Programma del corso di Teoria Spettrale
Corso di Laurea Magistrale in Matematica A.A. 2016-2017
Prof. Roberto Longo

1. *Prerequisiti.* Spazi di Banach, duale e topologia forte, debole e *-debole. Principio dell'uniforme limitatezza. Funzioni analitiche a valori spazi di Banach. Teorema di Tychonoff. Teorema di Alaoglu.
2. *Algebre di Banach.* Insieme risolvente e spettro di un elemento. Teorema di Mazur. Analiticità del risolvente. Lo spettro di un elemento è compatto non-vuoto. Serie di Neumann. Formula del raggio spettrale.
3. *Algebre di Banach commutative.* Ideali massimali. Caratteri e spettro di un'algebra di Banach commutativa. Caso di un'algebra con identità generata da un element o da un numero finito di elementi, spettro congiunto. Teorema dello spectral mapping per polinomi. Spettro di un elemento in una sottoalgebra abeliana massimale o minimale.
4. *Calcolo funzionale analitico.* Teorema dello spectral mapping per funzioni analitiche. Caso di spettro disconnnesso. Perturbazioni dello spettro, semicontinuità inferiore, esempi. Perturbazioni di proiettori.
5. *Trasformazione di Gelfand.* Elementi nilpotenti generalizzati. Caso dell'algebra $l^1(\mathbf{Z})$. Teorema dello spectral mapping per funzioni analitiche.
6. *Algebre C*.* Algebre involutive e norme C*. Lo spettro di un elemento autoaggiunto è reale; il raggio spettrale coincide con la norma. Lo spettro non dipende dalla sottoalgebra.
7. *C*-algebre commutative.* Teorema di Gelfand-Naimark. Calcolo funzionale continuo. La categoria delle C*-algebre abeliane con identità è duale della categoria degli spazi compatti di Haudorff.
8. *Calcolo funzionale Boreliano.* Il teorema spettrale per operatori autoaggiunti su uno spazio di Hilbert. Misure basiche e calcolo funzionale L^∞.
9. *Algebre di von Neumann.* Teoremi di densità di von Neumann e di Kaplanski. Topologia debole e forte. Compattezza debole della palla unitaria. Algebre abeliane massimali e loro caratterizzazione su uno spazio di Hilbert separabile.
10. *Stati e rappresentazioni di una C*-algebra.* Elementi positive, estensione di stati. La rappresentazione GNS. Caso dell'algebra C(X). Operatori di allacciamento, sotto-rappresentazioni, rappresentazioni equivalenti e rappresentazioni disgiunte. Caso commutativo.
11. *Il teorema di molteplicità spettrale.* Rappresentazioni cicliche e rappresentazioni senza molteplicità (spazio di Hilbert separabile) di una C*-algebra abeliana. Classificazione degli operatori autoaggiunti (o di rappresentazioni di una C*-algebra abeliana) su uno spazio di Hilbert separabile.
12. *Operatori illimitati.* Operatori chiusi, chiudibili, aggiunti. Operatori simmetrici e autoaggiunti. Estensione di operatori simmetrici e trasformata di Cayley. Il problema dei momenti.

Obiettivi formativi. Lo studente dovrà capire la struttura degli opeartori lineari autoaggiunti e normali su uno spazio di Hilbert padroneggiando tecniche analitiche e algebriche.

Libri di testo consigliati: G. Pedersen, *Analysis Now*
W. Arveson, *An Invitation to C*-Algebras*
J.B. Conway - A Course in Functional Analysis

Modalità di esame. Prova orale.