D'AL-KHAYYĀM À DESCARTES: SUR LES COURBES

Roshdi RASHED

«Il existe, écrit Jules Vuillemin, un rapport intime quoique moins apparent et plus incertain entre les Mathématiques pures et la Philosophie théorique. L'histoire des mathématiques et de la philosophie montre qu'un renouvellement des méthodes de celles-là a, chaque fois, des répercussions sur celles-ci.»[1] Suit l'évocation de quelques exemples fameux : la découverte des irrationnelles et le Platonisme ; la géométrie algébrique et la métaphysique de Descartes ; le calcul infinitésimal et le principe de continuité dans la philosophie de Leibniz.

Souligner ce rapport entre mathématiques et philosophie, ainsi que son rôle dans la reconstitution des systèmes philosophiques, notamment les plus grands, ce n'est en rien dans l'esprit de Jules Vuillemin l'effet d'un parti pris. Il s'agit pour lui, me semble-t-il, de rappeler, en même temps qu'un fait d'histoire, une règle de la méthode historique. À moins en effet de soutenir que les systèmes des philosophes sont de simples «doctrines» se nourrissant les unes des autres, ou découlent de manière pure et simple d'une réflexion solipsiste sur l'expérience vécue, force est de revenir aux lieux qui voient s'élaborer la connaissance. C'est là en effet que les philosophes puisent leurs thèmes de pensée et leurs modèles d'argumentation, en vue d'élaborer de véritables systèmes qu'ils veulent cohérents. Ce retour est donc la première règle de la méthode. Or ces lieux sont éminemment historiques, et même les mathématiques pures sont inscrites dans l'histoire. L'oublier, ce serait presque inévitablement céder à une illusion transcendantale et hisser le provisoire au rang du définitif et de l'essentiel. C'est pourquoi beaucoup d'histoire des mathématiques et des sciences s'impose à qui veut reconstituer les systèmes philosophiques avec toute la rigueur requise et retrouver, en philosophe cette fois, les principaux thèmes de la philosophie théorique. C'est une seconde règle de la méthode. Parmi ces lieux qui inspirent les philosophes, les mathématiques pures occupent une place privilégiée. Elles ont hérité ce privilège à la fois de l'histoire – c'est le plus ancien domaine de connaissance rationnelle – et du droit – ce sont elles qui ont vu se développer les métho-

[1] *L'Introduction à la philosophie de l'algèbre*, Paris, PUF, 1962, p. 4.

des d'argumentation les plus rigoureuses. Les mathématiques pures n'ont cependant pas l'exclusivité de ce rôle. Jules Vuillemin non seulement le savait, mais il l'a bien montré, comme l'attestent ses travaux sur Aristote, Saint Anselme, Kant, Russell, etc.

Ces conceptions et ces règles, il les avait faites siennes autour de sa quarantième année. Entre 1960 et 1962, il publia coup sur coup *Mathématiques et Métaphysique chez Descartes* et *La Philosophie de l'algèbre*. Dans le premier livre, deux questions sont intimement liées : comment les mathématiques de Descartes ont-elles pu ouvrir la voie aux mathématiques modernes, et en quoi ont-elles contribué au renouvellement de la métaphysique ? Dans *La Philosophie de l'algèbre*, nous sommes de plain-pied sur le terrain des mathématiques modernes, celles de Lagrange, de Gauss, Galois, Abel, Klein, Lie, etc., et de leur impact philosophique.

Dans cet exposé, je me place dans la perspective du premier de ces livres de Jules Vuillemin, pour reprendre à mon compte la question de la modernité mathématique à partir de Descartes et de ses contemporains, Fermat notamment.

Distinguons d'entrée de jeu entre la nouveauté mathématique et la modernité mathématique. Dans le cas de cette dernière, il ne suffit plus que le résultat – théorème ou proposition – soit nouveau : il doit en outre être celui d'un programme de recherche lui-même nouveau. Or, en moins d'une décennie, entre 1630 et 1640, on voit se déclarer plusieurs programmes mathématiques. En 1634 Roberval engage la recherche sur une nouvelle courbe transcendante, la cycloïde. Descartes et Fermat ne tarderont pas à le rejoindre, et lui-même, quatre ans plus tard, en 1638, toujours suivi par ces deux derniers, trouve l'aire d'une arche de cycloïde. La même année, il place la tangente à la cycloïde par une méthode cinématique. Vincent Viviani et Evangelista Torricelli la trouveront indépendamment un an plus tard. Cette recherche sur la courbe transcendante la plus célèbre du XVIIe siècle inaugure une analyse géométrique sur des fonctions transcendantes, analyse promise à l'avenir que l'on sait. Durant cette même décennie, Descartes et Fermat avaient donné des méthodes pour trouver la pente de la tangente au point d'abscisse x d'une courbe algébrique donnée. En 1639, Florimond de Beaune demandait au contraire une méthode permettant de trouver la courbe à partir d'une relation algébrique connue entre l'abscisse du point et la pente de la tangente en ce point. Ainsi se trouve posé le problème de l'inverse des tangentes, et du coup inaugurée une recherche nouvelle en géométrie différentielle. Toujours au cours de cette décennie, et précisément en 1639 aussi, Desargues achève le célèbre *Brouillon Project*, qui enrichit la recherche en géométrie projective. C'est encore pendant ces années, en 1640, que Fermat invente la méthode de la descente infinie, renouvelant ainsi la théorie des nombres. Trois ans auparavant, en 1637, la *Géométrie* de Descartes était déjà parue.

Une telle multiplicité de travaux fondamentaux sur un si court laps de temps est un phénomène suffisamment singulier dans l'histoire pour mériter d'être étudié comme tel. Mais aussi important est de situer chacun avec rigueur dans l'histoire des mathématiques. Je me borne ici, pour des raisons évidentes, au principal domaine étudié par Descartes : la géométrie algébrique.

La *Géométrie* de Descartes est-elle l'effet d'un nouveau programme de recherche, et comporte-t-elle des résultats inédits ? Si oui, en quel sens ? Ces questions nous mènent bon gré mal gré à l'histoire de la géométrie et de l'algèbre avant Descartes ; elles nous conduisent aussi à nous pencher sur l'évolution de sa propre pensée entre 1619 et 1637. On a coutume de focaliser la représentation de cette histoire sur deux moments : les *Coniques* d'Apollonius et la *Géométrie* de Descartes. Mais, pour respecter les règles de l'harmonie, force est alors d'algébriser un livre purement géométrique, à savoir les *Coniques*. Telle est la voie suivie par les historiens comme Mahoney, et, récemment, J. Dieudonné dans les études qu'il a consacrées à la géométrie algébrique. La recherche récente a renouvelé notre connaissance de cette histoire ; en éclairant les raisons de l'avènement de la géométrie algébrique, elle a du même coup permis de mieux situer la contribution de Descartes.

On sait en effet à présent qu'au cours du Xe siècle, plusieurs mathématiciens ont procédé à la traduction en termes de la nouvelle discipline, l'algèbre, de certains problèmes géométriques aussi bien plans que solides. Parmi ces mathématiciens, quelques-uns ont pensé résoudre l'une ou l'autre des équations cubiques obtenues par l'intersection des deux courbes coniques. Mais il fallait attendre un demi-siècle pour qu'al-Khayyām (1048-1131) se donne les moyens théoriques (unité de mesure, dimension, calcul géométrique, etc.) d'élaborer une théorie générale et de fonder ainsi un nouveau chapitre de l'algèbre, dont l'objet est la solution à l'aide de la géométrie de toutes les équations de degré ≤ 3. En fait, al-Khayyām s'est donné les moyens théoriques d'une double traduction : ramener les problèmes géométriques solides à des équations algébriques ; résoudre les équations algébriques du troisième degré irréductibles par l'intersection de deux courbes coniques. Si l'on veut exprimer cette double traduction par une formule, on pourrait dire que l'acte de naissance de la géométrie algébrique se trouve au point de rencontre de l'algèbre des polynômes développée depuis plus d'un siècle avant al-Khayyām à partir du livre fondateur d'al-Khwārizmī, et de la recherche sur les sections coniques, engagée depuis le milieu du IXe siècle à partir des *Coniques* d'Apollonius. Cette rencontre qui s'opérait au Xe siècle au hasard de l'un ou l'autre des problèmes géométriques, a été systématisée avec al-Khayyām.

Tout le problème est donc de comprendre les raisons de cette rencontre, et pourquoi elle s'est produite à ce moment et en ce lieu. Pour cela, il faut commencer par rappeler qu'elle s'est faite en relation avec la constitution et l'évolution de deux groupes de disciplines, tout au long des deux siècles qui ont précédé al-Khayyām – raison pour laquelle plusieurs mathématiciens antérieurs à al-Khayyām (Abū al-Jūd par exemple) l'ont partiellement entrevue. Le premier groupe de disciplines est celui de l'algèbre polynomiale et de la théorie des équations algébriques. Le second est composé de deux chapitres géométriques, le premier relatif aux constructions géométriques par intersection de coniques. Il ne s'agit plus, comme dans la géométrie ancienne, celle d'Eutocius par exemple, de problèmes isolés surgissant de manière sporadique et résolus par l'intersection de courbes, coniques ou autres ; on a cette fois une méthode pour explorer le domaine des problèmes géométriques, en grande majorité solides, mais éventuellement et aussi, pourrait-on dire, inutilement, quadratiques, que l'on construit à l'aide des *seules* courbes coniques, à l'exception de toutes les autres. Dans le cadre de ce nouveau chapitre, certains mathématiciens – Ibn al-Haytham par exemple – étudient, généralement avec soin, l'existence des solutions et leur nombre. Cette étude menée par analyse et synthèse repose sur les propriétés asymptotiques et locales des coniques, et en particulier leur contact.

Cultivé par les mathématiciens dès le milieu du IXe siècle, ce nouveau chapitre est devenu un domaine actif de recherche avec ceux de la seconde moitié du Xe siècle – al-Qūhī, Ibn Sahl, al-Sijzī, Abū al-Jūd, al-Ṣāghānī, Ibn al-Haytham, entre autres –, offrant aux algébristes des méthodes et des techniques, et surtout un nouveau critère d'admissibilité[2]. Désormais la construction à l'aide des sections coniques est une construction admissible en géométrie, au même titre que celle à la règle et au compas. C'est à l'évidence un pas considérable qui a été franchi. De plus, ces mêmes géomètres qui au cours des constructions procédaient par transformations géométriques – similitude, translation, homothétie, affinité … –, dont certaines seront empruntées par les algébristes, se sont appliqués à introduire le mouvement dans les énoncés et les démonstrations géométriques. Il ne s'agit pas ici du mouvement cinématique, mais du mouvement géométrique, c'est-à-dire abstraction faite du temps employé à l'accomplir. Ce mouvement continu – déplacement, rotation …– est réalisé à l'aide de l'un ou l'autre instrument, et toujours reproductible d'une manière exacte.

[2] Voir R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle,* 4 vol., London, al-Furqān, 1993-2002.

Al-Khayyām, lui, emprunte le nouveau critère d’admissibilité ainsi que les techniques et les méthodes des constructions géométriques. Il continue cependant d’adhérer à la légitimité aristotélicienne et euclidienne, et par conséquent, à la différence de la majorité des géomètres qui ont cultivé ce nouveau chapitre, rejette le mouvement hors des frontières de la géométrie. Le peu d’intérêt qu’il portait à la démonstration d’existence des points d’intersection autorisait ce rejet, puisqu’il n’avait nul besoin de se prononcer explicitement sur les courbes elles-mêmes et sur leur nature.

Le second chapitre de ce second groupe de disciplines porte sur l’étude théorique et pratique des procédés pour reproduire le mouvement et ainsi tracer les courbes coniques. Si en effet leur tracé par points a déjà fait depuis bien longtemps l’objet de recherches, qui se sont accélérées au cours du Xe siècle, ce n’est qu’à la fin de ce siècle que se pose le problème du tracé continu de toutes les courbes utilisées en algèbre, en optique et dans la fabrication des miroirs, lentilles, astrolabes, cadrans solaires… Certes, on traçait l’ellipse auparavant par la méthode dite « du jardinier » (Anthémius de Tralles)[3], mais ce n’est qu’à la fin du Xe siècle que l’on soulève pour lui-même, et relativement à toute une classe de courbes, le problème du tracé continu, ainsi que celui de l’invention des instruments nécessaires à sa réalisation. Or, si les mathématiciens de l’époque ont entrepris une telle recherche, c’est, entre autres raisons, qu’il leur fallait s’assurer de la continuité des courbes. Cette dernière notion s’imposait en effet désormais lors de la démonstration d’existence des points d’intersection des courbes, laquelle était nécessaire aux constructions des géomètres, et à la solution par les algébristes des équations cubiques et biquadratiques. Mais cette recherche sur le tracé continu n’est pas seulement théorique ; il fallait aussi concevoir et façonner de nouveaux instruments, au nombre desquels un nouveau genre de compas tel que le « compas parfait », apte à tracer droite, cercle et coniques.

Or ces études n’ont pas tardé à déboucher sur le problème majeur de la classification des courbes en fonction du type et du nombre des mouvements qui interviennent dans leur tracé. Ainsi al-Qūhī, le premier mathématicien qui ait composé un traité sur le compas parfait, distingue les courbes tracées par celui-ci – la droite, le cercle et les trois coniques – et les baptise de « mesurables », c’est-à-dire susceptibles d’être étudiées par la théorie des proportions. Il s’agit donc des courbes planes engendrées par un seul mouvement continu – éventuellement par plus d’un mouvement, mais de natures différentes –, et auxquelles on applique la théorie des proportions ; ce qui demeure exact quelle que soit la caractérisation des coniques, par

[3] R. Rashed, *Les Catoptriciens grecs*. I : *Les miroirs ardents*, édition, traduction et commentaire, Collection des Universités de France, Paris, Les Belles Lettres, 2000.

symptoma ou foyer-directrice. Un contemporain, plus jeune, d'al-Qūhī, al-Sijzī, classe les courbes également selon le type et le nombre des mouvements : les « mesurables », comme précédemment, et qui sont géométriques ; celles engendrées par deux mouvements continus différents, qui, sans être « mesurables » ni géométriques, mais, selon lui, seulement mécaniques, sont cependant « régulières et ordonnées ». Comme exemple, il donne l'hélice cylindrique, qui est une courbe gauche engendrée par une rotation uniforme autour d'un axe et une translation uniforme parallèle à l'axe. La dernière classe est celle des courbes non mesurables, et qui ne sont ni régulières ni ordonnées[4].

Cette distinction entre classes de courbes est assez importante pour l'histoire de la géométrie algébrique pour que je m'y arrête quelque peu.

Avec la distinction de cette classe de courbes du premier et du second degré, c'est le critère même de la classification qui change : la démarcation s'établit à présent entre courbes « mesurables » et courbes « non mesurables », au sens où elles sont, ou non, soumises à la théorie des proportions. Il fallait encore attendre le développement de la géométrie algébrique pour que, avec Descartes, ces classes de courbes trouvent leur vrai nom : « géométriques », c'est-à-dire algébriques, et « mécaniques », c'est-à-dire transcendantes.

Restent les courbes non mesurables, « mécaniques », dont l'hélice est un exemple singulier et, en raison de son histoire, privilégié. Pour rendre compte de cette singularité, il avait, semble-t-il, fallu séparer les « non mesurables » en deux sous-classes. C'est là qu'al-Sijzī introduit deux notions, celles d'ordre (*tartīb*) et de régularité (*niẓām*). Sur le sens exact de ces deux termes, al-Sijzī ne s'explique pas. Ils sont d'ailleurs si ordinaires qu'aucune recherche lexicale ne nous viendra en aide. Notons cependant que dans son traité *Sur la description des sections coniques*[5], il parle de « rotation régulière (*idāra muntaẓima*) », du compas parfait pour tracer le cercle – d'où notre choix de rendre *niẓām* par « régularité ». Quant à *tartīb*, il l'utilise dans sa recherche en théorie des nombres pour désigner l'ordre. Nous n'en sommes pas moins réduits au chemin des conjectures.

Ces courbes mécaniques, nous le savons, sont engendrées par deux mouvements séparés et dissemblables. L'hélice cylindrique ne fait pas exception à cet égard ; seulement, à la différence des autres courbes mécaniques,

[4] R. Rashed, *Œuvre mathématique d'al-Sijzī*. Volume I: *Géométrie des coniques et théorie des nombres au Xe siècle*, Les Cahiers du Mideo, 3, Louvain-Paris, Éditions Peeters, 2004 ; *Geometry and Dioptrics in Classical Islam*, London, al-Furqān, 2005.

[5] *Id.*, *Œuvre mathématique d'al-Sijzī*. Volume I : *Géométrie des coniques et théorie des nombres au Xe siècle*, Les Cahiers du Mideo, 3, Louvain-Paris, Éditions Peeters, 2004.

elle est ordonnée et régulière. Or, si on lit attentivement la formulation d'al-Sijzī, on observe que ces notions qualifient la courbe et non pas les mouvements : et après tout ces mêmes mouvements uniformes sont susceptibles d'engendrer d'autres courbes qui ne peuvent pas être ainsi qualifiées. Cette singularité a déjà été établie par Apollonius, selon Geminus *via* Proclus, lorsqu'il affirme que les parties de même longueur de l'hélice cylindrique coïncident homéomériquement.

Or nous savons que l'hélice tracée sur le cylindre de révolution est la seule courbe gauche dont les rayons de courbure et les rayons de torsion sont constants. La question reste donc de savoir si la formule d'Apollonius, ainsi que les notions d'al-Sijzī, étaient les moyens d'exprimer qualitativement ces propriétés qu'ils voyaient sans encore les connaître. Jeune contemporain d'Ibn Sahl et d'al-Qūhī, al-Sijzī, lui, était en mesure de connaître une propriété distinctive de cette courbe : les tangentes à celle-ci font un angle constant avec l'axe. Il s'agit bien aussi d'une propriété d'ordre et de régularité.

Quoi qu'il en soit, dans cette classification des courbes mécaniques, al-Sijzī procède par double référence : au nombre et à la nature des mouvements qui interviennent dans la génération de la courbe ; aux propriétés géométriques d'« ordre et de régularité » destinées à caractériser, ou non, ces courbes.

Encore faudrait-il rappeler, pour terminer, que la classification proposée est l'écho, quoi de plus naturel, du savoir mathématique du temps et qu'elle reflète son étendue et ses frontières. Elle tire en effet certains de ses traits distinctifs de deux limitations de celui-ci. On n'a pas manqué de relever qu'al-Sijzī n'évoque aucune courbe « mécanique » à part l'hélice cylindrique : en cela, il n'est en rien une exception. À moins d'être démenti par une découverte surprenante, on peut avancer que les mathématiciens du Xe siècle, aussi bien que leurs successeurs, ne s'intéressent guère aux courbes « mécaniques ». On ne peut, pour expliquer ce fait, s'en tenir à l'histoire de la transmission du *corpus* géométrique grec. Il est exact que le traité d'Archimède sur la spirale, par exemple, n'a pas été traduit en arabe, ce qui a privé les mathématiciens de cette courbe ; mais son traité sur *Les Conoïdes et les Sphéroïdes* ne l'était pas non plus, et cela ne les a pas empêchés d'en réinventer le contenu et d'aller plus loin. Il faut donc chercher ailleurs l'explication, qui s'offrira à nous comme l'autre face d'un fait lui-même positif.

Nous avons montré que c'est au cours de ce Xe siècle, avec des mathématiciens comme al-Qūhī, que de nouvelles exigences s'imposent désormais comme normes : il faut fournir une véritable preuve d'existence lorsque c'est nécessaire, et fonder les procédés de construction sur des bases géométriques solides. Ainsi le système mécanique d'Ibn Sahl, le compas parfait d'al-Qūhī, destinés à construire les coniques, ne sont-ils pas de quelconques instruments, mais sont eux-mêmes façonnés à l'aide de la théorie des coniques, qu'ils incarnent. Les mathématiciens se sont donc limités aux seules courbes dont ils avaient les moyens d'établir l'existence et de procéder à la construction. En bref et en clair, c'est grâce à ces mêmes exigences que les mathématiciens ont pu distinguer la classe des courbes planes des deux premiers degrés, et se sont détournés d'une étude active des courbes « mécaniques ».

La seconde limitation du savoir mathématique du temps est inhérente à cette même classe des courbes planes. Pourquoi, en effet, une fois définie la classe des « courbes mesurables » les mathématiciens se sont-ils arrêtés aux deux premiers degrés, alors qu'ils avaient rencontré des problèmes solides et « sur-solides » ? La question s'impose, d'autant plus qu'al-Qūhī a généralisé une théorie de l'application des aires aux solides. Autant dire, sauf erreur, que personne n'a jamais tenté de tracer une cubique. Il fallait pour cela la définition d'une courbe plane quelconque par son équation, autrement dit l'édification d'un nouveau chapitre où les courbes sont étudiées par leurs équations. Pour que cela se réalise, il fallait donc attendre la fin du XVII^e^ siècle, au moins.

Cette distinction entre classes de courbes n'a manifestement pas intéressé al-Khayyām, dont on a rapporté qu'il avait horreur du mouvement en géométrie. Autant dire que ce rejet du mouvement, joint au peu d'intérêt porté à la démonstration de l'existence des points d'intersection, ont réduit le projet d'al-Khayyām à celui d'une théorie géométrique des équations algébriques. C'est sous cette forme que s'est déclarée la première contribution en géométrie algébrique.

Le successeur d'al-Khayyām, Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī[6], était en revanche préoccupé par cette démonstration d'existence. Il introduit la notion de mouvement pour assurer la continuité des courbes, définit la notion de maximum d'une expression algébrique sur un intervalle et étudie certaines propriétés algébriques des courbes coniques. Ainsi, un demi-siècle à peine après al-Khayyām, il infléchit dans un sens analytique la géométrie algébrique de son prédécesseur.

[6] R. Rashed et B. Vahabzadeh, *Al-Khayyām mathématicien*, Paris, A. Blanchard, 1999 ; *Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī, Œuvres mathématiques. Algèbre et Géométrie au XII^e^ siècle,* texte établi et traduit par R. Rashed, 2 vol., Paris, Les Belles Lettres, 1986.

Les choses en sont pour l'essentiel restées là, jusqu'à la *Géométrie* de Descartes, auquel il nous faut à présent revenir.

On peut montrer, comme je crois l'avoir fait ailleurs[7], que pour une part la *Géométrie* représente l'achèvement de cette tradition d'al-Khayyām, et que, d'autre part, dans cet accomplissement, Descartes a retrouvé toutes les questions du mouvement – classification des courbes, tracé continu, nouveaux compas pour l'effectuer etc. –, engageant ainsi une nouvelle tradition dont le déploiement sera l'œuvre de ses successeurs. Expliquons-nous brièvement.

On peut s'accorder pour reconnaître dans la *Géométrie* une organisation autour de deux axes principaux. Le premier: ramener un problème géométrique posé à une équation algébrique à une seule inconnue. Le second: ramener la résolution de l'équation obtenue à sa construction par l'intersection de deux courbes « géométriques », dont l'une sera un cercle dans la mesure du possible.

Si l'on restitue l'évolution de la pensée de Descartes relativement au premier axe, on remarque que, à partir de 1619 et jusqu'avant janvier 1632, date de sa solution du problème de Pappus, il avait résolu, tout comme al-Khayyām, toutes les équations du troisième degré par l'intersection de coniques. En 1637, dans sa *Géométrie*, il procède, toujours à l'instar d'al-Khayyām, à la solution de toutes les équations du troisième et du quatrième degré par l'intersection de deux coniques, mais, lui, s'astreint à une parabole et à un cercle variable selon le type d'équation. Mais, non plus qu'al-Khayyām, il ne s'occupe pour l'heure de l'existence des racines. Pour les équations du cinquième et du sixième degré auxquelles al-Khayyām ne s'intéresse délibérément pas, Descartes a conçu une parabole cubique, ou une conchoïde parabolique, une courbe d'équation $y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3 = xy$.

Mais, en présence d'une équation cubique, par exemple, Descartes, tout comme son prédécesseur, était réduit à affirmer qu'elle est, au plus, solide; il ne pouvait donc, non plus que lui, préciser la nature des irrationnels qui interviennent dans la solution. On constate donc que, si l'on s'en tient au premier axe, Descartes réitère la démarche d'al-Khayyām. Certes, il l'affine, la généralise, la mène jusqu'aux limites logiques possibles; bref, il l'achève, mais sans vraiment en toucher la substance ni en refondre le sens. Qu'en est-il alors du second axe ?

À vingt ans (lettre à Beeckman), avec une connaissance mathématique bien modeste, Descartes énonçait un programme de son propre aveu « ambitieux », qu'il n'avait pas encore les moyens de réaliser. Voici les idées

[7] « La *Géométrie* de Descartes et la distinction entre courbes géométriques et courbes mécaniques », dans J. Biard et R. Rashed (éds), *Descartes et le Moyen Âge*, Études de philosophie médiévale LXXV, Paris, Vrin, 1997, p. 1-22.

principales de ce programme : une classification des problèmes géométriques grâce aux courbes qui peuvent être utilisées pour les résoudre ; une classification des courbes elles-mêmes grâce aux mouvements par lesquels elles ont été tracées ; et, enfin, une foi inébranlable, que rien pourtant ne vient justifier, en la valeur heuristique de ces classifications pour épuiser dans la démonstration toutes les questions de la géométrie.

L'intention qui préside à ce programme est, semble-t-il, d'aller au-delà des coniques, et de distinguer nettement cette classe de courbes, sous la stricte condition de ne recourir à aucun autre concept inconnu des Anciens qui, eux, privés de l'algèbre, ne pouvaient repérer ce clivage entre les classes des courbes. Le concept dont dispose Descartes, ou tout au moins celui qui s'est d'abord présenté à lui, n'est autre que l'ancien concept de mouvement tel que nous le rencontrons dans la tradition aristotélicienne. Dans la *Géométrie*, cette notion de mouvement continu est maniée, il est vrai, sans aucune considération cinématique apparente, mais sans non plus être revêtue de la moindre dimension algébrique.

Au cours de la recherche entreprise dans la ligne de ce programme, Descartes semble s'être rendu compte qu'à elle seule la notion de mouvement ne suffit pas à justifier entièrement la distinction qu'il énonçait en 1619 entre courbes « géométriques » et courbes « mécaniques ». La différence entre ces deux classes de courbes semble en effet renvoyer à deux problèmes mêlés : celui de la constructibilité des points de la courbe ; et celui de l'existence des points d'intersection lorsque les courbes se coupent. Ces problèmes avaient été rencontrés par al-Ṭūsī au XIIe siècle. Mais comme il s'agissait des seules courbes coniques, l'appartenance du point d'intersection à chacune des courbes est déduite du *symptoma*. Or Descartes ne s'arrête plus aux seules coniques, mais traite des cubiques et, plus généralement, des courbes « géométriques ». Il reconnaît, autrement que ses prédécesseurs, le rôle de l'équation pour représenter la courbe. Cependant cette équation ne lui permet le plus souvent que la construction par points, laquelle n'est suffisante que pour les courbes « géométriques ». Descartes se trouve alors confronté à une situation dissymétrique : tandis que pour la classe des courbes « géométriques » on peut parler la langue des équations, c'est impossible pour les courbes « mécaniques ». Il fallait, il est vrai, attendre Leibniz et surtout Jacques Bernoulli pour savoir que ces dernières courbes n'ont pas d'équation algébrique ; qu'elles ont des équations différentielles algébriques, reliant entre elles non l'abscisse et l'ordonnée, mais leurs différentielles. Descartes n'ignorait cependant pas que toutes les propriétés des courbes « géométriques » doivent être tirées de leur équation. Mais à ce programme, on le sait, il ne s'est jamais appliqué. Il fallait pour cela attendre le jeune Newton.

Et de fait, avant Descartes la notion d'équation d'une courbe restait bien limitée, et ne se prêtait guère à la constitution d'un programme de recherche. Al-Ṭūsī, lors de ses recherches sur les *maxima*, ou plus exactement sur l'existence des points d'intersection, étudie certaines courbes à l'aide de leurs équations. Il reste qu'il ne distingue pas nettement entre l'équation polynomiale et la courbe, en dehors des coniques. Or c'est précisément grâce à l'extension de l'étude des courbes au-delà des coniques, et à la distinction qu'il établit de cette classe de courbes qu'on peut étudier au moyen de l'algèbre, que Descartes a pu concevoir ce nouveau programme. La réalisation de celui-ci restait un gage d'avenir, source de deux courants : celui de la Géométrie algébrique, avec Cramer et Bézout ; celui de la Géométrie différentielle, avec les frères Bernoulli.

Mais Descartes n'était pas le seul à prospecter ce terrain de la géométrie algébrique. Fermat y a contribué à son tour, d'abord indépendamment de Descartes, puis en fonction de lui et un peu à son encontre ; situation doublement intéressante puisqu'elle représente une voie de recherche différente dans un seul et même domaine. Pour comprendre cette voie frayée par Fermat, il nous faut rappeler deux chapitres mathématiques développés eux aussi au cours du Xe siècle, et dans lesquels Fermat investira massivement. Le premier traite des transformations géométriques, tandis que le second porte sur l'analyse diophantienne. À la différence des mathématiciens hellènes, leurs successeurs à partir du milieu du IXe siècle, s'inscrivant dans la tradition de la géométrie d'Apollonius, commencèrent à prendre pour objet l'étude des transformations des lieux géométriques par homothétie, translation, similitude, inversion. Déjà au XIIe siècle, cette recherche avait été exploitée en géométrie algébrique par Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī. Or c'est précisément celle-ci que retrouve Fermat dans son *De locis planis*, achevé en avril 1636. Pour illustrer la similitude entre les études entreprises au Xe siècle et ce dernier livre de Fermat, il suffit de comparer la structure et les résultats de celui-ci à ceux du livre d'Ibn al-Haytham intitulé *Les Connus*[8]. Quant à l'analyse diophantienne, Fermat s'en est lui-même préoccupé en 1636, à partir de Bachet d'une part et de Viète d'autre part.

En 1637, Fermat diffusait un manuscrit de son traité *Ad Locos planos et solidos isagogè* (*Isagogè*). Il s'agit donc d'un traité indépendant de la *Géométrie* de Descartes. Dans cet ouvrage, Fermat entend trouver les équations polynomiales des courbes. On se rend compte à la lecture de ce traité que ce projet n'est pas indépendant du livre sur les lieux plans déjà mentionné. Fermat ne traite en fait dans l'*Isagogè* que des lieux rencontrés dans celui-ci (droite, cercle, sections coniques) et suivant une méthode qui

[8] Voir *Les Mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle,* vol. IV, Chap. II.

n'est autre que la traduction algébrique des transformations ponctuelles qui s'y trouvaient mises en œuvre. Si donc dans l'*Isagogè* Fermat traduit chaque lieu par une équation, c'est essentiellement pour caractériser la courbe. Tout indique du reste que le rôle de l'équation polynomiale se limite à cette caractérisation, dans la mesure où Fermat n'y a pas encore recours pour déduire d'autres propriétés de la courbe. À l'évidence, son projet est en 1637 différent de celui de Descartes dans sa *Géométrie*. Quelle est donc l'inspiration qui anime Fermat dans l'*Isagogè* ? On peut montrer qu'elle a pour source une saisie intuitive des relations entre l'analyse diophantienne et les équations polynomiales à deux inconnues.

Dans l'*Isagogè*, Fermat ne traite donc pas de la théorie des équations algébriques. Il y revient à la fin de 1637, dans un appendice qu'il rédige à l'*Isagogè*, vraisemblablement une fois mises à profit les recherches cartésiennes. Il y traite en effet, écrit-il, de « la construction de tous les problèmes cubiques et biquadratiques au moyen d'une parabole et d'un cercle »[9].

Ce n'est que bien plus tard que Fermat en vient à l'étude des équations et des courbes algébriques. Il y entre si l'on peut dire par la grande porte, par la voie d'une critique de la classification des équations et des courbes proposée par Descartes dans sa *Géométrie*. Mais, s'attaquer à la classification cartésienne, c'est aussi nécessairement reconsidérer quelques idées de la géométrie algébrique[10]. C'est ce que propose Fermat dans la *Dissertation en trois parties*, un livre contre Descartes, mais où l'impact de la *Géométrie* se fait sentir avec une force et une présence toutes particulières. Sans nous arrêter ici à ces critiques, qui ne sont d'ailleurs pas justifiées, notons seulement leurs effets sur les idées de Fermat. Elles lui ont de fait ouvert la voie d'une distinction entre deux classes d'équations algébriques : celles qui sont, dit-il, « constitutives des lignes courbes », et celles à une seule inconnue. Depuis longtemps préoccupé, nous l'avons noté, par les équations des lieux géométriques, Fermat mobilise cette distinction, qu'il emploie à définir, bien plus nettement que ses prédécesseurs, les courbes par leurs équations. En cela, il contribue à la réalisation du programme cartésien.

Fermat affirme ensuite que toute équation de degré $2n + 1$ ou de degré $2n + 2$ se résout par l'intersection de deux courbes de degré $n + 1$. Nous sommes bien sur la voie qui conduira ensuite à la réciproque du théorème de Bézout. D'autre part, la méthode qu'il propose pour résoudre les équations de degré $2n + 1$ ou de degré $2n + 2$ s'inspire singulièrement de l'analyse diophantienne. Il est, à ma connaissance, le premier à avoir recouru aux techniques de l'analyse diophantienne dans la géométrie algébrique.

[9] *Œuvres de Fermat*, publiées par P. Tannery et Ch. Henry, vol. III, Paris, 1896, p. 99.

[10] R. Rashed, « Les premières classifications des courbes », *Physis*, 2005.

En un mot, parti de la recherche sur la transformation ponctuelle des lieux, Fermat voulait, au fur et à mesure qu'il avançait, dégager toutes les équations des lieux, des coniques notamment. Or c'est précisément cette orientation qui a préparé le terrain de ses travaux en géométrie algébrique, c'est-à-dire lorsque, sous l'influence de Descartes, il s'intéresse à la théorie des équations et des courbes algébriques ; de cette rencontre avec Descartes, Fermat a puisé les moyens d'innover en ce domaine. Il était alors en mesure de jeter un pont entre deux terres jusque-là séparées, pour promouvoir pour ainsi dire la réalisation de ce qui était le programme cartésien : les techniques de l'analyse diophantienne et la géométrie algébrique. Or, par cette innovation, Fermat se distingue aussi bien de ses prédécesseurs que de ses contemporains. C'est dire que, tant que les courbes que l'on étudiait algébriquement se réduisaient pour l'essentiel aux seules coniques, rien n'imposait de faire un rapprochement explicite entre géométrie algébrique et analyse diophantienne – c'est précisément la situation d'al-Khayyām et même celle d'al-Ṭūsī. En revanche, les mathématiciens qui s'intéressaient à l'analyse diophantienne en dehors de cette tradition de la géométrie algébrique, soit pour des raisons d'époque, soit par intérêt, ne pouvaient évidemment pas songer à un tel rapprochement. Ils s'intéressaient en fait au développement, soit du calcul algébrique abstrait (Abū Kāmil, al-Karajī, Bombelli, Viète…), soit de la théorie des nombres (al-Khujandī, al-Khāzin, Fibonacci dans son *Liber quadratorum*, al-Yazdī…). C'est Descartes qui en fournit les conditions de possibilité : possibilité, en fait, de traiter généralement des équations quel qu'en soit le degré, et de traiter plus clairement et plus algébriquement toute une classe de courbes. C'est donc grâce à Descartes et à sa théorie des courbes algébriques que Fermat a pu investir les méthodes diophantiennes en géométrie algébrique. Or c'est précisément cet investissement qui lui a permis de mener plus loin que Descartes lui-même la réalisation du projet de celui-ci.

Parmi les disciplines que l'on invoque pour représenter la modernité mathématique au cours de la première moitié du XVIIe siècle – si ce n'est la modernité classique elle-même – figure la géométrie algébrique, avec notamment Descartes. Or, précisément, cet exemple de la géométrie algébrique est une bonne illustration de la complexité de cette même notion de modernité mathématique. Tant qu'on ignorait les activités mathématiques à partir du IXe siècle en arabe, ou qu'on sautait à pieds joints par dessus ce que l'on pouvait en savoir, cette notion semblait limpide et, s'imposant d'elle-même, ne soulevait aucun problème. Aussi voyait-on cette modernité au carrefour de l'algèbre et des *Coniques* d'Apollonius (de leurs quatre premiers livres, plus précisément) ; ou au croisement de la *Spécieuse* de Viète et de ces derniers livres. Mais c'est bien plutôt, nous le savons, une rencontre entre l'algèbre et les nouveaux chapitres de géométrie développés à partir des *Coniques* qui s'est produite six siècles avant la *Géométrie* de Descartes. Sans les chapitres sur les *Constructions géométriques à l'aide des sections coniques*, et celui sur le tracé continu, on ne pourra en effet comprendre la naissance de la géométrie algébrique avec al-Khayyām et sa transformation, une première fois, avec al-Ṭūsī. La modernité mathématique au XVII[e] siècle ne serait-elle alors qu'une reproduction de celle qui est advenue au XI[e] siècle ? Nullement. Serait-elle, comme on se plaît à l'affirmer, un commencement radical ? Non plus.

Nous venons de montrer qu'une telle alternative n'est en fait pas pertinente : pour lire la *Géométrie* de Descartes, il faut aussi regarder en amont vers al-Khayyām et al-Ṭūsī et, en aval, vers Newton, Leibniz, Cramer, Bézout et les frères Bernoulli. Il en est de même s'il s'agit de situer l'*Isagogè* et la *Dissertation* de Fermat : un retour en amont à des écrits comme ceux d'Ibn al-Haytham et de Descartes s'impose en effet, de même qu'il faut avoir le regard dirigé en aval vers les Bernoulli, Cramer et Bézout. Alors seulement tous ces livres novateurs trouveront la place qui n'a jamais cessé d'être la leur. La *Géométrie*, par exemple, n'est nullement un commencement absolu, mais, au même titre que les autres œuvres fondatrices, elle inaugure un style : celui d'une reprise, d'une adaptation et d'une rectification des traditions dont elle est l'héritière. Mais, comme ces œuvres, elle ouvre la voie à d'autres évolutions – en géométrie algébrique, et aussi en géométrie différentielle. La modernité se présente ainsi comme la réalisation de quelques potentialités héritées de la tradition, en même temps qu'elle est génératrice de potentialités neuves pour le futur. Mais pouvait-il en être autrement ? Rien n'empêche, si l'on ne pense que par concepts tout faits, de soutenir que continuités et ruptures sont inscrites les unes dans les autres. Mais tout discours sur la *Géométrie* de Descartes, ou sur les deux livres de Fermat, est condamné à être oblique s'il néglige les liens intimes qui enracinent ces œuvres dans la tradition, aussi bien que les nouveaux possibles qui les habitent, et qui devront attendre pour se réaliser effectivement que la modernité soit elle-même devenue tradition. La véritable force intellectuelle de J. Vuillemin est précisément d'avoir parfaitement appréhendé cette dialectique latente, alors que la tradition était encore si mal connue.