gamma]}$, ovvero il diagramma

$$\begin{tikzcd} \text{Grafi} \arrow[r, "Z"] \arrow[d, "{[\ ]}"'] & \mathrm{Hom}\left(H^* \left(\mathbb{P}^2; \mathbb{C}\right)^{\otimes *}; \mathbb{C}\right) \\ H_* \left(\overline{\mathcal{M}}_{0,*}; \mathbb{C}\right) \arrow[ur, "I^{GW}"'] & \end{tikzcd}$$

commuta: gli inavarianti di Gromov-Witten definiscono una struttura di $\mathcal{G}$-algebra sulla coomologia di $\mathbb{P}^2$ (dove $\mathcal{G}$ sta per "grafi").

Più in generale, se V è uno spazio vettoriale complesso, una struttura di $\mathcal{G}$-algebra su V è una rappresentazione

$$Z \colon \text{Grafi} \to \mathrm{Hom}\left(V^{\otimes *}; \mathbb{C}\right)$$

Se indichiamo con v_n il verice n-valente, allora

$$\mu_n := Z(\mathsf{v}_n) \colon V^{\otimes n} \to \mathbb{C}$$

è un'operazione n-aria simmetrica; inoltre, se indichiamo con e il lato (senza vertici), allora

$$(-,-) := Z(\mathsf{e}) \colon V^{\otimes 2} \to \mathbb{C}$$

è un accoppiamento non degenere.

In questo modo abbiamo legato i primi due elementi del titolo, grafi ed algebre; dobbiamo ora introdurre in questo discorso gli operatori differenziali. Sia allora V uno spazio vettoriale complesso dotato di un accoppiamento non degenere $(-,-)$ e definiamo una rappresentazione

$$D \colon \text{Grafi} \to \text{Operatori differenziali su } V$$

mediante

$$\begin{cases} D(\mathsf{v}_n) = D^n \\ D(\mathsf{e}) = (-,-) \end{cases}$$

dove D^n indica l'operazione di derivata n-ma:

$$(D^n\Phi)(v_1 \otimes \cdots v_n) = \frac{\partial^n \Phi}{\partial v_1 \cdots \partial v_n}$$

per ogni scelata di vettori $v_1, \ldots, v_n \in V$. Per alleggerire le notazioni, scriveremo D_Γ per indicare l'operatore differenziale $D(\Gamma)$. Osserviamo che una funzione Φ di calsse C^∞ su V definisce una famiglia di tensori simmetrici, e dunque una funzione di stato, mediante

$$\begin{cases} Z_\Phi(\mathsf{v}_n) = D^n\Phi\big|_0 \\ Z_\Phi(\mathsf{e}) = (-,-) \end{cases}$$

ed è immediato osservare che vale l'uguaglianza

$$D_\Gamma(\Phi)\big|_0 = Z_\Phi(\Gamma)$$

Se Φ è analitica, allora

$$\Phi(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n\Phi\big|_0}{n!}(v^{\otimes n}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z_\Phi(\mathsf{v}_n)}{n!}(v^{\otimes n})$$

cioé Φ è univocamente determinata dalla rappresentazione Z_Φ. Questo ci porta a definire il potenziale (o funzione generatrice) di una rappresentazione

$$Z \colon \text{Grafi} \to \text{Hom}\left(V^{\otimes *}; \mathbb{C}\right)$$

come

$$\Phi_Z(v) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z(\mathsf{v}_n)}{n!}(v^{\otimes n}).$$

Chiaramente $Z_{\Phi_Z} = Z$ e $\Phi_{Z_\Phi} = \Phi$, e dunque ogni funzione analitica si può pensare come il potenziale di un'opportuna $\mathcal{G}$-algebra. Per descrivere l'azione dell'operatore differenziale D_Γ sulla funzione analitica Φ è utile introdurre l'operazione

$$\pi^* \colon \text{Grafi} \to \text{Grafi}$$

che trasforma il grafo Γ nella somma di tutti i grafi che si ottengono aggiungendo una gamba a Γ in tutti i modi possibili. La scelta del simbolo π^* per indicare quest'operazione non c̀asuale: l'operazione π^* sui grafi corrisponde infatti al pull-back sulla coomologia di $\overline{\mathcal{M}}_{0,*}$ indotto dalla mappa $\pi\colon \overline{\mathcal{M}}_{0,n+1} \to \overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ che "dimentica" l'ultimo punto.

Chiaramente si ha $\pi^*(\mathsf{v}_n) = \mathsf{v}_{n+1}$, e dunque la formula di Taylor per Φ si può riscrivere come

$$\Phi = Z_\Phi \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pi^*)^n}{n!} (\mathsf{v}_0) \right)$$

Da questa formula si ricava facilmente che, per ogni garfo Γ, vale

$$D_\Gamma \Phi = Z_\Phi \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pi^*)^n}{n!} (\Gamma) \right)$$

Se ne ricava immediatamente che,

$$D_\Gamma \Phi = 0 \Leftrightarrow (\pi^*)^n \Gamma \in \ker Z_\Phi,\ \forall n \geq 0.$$

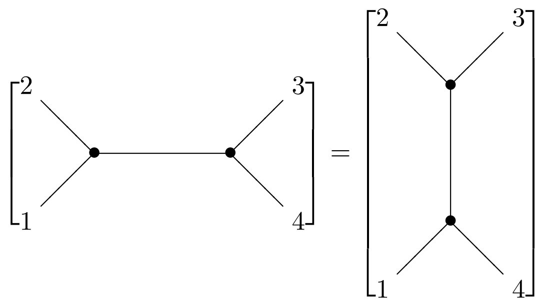
Introduciamo allora la nozione di ideale π^*-stabile nel modo seguente: un ideale $I \leq$ Grafi si dice π^*-stabile se $\pi^* I \subseteq I$. E' evidente dalla definizione che, se Γ è un elemento di un sotto-ideale π^*-stabile di $\ker Z_\Phi$, allora $D_\Gamma \Phi = 0$. Torniamo adesso agli invarianti di Gromov-Witten. Ricordiamo che ad ogni grafo è associata una classe di omologia in $\overline{\mathcal{M}}_{0,*}$, è cioé definita un'applicazione lineare

$$[\,]\colon \text{Grafi} \to H_*\left(\overline{\mathcal{M}}_{0,*}; \mathbb{C}\right)$$

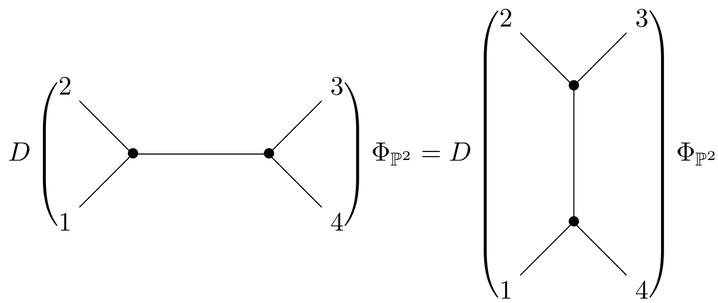
Il nucleo di $[\,]$ prende il nome di ideale di Keel; lo indicheremo col simbolo $Keel$. L'ideale di Keel è evidentemente π^*-stabile, grazie alla commutatività del diagramma

$$\begin{tikzcd}
\text{Grafi} \arrow[r, "{[\,]}"] \arrow[d, "\pi^*"'] & H_*\left(\overline{\mathcal{M}}_{0,*}; \mathbb{C}\right) \arrow[r, "\text{Poincaré}"] & H^*\left(\overline{\mathcal{M}}_{0,*}; \mathbb{C}\right) \arrow[d, "\pi^*"'] \\
\text{Grafi} \arrow[r, "{[\,]}"] & H_*\left(\overline{\mathcal{M}}_{0,*}; \mathbb{C}\right) \arrow[r, "\text{Poincaré}"] & H^*\left(\overline{\mathcal{M}}_{0,*}; \mathbb{C}\right)
\end{tikzcd}$$

Indichiamo con $\Phi_{\mathbb{P}^2}$ il potenziale di Gromov-Witten (di genere zero) di $\mathbb{P}^2$, ovvero il potenziale della struttura di $\mathcal{G}$-algebra indotta sulla coomologia di $\mathbb{P}^2$ dagli invarianti di Gromov-Witten. Dal fatto che la funzione di stato (rappresentazione dei grafi) indotta dagli inavarianti di Gromov-Witten fattorizza attraverso la mappa $[\,]$ segue immediatamente che l'ideale di Keel è contenuto nel nucleo di $Z_{\Phi_{\mathbb{P}^2}}$, e dunque ogni elemento di $Keel$ induce un'equazione differenziale soddisfatta da $\Phi_{\mathbb{P}^2}$. In particolare, poiché vale



otteniamo che il potenziale di Gromov-Witten di genere zero soddisfa l'equazione WDVV:[2]



Prima di andare avanti è bene osservare che il fatto che il potenziale di Gromov-Witten di genere zero soddisfi l'equazione WDVV non dipende dalla particolare scelta di $\mathbb{P}^2$ come varietà bersaglio: il potenziale di Gromov-Witten di genere zero di una qualunque varietà proiettiva soddisfa la WDVV.

Torniamo al potenziale dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^2$. Per scrivere esplicitamente l'equazione WDVV per $\Phi_{\mathbb{P}^2}$ dobbiamo fissare una base per la coomologia $H^*\left(\mathbb{P}^2\right)$. Come spazio vettoriale, $H^*\left(\mathbb{P}^2\right) \simeq \mathbb{C}^3$; indichiamo con $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base e con x_1, x_2, x_3 le coordiante corrispondenti. Infine indichiamo con g^{ij} la matrice inversa della matrice che definisce l'accoppiamento di Poincaré su $H^*\left(\mathbb{P}^2\right)$. Con queste notazioni la WDVV diventa

$$\sum_{m,n=1}^{3} \frac{\partial^3 \Phi_{\mathbb{P}^2}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_m} g^{mn} \frac{\partial^3 \Phi_{\mathbb{P}^2}}{\partial x_n \partial x_k \partial x_l} = \sum_{m,n=1}^{3} \frac{\partial^3 \Phi_{\mathbb{P}^2}}{\partial x_i \partial x_l \partial x_m} g^{mn} \frac{\partial^3 \Phi_{\mathbb{P}^2}}{\partial x_n \partial x_j \partial x_k},$$

$$\forall i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$$

Questo sistema di equazioni differenziali si semplifica drasticamente se scegliamo come base della coomologia la base canonica: siano $e_1 := \Delta_0$, la classe duale della classe fondamentale in omologia; $e_2 := \Delta_1$, la classe duale di $\mathbb{P}^1 \subseteq \mathbb{P}^2$ ed infine $e_3 := \Delta_2$, la classe duale del punto, ovvero $\Delta_2 = \omega_{\mathbb{P}^2}$; indichiamo con x, y, z le coordinate corrispondenti di modo che un elemento $v \in H^*\left(\mathbb{P}^2, \mathbb{C}\right)$ si scrive $v = x\Delta_0 + y\Delta_1 + z\Delta_2$. La matrice dell'accoppiamento di Poincaré rispetto a questa base è semplicemente è

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[2] Witten-Dijkgraaf-Verlinde-Verlinde

Il potenziale di Gromov-Witten di $\mathbb{P}^2$ è allora

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathbb{P}^2}(v) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} I^{GW}_{[\overline{\mathcal{M}}_{0,n}]}(v^{\otimes n}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{d=0}^{\infty} \frac{1}{n!} I^{GW}_{d,[\overline{\mathcal{M}}_{0,n}]}(v^{\otimes n}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{d=0}^{\infty} \sum_{n_0+n_1+n_2=n} \frac{x^{n_0}y^{n_1}z^{n_2}}{n_0!n_1!n_2!} I^{GW}_{d,[\overline{\mathcal{M}}_{0,n}]}(\Delta_0^{\otimes n_0}\otimes\Delta_1^{\otimes n_1}\otimes\Delta_2^{\otimes n_2})\end{aligned}$$

Per andare avanti ci servono due proprietà degli invarianti di Gromov-Witten di $\mathbb{P}^2$ che non abbiamo ancora introdotto:

- $I^{GW}_{d,[\overline{\mathcal{M}}_{0,n}]}(\Delta_0^{\otimes n_0}\otimes\Delta_1^{\otimes n_1}\otimes\Delta_2^{\otimes n_2}) = 0,\ \forall n \geq 4, n_0 > 0$;
- $I^{GW}_{d,[\overline{\mathcal{M}}_{0,n}]}(\Delta_1 \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_{n-1}) = d \cdot I^{GW}_{d,[\overline{\mathcal{M}}_{0,n-1}]}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_{n-1})$.

Utilizzando queste due proprietà troviamo

$$\Phi_{\mathbb{P}^2}(v) = \psi(x,y,z) + \sum_{n=4}^{\infty}\sum_{d=0}^{\infty}\sum_{n_1+n_2=n} \frac{y^{n_1}z^{n_2}}{n_1!n_2!} I^{GW}_{d,[\overline{\mathcal{M}}_{0,n}]}(\Delta_1^{\otimes n_1}\otimes\Delta_2^{\otimes n_2})$$

dove

$$\psi(x,y,z) = 1 + z + xz + \frac{1}{2}(xy^2 + x^2 z)$$

Per le ragioni dimensionali osservate in precedenza, $I^{GW}_{d,[\overline{\mathcal{M}}_{0,n}]}(\Delta_1^{\otimes n_1}\otimes\Delta_2^{\otimes n_2}) = 0$ a meno che non sia abbia $n_2 = 3d-1$, e possiamo riscrivere $\Phi_{\mathbb{P}^2}$ come

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathbb{P}^2}(v) &= \psi(x,y,z) + \sum_{d=1}^{\infty}\sum_{n\geq 3d-1}^{\infty} \frac{y^{n-3d+1}z^{3d-1}}{(n-3d+1)!(3d-1)!} I^{GW}_{d,[\overline{\mathcal{M}}_{0,n}]}(\Delta_1^{\otimes n-3d+1}\otimes\Delta_2^{\otimes 3d-1}) \\ &= \psi(x,y,z) + \sum_{d=1}^{\infty}\sum_{n\geq 3d-1}^{\infty} \frac{y^{n-3d+1}z^{3d-1}\cdot d^{n-3d+1}}{(n-3d+1)!(3d-1)!} I^{GW}_{d,[\overline{\mathcal{M}}_{0,3d-1}]}(\Delta_2^{3d-1}) \\ &= \psi(x,y,z) + \sum_{d=1}^{\infty}\sum_{n\geq 3d-1}^{\infty} N(d)\frac{(d\cdot y)^{n-3d+1}z^{3d-1}}{(n-3d+1)!(3d-1)!} \\ &= \psi(x,y,z) + \sum_{d=1}^{\infty}\sum_{k\geq 0}^{\infty} N(d)\frac{(d\cdot y)^{k}z^{3d-1}}{k!(3d-1)!} \\ &= \psi(x,y,z) + \sum_{d=1}^{\infty} N(d)\frac{z^{3d-1}}{(3d-1)!}e^{d\cdot y}\end{aligned}$$

In questo modo riconosciamo esplicitamente che $\Phi_{\mathbb{P}^2}$ è una serie generatrice per i numeri $N(d)$ che stavamo cercando. Poniamo

$$\varphi(y,z) := \sum_{d=1}^{\infty} N(d)\frac{z^{3d-1}}{(3d-1)!}e^{d\cdot y}$$

di modo che $\Phi_{\mathbb{P}^2}(v) = \psi(x,y,z) + \varphi(y,z)$. Se nell'equazione WDVV facciamo la scelta $i = 2, j = 2, k = 3, l = 3$ otteniamo l'equazione differenziale

$$\varphi_{zzz} = (\varphi_{yyz})^2 - \varphi_{yyy}\cdot\varphi_{yzz}$$

da cui

$$\sum_{d=2}^{\infty} \frac{N(d)}{(3d-4)!} z^{3d-4} e^{d\cdot y} = \left(\sum_{d=1}^{\infty} d^2 N(d) \frac{z^{3d-2}}{(3d-2)!} e^{d\cdot y}\right)^2 - \left(\sum_{d=1}^{\infty} d^3 N(d) \frac{z^{3d-1}}{(3d-1)!} e^{d\cdot y}\right)\left(\sum_{d=1}^{\infty} d\cdot N(d) \frac{z^{3d-3}}{(3d-3)!} e^{d\cdot y}\right)$$

$$= \sum_{d=2}^{\infty} \sum_{\substack{d_1+d_2=d \\ d1,d_2\geq 1}} \frac{{d_1}^2 {d_2}^2 N(d_1)N(d_2)}{(3d_1-2)!(3d_2-2)!} z^{3d-4} e^{d\cdot y} - \sum_{d=2}^{\infty} \sum_{\substack{d_1+d_2=d \\ d1,d_2\geq 1}} \frac{{d_1}^3 d_2 \cdot N(d_1)N(d_2)}{(3d_1-1)!(3d_2-3)!} z^{3d-4} e^{d\cdot y}$$

Otteniamo così la relazione ricorsiva

$$\boxed{N(d) = \sum_{k=1}^{d-1} \left[\binom{3d-4}{3k-2} k^2 (d-k)^2 - \binom{3d-4}{3k-1} k^3 (d-k)\right] N(k)N(d-k)}$$

che, insieme al dato iniziale $N(1) = 1$ permette di calcolare tutti gli $N(d)$. Ad esempio si ha

$$\begin{aligned}
N(1) &= 1 \\
N(2) &= 1 \\
N(3) &= 12 \\
N(4) &= 620 \\
N(5) &= 87304 \\
N(6) &= 26312976 \\
N(7) &= 14616808192 \\
N(8) &= 13525751027392 \\
N(9) &= 19385778269260800 \\
N(10) &= 40739017561997799680
\end{aligned}$$