



**TOR VERGATA**  
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA

## Corso di Laurea Magistrale in Matematica Pura ed Applicata

---

### Informazioni

**Segreteria didattica:** *Dott.ssa Solange Barcaccia*, tel. 06 72594685

**Coordiatore Corso di Laurea:** *Prof.ssa Carla Manni*

**Sito web:** <http://www.mat.uniroma2.it/didattica/>

**E-mail:** [dida@mat.uniroma2.it](mailto:dida@mat.uniroma2.it)

Il Corso di laurea magistrale in Matematica Pura ed Applicata si inquadra nella Classe delle lauree magistrali in Matematica (Classe LM-40 del DM 16 Marzo 2007 “Determinazione delle classi di laurea”) ed afferisce al Dipartimento di Matematica. La durata del corso di laurea è normalmente di due anni.

### Incentivi

Per l’AA 2022/23, il Dipartimento di Matematica istituisce **9 premi speciali** dell’importo di **1500 euro** ciascuno, per gli studenti immatricolati al Corso di laurea magistrale in Matematica Pura ed Applicata e **5 premi** per tesi di laurea magistrale dell’importo di **2000 euro** ciascuno. Informazioni dettagliate sono reperibili sul sito del corso di laurea.

Il Corso di laurea magistrale in Matematica Pura ed Applicata si propone di sviluppare competenze e conoscenze avanzate in vari settori della matematica, garantendo ampia possibilità di approfondimento sia degli aspetti teorici di questa disciplina che delle sue applicazioni. Grazie alla sua formazione, il laureato magistrale in Matematica Pura ed Applicata potrà, a seconda dei casi, inserirsi nel mondo del lavoro, sia utilizzando le specifiche competenze acquisite che valorizzando le sue capacità di flessibilità mentale e di collaborazione con altri esperti, oppure proseguire negli studi partecipando a programmi di dottorato in discipline matematiche o affini.

Sono possibili percorsi formativi differenziati, atti ad integrare e completare la formazione matematica di ciascuno studente. Tuttavia, in ogni ambito vengono sottolineati gli aspetti metodologici al fine di assicurare una profonda comprensione della materia e la capacità di aggiornare costantemente le competenze acquisite. Con l’intento di accrescere le capacità di autonomia degli studenti, e per permettere la formulazione di piani di studio che si adattino alle esigenze di una società in rapida evoluzione, si è previsto un elevato grado di libertà nella scelta degli insegnamenti.

Al fine di far acquisire un’approfondita conoscenza sia degli aspetti disciplinari sia di quelli metodologici della matematica, il percorso formativo è caratterizzato dalla presenza, all’inizio, di insegnamenti intesi a fornire un quadro ampio e organico di argomenti di carattere avanzato nelle discipline fondamentali (algebra, analisi, geometria, fisica matematica, analisi numerica, probabilità). Successivamente, sono offerti insegnamenti a carattere specialistico, volti ad accogliere specifici interessi sviluppati dagli studenti, nonché a coadiuvare lo svolgimento del lavoro di tesi, cui è attribuita una valenza determinante per il compimento del ciclo di studi.

I laureati magistrali in Matematica Pura ed Applicata devono inoltre essere in grado di esprimere le proprie conoscenze in contesti professionali sia specifici sia interdisciplinari. Lo studente viene altresì sollecitato ad acquisire un contatto diretto con la letteratura matematica, anche a livello di ricerca, e ad affinare le capacità individuali di orientarsi nella consultazione di testi e nella creazione di bibliografie sia in italiano che in inglese. La redazione della prova finale costituisce, tra l’altro,

una verifica dell'acquisizione di queste competenze e della padronanza delle tecniche usuali della comunicazione scientifica in ambito matematico.

### **Obiettivi formativi specifici del corso di laurea magistrale**

Il Corso di laurea magistrale in Matematica Pura ed Applicata si propone di sviluppare competenze e conoscenze avanzate in vari settori della matematica, garantendo ai suoi iscritti ampia possibilità di approfondimento sia degli aspetti teorici di questa disciplina che delle sue applicazioni.

Oltre ad avere un'approfondita conoscenza sia degli aspetti disciplinari sia di quelli metodologici della matematica, i laureati magistrali in Matematica Pura ed Applicata devono essere in grado di esprimere le proprie conoscenze in contesti professionali sia specifici sia interdisciplinari, devono essere capaci di orientarsi nella consultazione della letteratura e di redigere bibliografie in ambito matematico.

I laureati magistrali in Matematica Pura ed Applicata potranno, a seconda delle proprie inclinazioni e preferenze, proseguire negli studi partecipando a programmi di dottorato in discipline matematiche o inserirsi nel mondo del lavoro, sia utilizzando le specifiche competenze acquisite che valorizzando le proprie capacità di flessibilità mentale e di collaborazione con altri esperti.

### **Sbocchi lavorativi**

Grazie alle conoscenze e alle competenze acquisite, ivi inclusa la mentalità flessibile e l'esperienza accumulata nell'analisi e soluzione di problemi, i laureati magistrali in Matematica Pura ed Applicata potranno disporre di un'ampia gamma di sbocchi occupazionali e professionali. I settori più indicati sono quelli in cui la matematica svolge un ruolo centrale sotto il profilo applicativo o teorico, o quantomeno costituisce un ambito chiaramente correlato quanto a importanza. Alcuni esempi:

- l'elaborazione e l'analisi di modelli a supporto dei processi industriali e dei servizi;
- l'analisi statistica dei dati;
- l'insegnamento;
- l'avviamento alla ricerca pura e applicata in un corso di dottorato;
- la diffusione della cultura scientifica;
- l'informatica e la telematica.

Inoltre, qualora il Corso di laurea magistrale in Matematica Pura ed Applicata si innesti su un corso di laurea triennale in discipline affini, sarà possibile un pronto inserimento dei laureati anche in professioni o campi di studio differenti. Tutto questo è ampiamente documentato in una dettagliata analisi dei diversi impieghi ad alto livello dei laureati in Matematica in Italia.

Negli anni più recenti, i nostri laureati hanno trovato posti di lavoro negli ambiti più diversi ed in molte società importanti, tra cui Enel, Poste Italiane, TIM, Banca Nazionale del Lavoro, Accenture, Amazon, Deloitte, Engineering, KPMG consulting, ACEA, DMBI Consulting, AxA Assicurazioni, Allianz ConTe Assicurazioni, ARPM, BIP Business Integration Partners.

### **Descrittori europei del titolo di studio**

I Descrittori di Dublino di seguito riportati sono enunciazioni generali dei tipici risultati conseguiti dagli studenti che hanno ottenuto il titolo dopo aver completato con successo il ciclo di studio.

**Conoscenza e capacità di comprensione.** I laureati in Matematica Pura ed Applicata avranno:

- acquisito una conoscenza ampia e adeguata di tematiche avanzate in più settori della matematica, nonché in alcuni settori affini a questa disciplina;
- potuto acquisire una conoscenza adeguata di tecniche di formalizzazione e modellizzazione, anche complesse, tipiche delle applicazioni della matematica in vari ambiti scientifici e professionali;
- potuto acquisire un livello di comprensione del linguaggio, delle tecniche e dei contenuti dei principali settori della matematica, soprattutto relativi al campo di specializzazione prescelta, tale da metterli in grado di iniziare percorsi di avviamento alla ricerca.

Inoltre, i laureati in Matematica Pura ed Applicata dovranno avere facilità di astrazione, incluso lo sviluppo logico di teorie formali e delle loro relazioni. Lo strumento didattico privilegiato per il raggiungimento di tali obiettivi sono le lezioni, le esercitazioni e le attività di laboratorio e tutorato. La verifica avviene in forma classica attraverso la valutazione di un elaborato scritto e/o un colloquio orale.

**Capacità di applicare conoscenza e comprensione.** I laureati magistrali in Matematica Pura ed Applicata dovranno essere in grado di elaborare o applicare idee, anche originali, e possedere sicure competenze sia per ideare e sostenere argomentazioni che per risolvere problemi nel proprio campo di studi. In particolare, essi dovranno essere in grado di:

- comprendere approfonditamente problemi matematici anche di livello elevato;
- identificare gli elementi essenziali di un problema e saperlo modellizzare, in termini matematici, identificando metodologie idonee per la sua soluzione;
- produrre dimostrazioni originali e rigorose di semplici proposizioni in diversi campi della matematica.

Inoltre, con riferimento al campo di specializzazione prescelta, essi dovranno essere capaci di:

- estrarre informazioni qualitative da dati quantitativi;
- comprendere, utilizzare e progettare metodi teorici e/o computazionali adeguati alle tematiche affrontate;
- utilizzare in maniera efficace strumenti informatici di supporto.

La verifica del raggiungimento degli obiettivi posti avviene di norma mediante:

- le varie prove svolte durante gli insegnamenti impartiti e alla loro conclusione;
- l'esposizione e la discussione dei risultati conseguiti durante la preparazione della prova finale.

**Autonomia di giudizio.** I laureati magistrali in Matematica Pura ed Applicata dovranno:

- sapere collegare tra loro i diversi concetti matematici, tenendo presente la struttura logica e gerarchica della matematica;
- essere in grado di analizzare criticamente una dimostrazione, e di produrne una standard ove occorra;
- essere in grado di valutare l'appropriatezza di un modello o di una teoria matematica nella descrizione di un fenomeno concreto;
- essere in grado di fare ricerche bibliografiche autonome utilizzando libri di contenuto matematico, sviluppando anche una familiarità con le riviste scientifiche di settore;
- essere in grado di utilizzare per la ricerca scientifica gli archivi elettronici disponibili sul WEB, operando la necessaria selezione dell'informazione disponibile;
- essere in grado di capire e valutare le difficoltà del processo insegnamento/apprendimento in base all'argomento trattato e alla situazione dei discenti;
- possedere un adeguato livello di consapevolezza delle possibili implicazioni anche etiche e sociali della propria attività.

Queste capacità verranno stimolate in tutti gli insegnamenti, rafforzando il senso critico dello studente e assegnando problemi che lo studente deve svolgere anche in modo originale. La verifica del raggiungimento degli obiettivi posti avverrà di norma mediante:

- le varie prove svolte durante gli insegnamenti impartiti e alla loro conclusione;
- l'esposizione e la discussione dei risultati conseguiti durante la preparazione della prova finale.

**Abilità comunicative.** I laureati magistrali in Matematica Pura ed Applicata dovranno:

- essere in grado di elaborare o applicare idee, anche originali, e di sostenerle con chiarezza e rigore sia di fronte a specialisti del settore che ad un uditorio più vasto;
- sapere sollecitare, stimolare, favorire e guidare all'interesse per il pensiero matematico;
- essere in grado di presentare la propria ricerca, o i risultati di una ricerca bibliografica, e di esporre in maniera compiuta il proprio pensiero su problemi, idee e soluzioni, utilizzando efficacemente, in forma scritta e orale, almeno una lingua dell'Unione Europea oltre l'italiano, nell'ambito specifico di competenza della matematica e per lo scambio di informazioni generali.

Tali abilità potranno essere conseguite alla fine del percorso formativo, come risultato dei contenuti di base dell'offerta formativa. Alcuni corsi prevederanno la presentazione di argomenti di approfondimento attraverso seminari o relazioni scritte, richiedendo allo studente di maturare capacità espositive, sia scritte che orali. La preparazione acquisita in materie affini ed integrative darà la possibilità di interagire con laureati in altri settori, ed eventualmente con esperti in campi non necessariamente accademici, potenziando la capacità di formalizzare matematicamente situazioni complesse di interesse applicativo. La verifica del raggiungimento degli obiettivi posti avverrà:

- mediante le varie prove, anche a carattere seminariale, svolte durante gli insegnamenti impartiti e alla loro conclusione;
- in occasione di attività di tutorato nelle quali gli studenti potranno essere coinvolti;
- durante l'esposizione e la discussione dei risultati conseguiti per la prova finale.

**Capacità di apprendimento.** I laureati magistrali in Matematica Pura ed Applicata:

- hanno una mentalità flessibile, e sono in grado di inserirsi prontamente negli ambienti di lavoro, adattandosi facilmente a nuove problematiche;
- sono in grado di acquisire rapidamente le competenze pedagogiche necessarie per gestire il processo insegnamento-apprendimento in base all'argomento trattato e alla situazione dei discenti;
- avendo acquisito autonomia e originalità del pensiero matematico si riescono ad inserire con successo in percorsi di avviamento alla ricerca;
- sanno consultare materiale bibliografico, banche dati e materiale presente in rete, con particolare riferimento al reperimento di fonti bibliografiche nella ricerca matematica, per l'aggiornamento continuo delle conoscenze.

La verifica dell'acquisizione di tali capacità avviene:

- attraverso la valutazione dell'apprendimento di argomenti proposti per lo studio autonomo, durante le prove di esame;
- in occasione di attività di tutorato nelle quali gli studenti potranno essere coinvolti;
- in occasione della prova finale.

## Ordinamento degli studi

Sul sito web del Corso di Laurea si trova il Regolamento che con i suoi articoli disciplina e specifica gli aspetti organizzativi del Corso di Laurea. Per conseguire la laurea magistrale in Matematica Pura ed Applicata lo studente deve aver acquisito almeno 120 crediti (CFU) nell'ambito delle varie attività formative compreso il lavoro di tesi. Le attività formative prevedono insegnamenti teorici e pratici. I crediti relativi alle attività formative caratterizzanti, affini o integrative sono acquisiti seguendo moduli didattici e superando i relativi esami, secondo il piano delle attività formative ed in base alla programmazione didattica definita dal Consiglio di Dipartimento. I percorsi formativi danno ampio spazio a esercitazioni e ad attività di tutorato e di laboratorio. I crediti relativi alle attività a scelta dello studente vengono normalmente acquisiti con insegnamenti scelti dallo studente, mediante la formulazione di un piano di studio, nell'ambito delle opzioni proposte dal Consiglio del Dipartimento di Matematica. Modalità diverse di acquisizione di tali crediti, proposte dallo studente, verranno valutate dal Consiglio di Dipartimento in riferimento agli obiettivi formativi del corso di laurea ed alla valenza culturale complessiva del piano di studio proposto. La ripartizione delle attività formative, con il numero di crediti assegnato ad ognuna, è contenuta nell'Ordinamento del Corso di Laurea, disponibile sul sito del corso di Laurea Magistrale in Matematica Pura ed Applicata.

## Schema del piano di studio

Attività formative caratterizzanti 44 CFU

Formazione affine ed integrativa 28 CFU

Formazione a scelta 16 CFU

Prova finale 27 CFU

Altre attività formative (ulteriori attività formative art. 10, comma 5, lettera d) 5 CFU

Attività formative caratterizzanti: 44 CFU

*(i corsi a scelta di questa sezione devono far parte della programmazione didattica del corso di studio)*

- CAM 1 (6 CFU)
- CAM 2 (6 CFU)
- Corsi a scelta nel gruppo di settori MAT01/MAT02/MAT03/MAT04/MAT05 per 16 CFU in totale
- Corsi a scelta nel gruppo di settori MAT06/MAT07/MAT08/MAT09 per 16 CFU in totale

Formazione affine ed integrativa: 28 CFU

*(i corsi a scelta di questa sezione devono far parte della programmazione didattica del corso di studio)*

- Laboratorio di Calcolo (4 CFU)
- Corsi a scelta per 24 CFU nei settori affini (dei quali 16 CFU al massimo di settori MAT)

Formazione a scelta: Corsi per 16 CFU a libera scelta

Attività formative per prova finale: 27 CFU

Lo studente dovrà inoltre scegliere almeno 4 settori MAT diversi ed almeno un corso in ciascuna delle seguenti coppie di settori: MAT02/MAT03, MAT05/MAT07, MAT06/MAT08.

## Programmazione didattica A.A. 2022/23

### 1° SEMESTRE

- **CAM 1 - Teoria della Misura (6 CFU) - attività caratterizzante - obbligatoria**
- **Laboratorio di Calcolo (4 CFU) - attività affine - obbligatoria - erogato in lingua inglese**
- Algebra Commutativa (8 CFU)
- Analisi Armonica (8 CFU)
- \*Analisi di Reti (6 CFU) - *mutuato da LM Informatica*
- CAN 1 - Modellizzazione Geometrica e Simulazione Numerica (8 CFU)
- \*Chimica Generale (8 CFU) - *mutuato da Scienza dei Materiali*
- Complementi di Analisi Funzionale (8 CFU)
- \*Complementi di Fisica (8 CFU)
- Complementi di Probabilità (8 CFU)
- Controllo, Dinamica e Ottimizzazione (8 CFU)
- Elementi di Analisi Numerica (8 CFU)
- \*Fisica Computazionale (8 CFU) - *mutuato da LM Fisica*
- \*Fisica dei Fluidi Complessi e Turbolenza (8 CFU) - *mutuato da Fisica*
- \*Introduzione ai Processi Aleatori (8 CFU)
- Introduzione alle Varietà Differenziabili (8 CFU)
- Laboratorio di Didattica della Matematica (8 CFU)
- Logica Matematica 1 (8 CFU)
- \*Meccanica Statistica 2 (6 CFU) - *mutuato da LM Fisica*
- Metodi e Modelli in Computer Graphics (8 CFU)
- \*Metodi e Modelli dei Mercati Finanziari (8 CFU)
- \*Natural Language Processing (6 CFU) - *mutuato da LM Informatica*
- Numerical Methods for Computer Graphics in Java (8 CFU)
- Superfici di Riemann (8 CFU)

- Teoria dei Giochi e Progetto di Reti (9 CFU) - *mutuato da Teoria dei Giochi e Business Analytics, LM Ingegneria Informatica*

## 2° SEMESTRE

- **CAM 2 - Introduzione all'Analisi Funzionale (6 CFU) - attività caratterizzante - obbligatoria**
- Algebre di Operatori (8 CFU)
- CAN 2 - Algebra Lineare Numerica con Applicazioni alle PDE e Big Data (8 CFU)
- Complementi di Topologia Algebrica e Analisi Dati (8 CFU)
- EAM 1 - Teoria Spettrale (8 CFU)
- EAM 2 - Spazi di Sobolev e Soluzioni Deboli (8 CFU)
- Elementi di Probabilità 1 (8 CFU)
- Equazioni Differenziali (8 CFU)
- Geometria Algebrica (8 CFU)
- Geometria Complessa (8 CFU)
- Geometria Differenziale (8 CFU)
- High Dimensional Probability and Statistics (8 CFU)
- \*Machine Learning (9 CFU) - *mutuato da LM Informatica*
- Meccanica Analitica e Celeste (FM3) (8 CFU) - *fruito, per 6 CFU, da Celestial Mechanics and Dynamical Systems, LM Fisica*
- Metodi Computazionali per Sistemi Hamiltoniani (8 CFU)
- Meccanica Superiore 2 (8 CFU)
- Metodi di Ottimizzazione per Big Data (9 CFU) - *mutuato da LM Ingegneria Informatica e Ingegneria Automazione*
- \*Progettazione di Sistemi Informatici (8 CFU)
- \*Relatività e Cosmologia (8 CFU) - *mutuato da LM Fisica*
- Statistical Learning and High Dimensional Data (8 CFU)
- Storia della Scienza (8 CFU)
- Teoria delle Rappresentazioni 2 (8 CFU)
- \*Web Mining and Retrieval (9 CFU) - *mutuato da LM Informatica*

(\* se inserito nel piano di studio il corso deve far parte delle attività affini o a scelta dello studente.

## Ripartizione dell'offerta formativa dei settori MAT

### SETTORE MAT/01: LOGICA MATEMATICA

- Logica Matematica 1

### SETTORE MAT/02: ALGEBRA

- Algebra Commutativa
- Teoria delle Rappresentazioni 2

### SETTORE MAT/03: GEOMETRIA

- Complementi di Topologia Algebrica e Analisi Dati
- Geometria Algebrica
- Geometria Complessa
- Geometria Differenziale
- Introduzione alle Varietà Differenziabili
- Superfici di Riemann

#### **SETTORE MAT/04: MATEMATICHE COMPLEMENTARI**

- Laboratorio di Didattica della Matematica
- Storia della Scienza

#### **SETTORE MAT/05: ANALISI MATEMATICA**

- Algebre di Operatori
- Analisi Armonica
- CAM 1 - Teoria della Misura
- CAM 2 - Introduzione all'Analisi Funzionale
- Complementi di Analisi Funzionale
- Controllo, Dinamica ed Ottimizzazione
- EAM 1 - Teoria Spettrale
- EAM 2 - Spazi di Sobolev e Soluzioni Deboli
- Equazioni Differenziali

#### **SETTORE MAT/06: PROBABILITÀ**

- Complementi di Probabilità
- Elementi di Probabilità 1
- Statistical Learning and High Dimensional Data
- High Dimensional Probability and Statistics

#### **SETTORE MAT/07: FISICA MATEMATICA**

- Meccanica Analitica e Celeste
- Meccanica Superiore 2
- Metodi Computazionali per Sistemi Hamiltoniani

#### **SETTORE MAT/08: ANALISI NUMERICA**

- CAN 1 - Modellizzazione Geometrica e Simulazione Numerica
- CAN 2 - Algebra Lineare Numerica con Applicazioni alle PDE e ai Big Data
- Elementi di Analisi Numerica
- Metodi e Modelli in Computer Graphics
- Numerical Methods for Computer Graphics in Java

#### **SETTORE MAT/09: RICERCA OPERATIVA**

- Teoria dei Giochi e Progetto di Reti
- Metodi di Ottimizzazione per Big Data

#### **Calendario 2022/23**

Gli insegnamenti del primo semestre si terranno dal 3 ottobre 2022 al 13 gennaio 2023. Quelli del secondo semestre dal 6 marzo 2023 al 9 giugno 2023. Il 15 settembre 2022 alle ore 10.00, in aula 2, si terrà un incontro con gli studenti nel quale i docenti illustreranno brevemente i programmi dei corsi opzionali. Sarà possibile seguire la riunione anche in diretta streaming sulla piattaforma Teams.

## **Esami**

Gli insegnamenti del primo semestre prevedono due appelli nella sessione estiva anticipata (gennaio-febbraio), due appelli nella sessione estiva (giugno-luglio) e due in quella autunnale (settembre). I corsi del secondo semestre prevedono due appelli nella sessione estiva, due in quella autunnale e due in quella invernale. Il calendario degli esami è pubblicato nella sezione apposita del sito web del Corso di Studio.

## **Valutazione**

Il punteggio della prova d'esame è attribuito mediante un voto espresso in trentesimi. La prova di esame sarà valutata secondo i seguenti criteri: Non idoneo: importanti carenze e/o inaccuratezza nella conoscenza e comprensione degli argomenti; limitate capacità di analisi e sintesi. 18-20: conoscenza e comprensione degli argomenti appena sufficiente con possibili imperfezioni; capacità di analisi sintesi e autonomia di giudizio sufficienti. 21-23: conoscenza e comprensione degli argomenti routinaria; capacità di analisi e sintesi corrette con argomentazione logica coerente. 24-26: discreta conoscenza e comprensione degli argomenti; buone capacità di analisi e sintesi con argomentazioni espresse in modo rigoroso. 27-29: conoscenza e comprensione degli argomenti completa; notevoli capacità di analisi, sintesi. buona autonomia di giudizio. 30-30: ottimo livello di conoscenza e comprensione degli argomenti. notevoli capacità di analisi e di sintesi e di autonomia di giudizio. Argomentazioni espresse in modo originale.

## **Piani di studio**

Di norma entro il mese di novembre del primo anno di corso, lo studente presenta al Consiglio di Dipartimento una proposta di piano di studio. Il Consiglio valuterà entro il mese di dicembre il piano di studio proposto. Qualora l'iscrizione alla laurea magistrale avvenga in un periodo diverso dell'anno, s'intende che il piano di studio va presentato entro un mese dall'iscrizione e che il Consiglio è tenuto a valutarlo entro il mese successivo. I piani di studio vengono preventivamente valutati dalla Commissione Pratiche Studenti che verifica la loro coerenza con gli obiettivi formativi. Il piano di studio non può comprendere insegnamenti i cui programmi siano stati già svolti in insegnamenti relativi al conseguimento dei 180 CFU della laurea triennale. A tal proposito si consulti la pagina dedicata alle modalità e alle regole per la presentazione del piano di studio.

## **Prova finale**

La prova finale per il conseguimento della laurea magistrale richiede la stesura di una tesi elaborata in modo originale dallo studente, comprendente la redazione di un documento scritto (eventualmente anche in lingua inglese) e una prova seminariale conclusiva. La scelta dell'argomento della tesi deve essere concordata con un docente scelto dallo studente, che svolge le funzioni di relatore. La tesi dovrà evidenziare nei suoi contenuti la maturità culturale del laureando in un'area disciplinare attinente alla sua formazione curricolare. La prova finale verrà valutata in base alla originalità dei risultati, alla padronanza dell'argomento, all'autonomia e alle capacità espositiva e di ricerca bibliografica mostrate dal candidato. A tal proposito si consulti la pagina dedicata alle modalità e alle regole della prova finale.

## **Modalità e requisiti di ammissione**

Per essere ammessi al Corso di laurea magistrale in Matematica Pura ed Applicata occorre essere in possesso della laurea o del diploma universitario di durata triennale, ovvero di un altro titolo di studio conseguito all'estero riconosciuto idoneo. Sono inoltre richiesti specifici requisiti curriculari, caratteristici delle lauree in discipline matematiche. La natura interdisciplinare della matematica rende possibile anche a studenti che abbiano conseguito la laurea in altri settori di accedere alla

laurea magistrale in Matematica Pura ed Applicata, purché in possesso dei suddetti requisiti e di un'adeguata preparazione personale.

Per accedere al Corso di laurea magistrale in Matematica Pura ed Applicata è necessario che i laureati siano in possesso dei requisiti curriculari elencati in almeno uno dei due seguenti punti:

- possesso di una laurea nella classe L-35 (DM 270/2004) provenienti da qualsiasi ateneo italiano (o di studenti in possesso di analogo titolo di studio estero);
- almeno 24 CFU conseguiti complessivamente nei settori da MAT/01 a MAT/09.

Tutti gli studenti che intendano immatricolarsi al Corso di laurea magistrale in Matematica Pura ed Applicata devono presentare la richiesta secondo le modalità previste dall'Ateneo. Le domande pervenute saranno esaminate dal Coordinatore del Corso di Studio, con l'ausilio dalla Commissione Pratiche Studenti.

La verifica della preparazione personale avviene tramite l'analisi del curriculum, dei programmi degli esami sostenuti e delle votazioni ottenute durante gli studi pregressi e può, eventualmente, richiedere un colloquio. Sono accolte senza ulteriore verifica le domande di tutti i candidati che abbiano conseguito la laurea nella classe L-35, con almeno 6 CFU nel settore MAT/02 e con una votazione pari o superiore a 80/110.

A seguito della valutazione, potrà essere richiesto di includere nel piano di studi uno o più corsi appositamente organizzati in base al curriculum personale dello studente. In particolare, potrà essere richiesto l'inserimento, nel piano di studio della laurea magistrale, di uno o più insegnamenti della laurea triennale in matematica per un massimo di 24 CFU.

Si invitano gli interessati a richiedere un parere preventivo ed informale da parte della Commissione Pratiche Studenti scrivendo a [dida@mat.uniroma2.it](mailto:dida@mat.uniroma2.it) e allegando il proprio curriculum studiorum con elenco degli esami sostenuti, completo di crediti formativi, settori disciplinari e programmi relativi. Si veda anche la sezione apposita del sito web del Corso di Studio.

### **Trasferimenti**

Gli studenti che intendono trasferirsi al Corso di laurea magistrale in Matematica Pura ed Applicata possono richiedere un parere preventivo ed informale da parte della Commissione Pratiche Studenti scrivendo a [dida@mat.uniroma2.it](mailto:dida@mat.uniroma2.it) e allegando il proprio curriculum studiorum con elenco degli esami sostenuti, completo di crediti formativi, settori disciplinari e programmi relativi. Se lo studente ottiene un parere positivo dovrà seguire le modalità previste dall'Ateneo per i trasferimenti.

Gli studenti che si trasferiscono al Corso di laurea magistrale in Matematica Pura ed Applicata provenendo da altri corsi di laurea magistrale, possono chiedere il riconoscimento dei crediti relativi ad esami sostenuti nel corso di studi d'origine. Il Consiglio valuterà di volta in volta le singole richieste. Si veda anche la sezione apposita del sito web del Corso di Studio.

### **Percorso di Eccellenza**

Per il Corso di laurea magistrale in Matematica Pura ed Applicata è attivo presso il Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Roma "Tor Vergata" un Percorso di Eccellenza con lo scopo di valorizzare la formazione degli studenti meritevoli ed interessati ad attività di approfondimento su tematiche di interesse per la Matematica Pura ed Applicata. Il percorso di Eccellenza prevede la partecipazione ad attività formative aggiuntive a quelle del corso di studio, costituite da approfondimenti, attività seminariali, o dalla partecipazione a corsi esterni, secondo un programma che verrà personalizzato e concordato con ogni singolo studente. Lo studente che abbia ottenuto l'accesso al Percorso di Eccellenza viene affidato dalla Commissione Pratiche Studenti ad un docente tutor che ne segue il percorso e collabora alla organizzazione delle attività concordate con lo studente. Lo studente può consultare le modalità e i requisiti per l'accesso sulla pagina dedicata.

## Percorso Formazione 24 CFU

Per l'accesso ai concorsi per la funzione docente nella scuola secondaria è richiesto il conseguimento di 24 CFU in forma curricolare, aggiuntiva o extra curricolare nelle discipline antropo-psicopedagogiche e nelle metodologie e tecnologie didattiche. Lo studente interessato può maturare all'interno del proprio curriculum di laurea magistrale 24 CFU conformi riconoscibili per il Percorso Formazione 24 CFU istituito appositamente dall'Ateneo. A tal fine, oltre ad iscriversi al percorso al Percorso Formazione 24 CFU di Ateneo, dovrà inserire nel proprio piano di studio almeno 12 CFU nel settore MAT/04 e due insegnamenti di almeno 6 CFU ciascuno (nelle attività a libera scelta dello studente) in due distinti tra i seguenti ambiti disciplinari:

- Pedagogia, Pedagogia speciale e didattica dell'inclusione
- Psicologia
- Antropologia

Per l'elenco degli esami disponibili in tali ambiti nonché per ogni altra informazione si invita a consultare il sito di Ateneo.

## Vita pratica

La maggior parte delle informazioni è riportata nel sito web del Corso di Studi. Informazioni si possono anche ottenere per posta elettronica ([dida@mat.uniroma2.it](mailto:dida@mat.uniroma2.it)), oppure rivolgendosi alla segreteria didattica, Dott.ssa Solange Barcaccia, tel. 06 72594685 ([barcacci@mat.uniroma2.it](mailto:barcacci@mat.uniroma2.it)).

### Modalità di erogazione della didattica

La didattica si svolge in **presenza e la frequenza è fortemente consigliata**. Come supporto alla didattica, per la larga maggioranza degli insegnamenti, i docenti sono disponibili ad utilizzare le classi virtuali Teams (*T*) per scambio di materiale, contatti con gli studenti, ricevimento e altro. Inoltre, per la larga maggioranza degli insegnamenti, i docenti sono anche disponibili, su motivata richiesta degli studenti e subordinatamente alla disponibilità di strumenti adeguati ed efficienti, ad effettuare streaming (*S*) e/o registrazione delle lezioni (*R*). Tali disponibilità dei docenti sono riportate in dettaglio per gli insegnamenti non mutuati nell'elenco che segue. Si ribadisce tuttavia che **lo streaming e/o la registrazione delle lezioni possono essere intesi unicamente come supporto collaterale alla didattica svolta in aula e non possono in alcun modo essere considerati come sostituto sistematico per essa**.

## Programmi dei corsi

### ALGEBRA COMMUTATIVA

1° semestre

8 CFU – settore MAT/02 – 64 ore di lezione in aula – supporti: *T*

Docente F. Gavarini

**Programma:** Il programma comprende i seguenti argomenti, che saranno svolti (orientativamente) nell'ordine in cui qui di seguito sono elencati. Saranno possibili alcune variazioni in corso d'opera, in funzione degli interessi di coloro che frequenteranno il corso.

FONDAMENTI di TEORIA degli ANELLI (commutativi unitari): - richiami di teoria degli anelli: anelli (commutativi unitari), ideali, quozienti, morfismi, Teorema Fondamentale di Omomorfismo, Teoremi di Isomorfismo, prodotti diretti; - operazioni sugli ideali, ideali massimali, radicale di Jacobson, radicale nilpotente; anelli locali, anelli semilocali; ideali primi, dimensione di Krull di un anello; - estensione e contrazione di ideali tramite un morfismo.

MODULI (su anelli commutativi unitari): - moduli, sottomoduli, quozienti, morfismi; Teorema Fondamentale di Omomorfismo, Teoremi di Isomorfismo; prodotti diretti e somme dirette; successioni esatte,

moduli di morfismi, modulo duale; - moduli liberi, basi di un modulo; i moduli su un campo sono tutti liberi, dimensione di un modulo su un campo; rango di un modulo libero; Lemma di Nakayama; - elementi di torsione; proprietà notevoli dei moduli su un D.I.P.; - prodotto tensoriale tra moduli; cambiamenti di anello di base, restrizione ed estensione di scalari; anelli e moduli di frazioni; algebre su un anello.

NOETHERIANITÀ e ARTINIANITÀ: - condizioni sulle catene per moduli e anelli, noetherianità e artinianità, serie di composizione, lunghezza di un anello; - anelli noetheriani e anelli artiniani, proprietà fondamentali; Teorema della Base di Hilbert, Teorema degli Zeri di Hilbert; decomposizione primaria degli ideali in un anello noetheriano; caratterizzazione degli anelli artiniani; teorema di struttura per gli anelli artiniani.

MODULI su DOMINI a IDEALI PRINCIPALI (=DIP): - moduli liberi su un DIP, e loro sottomoduli; - esponenti e ordini per un modulo e i suoi elementi; elementi indipendenti; - p-(sotto)moduli, decomposizione di un modulo finitamente generato (=f.g.) in somma diretta di parte libera e p-sottomoduli; - decomposizione ciclica di un modulo f.g. tramite parte libera e divisori elementari; decomposizione ciclica di un modulo f.g. tramite parte libera e invarianti; relazione tra le due decomposizioni cicliche; - applicazione allo studio dei gruppi abeliani e delle forme canoniche di matrici.

SPETTRO PRIMO di un ANELLO: - lo spettro primo di un anello, topologia di Zariski; funtorialità dello spettro primo; - relazioni tra proprietà algebriche di un anello e proprietà topologiche del suo spettro primo; - spazi topologici noetheriani, caratterizzazione degli anelli il cui spettro primo sia noetheriano.

**Obiettivi di apprendimento:** Conseguire una buona conoscenza delle strutture fondamentali e dei risultati principali dell'Algebra Commutativa, includendo i seguenti temi: - anelli (commutativi unitari), moduli su anelli, morfismi di anelli e di moduli; - prodotto tensoriale tra moduli; algebre; anelli e moduli di frazioni; - condizioni sulle catene per moduli e anelli, moduli e anelli noetheriani e artiniani; - lo spettro primo di un anello; - moduli sui domini a ideali principali.

**Testi consigliati:**

M. F. Atiyah, I. G. Macdonald: *Introduzione all'Algebra Commutativa*, Feltrinelli, Milano, 1981

M. F. Atiyah, I. G. Macdonald: *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, 1969

J. Goedecke: *Category Theory*, dispense disponibili on-line

C. A. Finocchiaro: *Lo spettro primo di un anello*, dispense disponibili on-line

M. Lanini: *Appunti Corso Algebra 3 A.A. 2017-2018*, dispense disponibili on-line

**Modalità di esame:** La verifica dell'apprendimento avverrà tramite una prova orale. In ottemperanza alle normative di legge e ai regolamenti di ateneo, per studenti con esigenze specifiche particolari - debitamente comprovate e verificate dagli uffici preposti - saranno predisposte modalità alternative, adeguate al caso specifico, per la verifica dell'apprendimento. Poiché il contenuto matematico del corso è già in sé stesso un "linguaggio", che trascende la lingua specifica utilizzata per veicolarlo, in caso di specifiche richieste, il docente (a sua esclusiva discrezione) potrà autorizzare lo studente a sostenere le prove di verifica dell'apprendimento - in alternativa alla lingua italiana - anche in lingua inglese, o in lingua francese, o in lingua spagnola.

**Bibliografia di riferimento:**

S. Lang: *Algebra*, Revised Third Edition, Graduate Texts in Mathematics 211, Springer-Verlag New York, Inc, 2009

S. Mac Lane, G. Birkhoff: *Algebra*, Third Edition, AMS-Chelsea Publishing, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (USA), 1999

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

 **Program:** The program contains the following topics, that will be treated in the same order (more or less) as they are listed here below. Some variations during the course may occur, depending on the wishes of those attending the course.

RING THEORY: - reminders of basic ring theory: (commutative unital) rings, ideals, quotients, morphisms, Fundamental Theorem of Homomorphism, Isomorphism Theorems, direct products; - operations on ideals, maximal ideals, Jacobson radical, nil-radical; local rings, semilocal rings; prime ideals, Krull dimension of a ring; - extension and contraction of ideals through a morphism.

MODULES (over commutative unital rings): - modules, submodules, quotients, morphisms; Fundamental Theorem of Homomorphism, Isomorphism Theorems; direct products and direct sums; exact sequences, modules of morphisms, dual module; - free modules, basis of a module; all modules over a field are free, dimension of a module over a field; rank of a free module; Nakayama's Lemma; - torsion elements; remarkable properties of modules over a P.I.D.; - tensor product of modules; change ground ring, restriction and extension of scalars; rings and modules of fractions; algebras over a ring.

NOETHERIANITY and ARTINIANY: - chain conditions for modules and rings, noetherianity and artinianity, composition series, length of a ring; - Noetherian rings and Artinian rings, basic properties; Hilbert's Basis Theorem, Hilbert's Nullstellensatz; primary decomposition of ideal in a Noetherian ring; characterization of Artinian rings; structure theorem for Artinian rings.

MODULES over PRINCIPAL IDEAL DOMAINS (=PID): - free modules over a PID, and their submodules; - exponents and orders of a module and its elements; independent elements; - p-(sub)modules, decomposition of a finitely generated (=f.g.) module into direct sum of free part and p-submodules; - cyclic decomposition of a f.g. module by means of free part and elementary divisors; cyclic decomposition of a f.g. module through free part and invariants; relation between the two cyclic decompositions; - application to the study of Abelian groups and of canonical forms of matrices.

PRIME SPECTRUM of a RING: - the prime spectrum of a ring, Zariski topology; functorialità dello spettro primo; - relations between algebraic properties of a ring and topological properties of its prime spectrum; - Noetherian topological spaces, characterizations of the rings whose prime spectrum is Noetherian.

KNOWLEDGE AND UNDERSTANDING: The student will have to know the main types of algebraic structures under study, as well as examples and counterexamples which show the various cases and the differences among them; in particular, they will have to understand and apply the key ideas underlying the main notions, and how these apply in different contexts. The theory of categories will be the overall framework within which the student will have to recognize that a unique abstract language grasps a wide variety of specific instances as special cases, that then can be dealt with from a common point of view.

**Text books:**

M. F. Atiyah, I. G. Macdonald: *Introduzione all'Algebra Commutativa*, Feltrinelli, Milano, 1981

M. F. Atiyah, I. G. Macdonald: *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, 1969

J. Goedecke: *Category Theory*, notes available on-line

C. A. Finocchiaro: *Lo spettro primo di un anello*, notes available on-line

M. Lanini: *Appunti Corso Algebra 3 A.A. 2017-2018*, notes available on-line

**Exam mode:** The final assessment will be done through an oral exam. In compliance with the law and the university rules, for students with specific needs - duly proved and verified by the office in charge - the teacher in charge (of the course) will organise alternative procedures, case-by-case fit for the specific situation, to implement the final exam. Since the mathematical content of the course is already a "language" per se, moving beyond the specific idiom used to spread it, when explicitly required the teacher in charge (of the course) may allow - at his discretion only - the student to undergo the final exam (rather than in Italian) also in English, or in French, or in Spanish.

**Reference bibliography:**

A. J. de Jong: *The Stacks Project: Commutative algebra*, notes available on-line

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

## ALGEBRE DI OPERATORI

2° semestre

8 CFU – settore MAT/05 – 64 ore di lezione in aula – supporti: S, T

Docente R. Longo

■ **Programma:** Operatori lineari illimitati su uno spazio di Hilbert, aggiunto e chiudibilità. Proiettore caratteristico sul grafico. Operatori Hermitiani e autoaggiunti, criterio base di autoaggiunzione. Calcolo funzionale continuo e Boreliano, il teorema spettrale. Operatori positivi, isometrie parziali, decomposizione polare di operatori chiusi. Prodotto tensoriale di spazi di Hilbert. Operatori di Hilbert-Schmidt e di classe traccia, preduale di  $B(H)$ . Topologie su  $B(H)$ . Gruppi a un parametro di unitari, il teorema di Stone. Teorema di unicità di von Neumann delle regole di commutazione di Weyl. Convergenza nel senso del risolvente.  $C^*$ -algebre e Algebre di von Neumann. Teoremi di densità di von Neumann e di Kaplansky. Stati e rappresentazioni di una  $C^*$ -algebra; stati e rappresentazioni normali. Equivalenza e quasiequivalenza di rappresentazioni. Preduale di un'algebra di von Neumann. Decomposizione polare di funzionali lineari normali. Sottospazi standard, elementi di teoria modulare, caso di algebre di von Neumann AFD. Inclusioni modulari, teorema di Borchers e rappresentazioni di gruppi.

**Obiettivi di apprendimento:** Lo studente dovrà apprendere la struttura base delle Algebre di Operatori su uno spazio di Hilbert, sia dal punto di vista analitico che algebrico.

**Testi consigliati:**

O. Bratteli, D. W. Robinson: *Operator algebras and quantum statistical mechanics, vol. 1*, Springer, 1987

R. Longo: *Note private*, dispense disponibili on-line

M. Takesaki: *Theory of Operator Algebras I*, Springer, 1979

**Modalità di esame:** Esame orale.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

 **Program:** Unbounded linear operators on a Hilbert space, adjoint and closability. The characteristic projection onto the graph. Hermitian and selfadjoint operators, basic selfadjointness criterion. Continuous and Borel functional calculus, the spectral theorem. Positive operators, partial isometries, polar decomposition for closed operators. Tensor product of Hilbert spaces. Hilbert-Schmidt and trace class operators, the predual of  $B(H)$ . One-parameter unitary groups, Stone theorem. von Neumann's uniqueness theorem on the Weyl commutation relations. Convergence in the resolvent sense.  $C^*$ -algebras and von Neumann algebras. The double commutant theorem and Kaplansky theorem. States and representations of a  $C^*$ -algebra; normal states and normal representations. Equivalence and quasi-equivalence of representations. Predual of a von Neumann algebra. Polar decomposition of normal linear functionals. Standard subspaces, elements of modular theory, case of an AFD von Neumann algebra. Modular inclusions, Borchers' theorem and group representations.

**Text books:**

O. Bratteli, D. W. Robinson: *Operator algebras and quantum statistical mechanics, vol. 1*, Springer, 1987

R. Longo: *Note private*, notes available on-line

M. Takesaki: *Theory of Operator Algebras I*, Springer, 1979

**Exam mode:** Oral exam.

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

**ANALISI ARMONICA****1° semestre**

8 CFU – settore MAT/05 – 64 ore di lezione in aula – supporti: T

**Docente A. Sorrentino (codocente F. Pelosi)**

 **Programma:** Introduzione all'analisi armonica classica: serie di Fourier e loro convergenza, Trasformata di Fourier, applicazioni, analisi di Fourier su gruppi, etc. Introduzione alle funzioni wavelets e alla Trasformata wavelet. Cenni alle applicazioni nell'ambito dell'elaborazione di immagini.

**Obiettivi di apprendimento:** Il corso si propone di illustrare alcuni concetti fondamentali dell'analisi armonica classica e moderna, con alcune sue applicazioni. L'obiettivo è quello di rendere lo studente capace di elaborare tali concetti in maniera critica e di acquisire le conoscenze necessarie per risolvere con rigore i problemi proposti.

**Testi consigliati:**

C. K. Chui: *An Introduction to wavelets*, Academic Press, 1992

I. Daubechies: *Ten lectures on wavelets*, SIAM, 1992

Y. Katznelson: *An introduction to harmonic analysis*, Cambridge University Press, 2004

M. Picardello: *Analisi armonica: aspetti classici e numerici*, dispense disponibili on-line

E. Stein, R. Shakarchi: *Fourier Analysis*, Princeton University Press, 2007

**Modalità di esame:** L'esame consiste in un prova orale in cui il/la candidato/a dovrà dimostrare di saper esporre con competenza e rigore le nozioni apprese ed, eventualmente, di essere in grado di elaborarle in maniera originale.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

 **Program:** Introduction to classical harmonic analysis: Fourier series and convergence, Fourier transform, applications, Fourier Analysis on groups, etc. Introduction to wavelet functions and wavelet transform. Outline of applications to image processing.

**Learning objectives:** In this course we intend to illustrate some basic concepts in classical and modern harmonic analysis, as well as some applications. The goal is to allow students to critically elaborate on such concepts, and to be able to solve, in a rigorous way, the problems proposed in the course.

**Text books:**

C. K. Chui: *An Introduction to wavelets*, Academic Press, 1992

I. Daubechies: *Ten lectures on wavelets*, SIAM, 1992

Y. Katznelson: *An introduction to harmonic analysis*, Cambridge University Press, 2004

M. Picardello: *Analisi armonica: aspetti classici e numerici*, notes available on-line

E. Stein, R. Shakarchi: *Fourier Analysis*, Princeton University Press, 2007

**Exam mode:** The exam consists in an oral interview. The candidate should be able to present the learned notions with competence and rigour, and, if necessary, to elaborate on them in an original way.

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

**ANALISI DI RETI****1° semestre**

6 CFU – settore INF/01 – 48 ore di lezione in aula

**Docente M. Di Ianni**

**Programma:** Grafi, percorsi, connettività, distanza, ricerca; Chiusura triadica, importanza dei collegamenti deboli, struttura di rete in insiemi di grandi dimensioni, indici di centralità e partizionamenti; Bilancio strutturale. DINAMICHE NELLE RETI: MODELLI DI POPOLAZIONE. Cascate informative: il concetto “segui la massa”, un modello di cascata, la regola di Bayes e le cascate; Power Law e fenomeno rich-get-richer: la popolarità come un effetto rete, modelli rich-get-richer e la long tail. DINAMICHE NELLE RETI: MODELLI STRUTTURALI. Comportamento a cascata: diffusione, cascate e cluster, il ruolo dei weak ties, capacità di una cascata; il fenomeno Small-world: i sei gradi di separazione, modelli per lo Small-world; ricerca decentralizzata: modelli e analisi. RETI DI INFORMAZIONE: IL WORLD WIDE WEB. Struttura del Web: reti di informazione, ipertesti e memoria associativa; Link analysis e ricerca nel Web: il problema del Ranking, Hubs e Authorities, PageRank. ISTITUZIONI E COMPORTAMENTO AGGREGATO. Meccanismi di voto: decisioni di gruppo e preferenze individuali; sistemi di voto a maggioranza e posizionale; Teorema di impossibilità di Arrow; Teorema del Voto Mediano; Voto come forma di aggregazione dell'informazione: voto sincero e non sincero, la regola dell'unanimità e il problema del verdetto della giuria; voto sequenziale e cascate informative.

**Obiettivi di apprendimento:** Acquisizione di competenze nella definizione di problemi relativi alla gestione di relazioni fra grandi quantità di individui e nella loro soluzione.

**Testi consigliati:**

D. Easley, J. Kleinberg: *Networks, Crowds, and Markets: Reasoning about a Highly Connected World*, Cambridge University Press, 2010

**Modalità di esame:** Esame orale.

**Program:** Graph Theory and Social Networks. Graphs, Paths, Connectivity, Distance and Search; Triadic Closure, Strong and Weak Ties, Tie Strength and Network Structure in Large-Scale Data, Betweenness Measures and Graph Partitioning; Structural balance. NETWORK DYNAMICS AND POPULATION MODELS. Information Cascades, Following the Crowd, A Simple Herding Experiment, Bayes' Rule and Cascades; Power law and Rich get richer Phenomena, Popularity as a Network Phenomenon. PowerLaws, Rich-Get-RicherModels, TheLongTail. NETWORK DYNAMICS AND STRUCTURAL. Cascading Behavior in Networks: diffusion, cascades, clusters and the role of weak ties, cascade capacity; The Small World Phenomenon, six degrees of separation, decentralized search (model and analysis). INFORMATION NETWORKS: THE WORLD WIDE WEB. Structure of the Web: hypertexts and associative memory; Link analysis and Web search: the Ranking problem, Hubs and Authorities, PageRank. AGGREGATE BEHAVIOR. Voting: voting for group decision making, individual preferences; voting systems: majority rule and positional voting; Arrow's impossibility theorem; Median voter theorem; Voting as a form of information aggregation; insincere voting, jury decisions and the unanimity rule; sequential voting and information cascades.

**Learning objectives:** Acquiring skills in defining problems related to managing relationships between large numbers of individuals and their solution.

**Text books:**

D. Easley, J. Kleinberg: *Networks, Crowds, and Markets: Reasoning about a Highly Connected World*, Cambridge University Press, 2010

**Exam mode:** Oral exam.

---

## CAM 1 - TEORIA DELLA MISURA

1° semestre

6 CFU – settore MAT/05 – 60 ore di lezione in aula – supporti: R, S, T

Docente F. Radulescu

**Programma:** Teoria della misura generale. Misura di Lebesgue. Integrale di Lebesgue. Misura prodotto. Funzioni AC e BV.

**Obiettivi di apprendimento:** Illustrare alcuni concetti di base dell'analisi funzionale. Gli studenti dovranno acquisire le conoscenze necessarie per la comprensione di alcuni risultati generali dell'analisi funzionale e per l'applicazione di alcuni metodi a problemi particolari.

**Testi consigliati:**

H. Brezis: *Analisi funzionale, teoria e applicazioni*, Liguori ed., 1986

H. Brezis: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010

M. Reed, B. Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics Vol 1, Functional Analysis*, Academic Press, 1980

**Modalità di esame:** Prova scritta e orale.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

 **Program:** General measure theory. Lebesgue measure. Lebesgue integral. Product measure. AC and BV functions.

**Learning objectives:** Explain some basic concepts of functional analysis. Students will have to acquire the necessary knowledge for the understanding of some general results of functional analysis and for the application of some methods to particular problems.

**Text books:**

H. Brezis: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010

M. Reed, B. Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics Vol 1, Functional Analysis*, Academic Press, 1980

**Exam mode:** Written and oral exam.

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

## CAM 2 - INTRODUZIONE ALL'ANALISI FUNZIONALE

2° semestre

6 CFU – settore MAT/05 – 60 ore di lezione in aula – supporti: R, S, T

Docente A. Porretta

**Programma:** SPAZI DI BANACH. Definizioni ed esempi. Operatori limitati su uno spazio normato. Spazio duale. Teorema di Hahn-Banach e conseguenze. SPAZI DI HILBERT. Basi ortonormali ed esempi. Sistema trigonometrico e serie di Fourier in  $L^2(T)$ . LEMMA DI BAIRE. Principio dell'uniforme limitatezza. Teorema dell'applicazione aperta, e teorema del grafico chiuso. Operatore aggiunto. Operatori limitati su uno spazio di Hilbert. TOPOLOGIE DEBOLI. Topologia debole e topologia star-debole. Teorema di Banach-Alaoglu. Spazi riflessivi. Esempi. TEORIA SPETTRALE E OPERATORI COMPATTI. Spettro di un operatore. Operatori compatti e teoria di Fredholm. Applicazioni ed esempi.

**Obiettivi di apprendimento:** Illustrare alcuni concetti di base dell'analisi funzionale. Gli studenti dovranno acquisire le conoscenze necessarie per la comprensione di alcuni risultati generali dell'analisi funzionale e per l'applicazione di alcuni metodi a problemi particolari.

**Testi consigliati:**

H. Brezis: *Analisi funzionale, teoria e applicazioni*, Liguori Edizioni, 1983

H. Brezis: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010

M. Reed, B. Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics, vol. 1, Functional Analysis*, Academic Press, 1980

**Modalità di esame:** Risoluzione di esercizi, anche assegnati durante il corso. Esame scritto e orale. L'esame scritto è propedeutico all'esame orale, costituendone una premessa essenziale.

**Bibliografia di riferimento:**

W. Rudin: *Functional Analysis*, Mc Graw-Hill, 1991

K. Yosida: *Functional Analysis*, Springer, 1978

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

 **Program:** BANACH SPACES Definitions and examples. Bounded Operators on normed spaces. Dual space, Hahn-Banach theorem and its main consequences. HILBERT SPACES. Orthonormal bases, examples, Trigonometric system and Fourier series in  $L^2(T)$ . HAHN-BANACH THEOREM AND ITS MAIN CONSEQUENCES. Baire's lemma. Uniform boundedness principle, Open mapping theorem and closed graph theorem. Adjoint of an operator. Bounded operators on Hilbert spaces. WEAK TOPOLOGIES: Weak and weak\*-topologies, Banach-Alaoglu theorem. Reflexive spaces. Examples. SPECTRAL THEORY AND COMPACT OPERATORS: Spectrum of an operator, Compact operators and Fredholm alternative. Spectral theorem for compact self-adjoint operators. Applications and examples.

**Learning objectives:** Students are expected to be capable of a deep understanding of the questions posed by functional analysis as well as the methods and ideas behind the main findings.

**Text books:**

H. Brezis: *Analisi funzionale, teoria e applicazioni*, Liguori Edizioni, 1983

M. Reed, B. Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics, vol. 1, Functional Analysis*, Academic Press, 1980

**Exam mode:** Solving exercises, also assigned during the course. Written and oral exam. The written exam is an essential premise to the oral exam.

**Reference bibliography:**

W. Rudin: *Functional Analysis*, Mc Graw-Hill, 1991

K. Yosida: *Functional Analysis*, Springer, 1978

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

**CAN 1 - MODELLIZZAZIONE GEOMETRICA E SIMULAZIONE NUMERICA****1° semestre**

8 CFU – settore MAT/08 – 64 ore di lezione in aula – supporti: R, T

**Docente C. Manni (codocente H. Speleers)**

 **Programma:** Il corso fornisce un'introduzione alla costruzione ed alle proprietà delle funzioni spline nonché al loro utilizzo nell'ambito della grafica computerizzata, della progettazione del trattamento numerico di equazioni differenziali alle derivate parziali. Polinomi di Bernstein e curve di Bézier. B-spline: costruzione, proprietà analitiche e geometriche. Curve e superfici B-spline. Curve e superfici NURBS. Proprietà di approssimazione di spazi spline. Trattamento di problemi ellittici multidimensionali: fondamenti del metodo degli elementi finiti e dell'analisi isogeometrica.

**Obiettivi di apprendimento:** L'insegnamento si propone di fornire le conoscenze di base riguardo alle funzioni spline e di alcune loro applicazioni salienti. Al termine dell'insegnamento, lo studente conoscerà le principali proprietà delle funzioni spline, della base B-spline e i principali aspetti delle loro applicazioni nell'ambito del free-form design, dell'approssimazione di funzioni e della soluzione di equazioni alle derivate parziali.

**Testi consigliati:**

C. Manni, H. Speleers: *Standard and Non-standard CAGD Tools for Isogeometric Analysis: A Tutorial*, Springer Lecture Notes in Mathematics 2161, pp. 1-69, 2016

T. Lyche, C. Manni, H. Speleers (eds.): *Splines and PDEs: from Approximation Theory to Numerical Linear Algebra*, Springer Lecture Notes in Mathematics 2219, 2018

**Modalità di esame:** Nella prova orale lo studente dovrà dimostrare di saper illustrare, sia in modo sintetico che analitico, e con proprietà di linguaggio i fondamenti matematici dei metodi numerici presentati a lezione. Il punteggio della prova d'esame è attribuito mediante un voto espresso in trentesimi.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

 **Program:** The course provides an introduction to the construction and properties of spline functions as well as their use in geometric modeling, approximation and numerical treatment of partial differential equations. Bernstein polynomials and Bézier curves. B-splines: construction, analytical and geometric

properties. B-spline curves and surfaces. NURBS curves and surfaces. Approximation properties of spline spaces. Numerical treatment of multidimensional elliptic problems: fundamentals of the finite element method and isogeometric analysis.

**Learning objectives:** The course aims to provide basic knowledge about splines and some of their salient applications. At the end of the course, the student will know the main properties of spline functions, of the B-spline basis and the main aspects of their applications to free-form design, approximation of functions, and the numerical solution of partial differential equations.

**Text books:**

C. Manni, H. Speleers: *Standard and Non-standard CAGD Tools for Isogeometric Analysis: A Tutorial*, Springer Lecture Notes in Mathematics 2161, pp. 1-69, 2016

T. Lyche, C. Manni, H. Speleers (eds.): *Splines and PDEs: from Approximation Theory to Numerical Linear Algebra*, Springer Lecture Notes in Mathematics 2219, 2018

**Exam mode:** In the oral exam the student has to prove to be able to illustrate with a proper language, both synthetically and analytically, the mathematical foundations of the numerical methods presented in class. The exam score is given by a mark expressed in thirtieths.

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## CAN 2 - ALGEBRA LINEARE NUMERICA CON APPLICAZIONI ALLE PDE E AI BIG DATA

2° semestre

8 CFU – settore MAT/08 – 64 ore di lezione in aula – supporti: S, T

Docente D. Bertaccini

**Programma:** Nozioni di analisi dell'errore. Matrici sparse, calcolo parallelo e acceleratori hardware. Tecniche di proiezione. Algoritmi di proiezione in sottospazi di Krylov: CG and GMRES. BiCG, CGS, BiCGStab. Flexible GMRES (FGMRES). Precondizionatori a fattorizzazione incompleta. Precondizionatori per alcuni sistemi strutturati. Nozioni di funzioni di matrici. Calcolo efficiente di funzioni di matrici. Applicazione all'integrazione di modelli di PDE e big data. Grafi e matrici nella complex network analysis. Matrici di adiacenza, laplaciana, di incidenza. Misure di centralità e importanza dei dati. Cenni all'evoluzione e alla robustezza di una rete complessa con applicazioni alla social network analysis, reti biologiche, in finanza, nelle reti di comunicazione, internet e trasporti, negli algoritmi di consenso.

**Obiettivi di apprendimento:** Il corso si propone di sviluppare competenze e conoscenze avanzate in vari settori della di matematica, garantendo agli iscritti alla laurea magistrale in Matematica Pura ed Applicata ampia possibilità di approfondimento sia degli aspetti teorici di questa disciplina che delle sue applicazioni. Oltre ad avere un'approfondita conoscenza sia degli aspetti disciplinari sia di quelli metodologici della matematica, gli studenti del corso devono essere in grado di esprimere le proprie conoscenze in contesti professionali sia specifici sia interdisciplinari, devono essere capaci di orientarsi nella consultazione della letteratura e di redigere bibliografie in ambito matematico. Potranno, a seconda delle proprie inclinazioni e preferenze, proseguire negli studi partecipando a programmi di dottorato in discipline matematiche o inserirsi nel mondo del lavoro, sia utilizzando le specifiche competenze acquisite che valorizzando le proprie capacità di flessibilità mentale e di collaborazione con altri esperti, perfettamente in linea con gli obiettivi formativi del corso di laurea magistrale in Matematica Pura ed Applicata.

**Testi consigliati:**

D. Bertaccini, F. Durastante: *Iterative Methods and Preconditioning for Large and Sparse Linear Systems with Applications*, Chapman and Hall/CRC, 2018

**Modalità di esame:** Esame orale con eventuale presentazione di un lavoro monografico su argomenti del corso.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

 **Program:** Notions of error analysis. Sparse matrices, parallel computing and hardware accelerators. Projection techniques: CG and GMRES. BiCG, CGS, BiCGStab, Flexible GMRES (FGMRES). Incomplete factoring preconditioners. Preconditioners for some structured systems. Notions of functions of matrices. Application to the integration of PDE and big data models. Graphs and matrices in complex network analysis. Adjacency, Laplacian, and incidence matrices. Measurements of centrality and importance of data. Evolution and robustness of a complex network with applications to social network analysis, biological networks, finance, communication networks, internet and transportations, in consensus algorithms.

**Learning objectives:** Rigorous introduction to iterative methods for large numerical linear algebra problems (systems of large algebraic linear equations and eigenvalue problems and generalizations). Applications to partial derivative equations with particular reference to finite difference schemes for evolution problems and big data. In particular they will study:

- projective methods with particular attention to Krylov methods,
- preconditioners based on incomplete factorizations and in an approximate inverse form,
- preconditioners for problems with structure and localized problems,
- analysis of convergence of the methods and indications on the construction of the algorithms.

**Text books:**

D. Bertaccini, F. Durastante: *Iterative Methods and Preconditioning for Large and Sparse Linear Systems with Applications*, Chapman and Hall/CRC, 2018

**Exam mode:** Oral exam with the eventual presentation of a monographic work on course topics.

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## CHIMICA GENERALE

1° semestre

8 CFU – settore CHIM/03 – 64 ore di lezione in aula

Docente S. Piccirillo

**Programma:** La struttura dell'atomo. Sistema periodico degli elementi. Legame chimico (ionico, covalente, metallico). Forze intermolecolari e legame a idrogeno. Stato della materia. Rapporti ponderali nelle reazioni chimiche. Numero di ossidazione. Bilanciamento delle reazioni chimiche. Termodinamica. Funzioni di stato. Equilibri tra fasi. Equilibri chimici omogenei ed eterogenei. La costante di equilibrio termodinamico. Equilibri di solubilità. Dissociazione elettrolitica. Soluzioni e proprietà colligative. Equilibri acido-base in soluzione acquosa: pH, idrolisi, soluzioni tampone, indicatori. Sistemi ossidoriduttivi: potenziali elettrodi, pile, equazione di Nernst, elettrolisi, legge di Faraday.

**Obiettivi di apprendimento:** Apprendimento dei principi basilari della Chimica, in termini di conoscenza delle proprietà generali degli elementi, dei legami che definiscono la struttura dei composti e delle leggi fondamentali che ne regolano le trasformazioni chimiche e fisiche. Esercitazioni pratiche volte alla comprensione dei concetti esposti durante le lezioni frontali.

**Testi consigliati:**

I. Bertini, C. Luchinat, F. Mani: *Chimica*, Ambrosiana, 1972

P. W. Atkins, L. Jones: *Principi di Chimica*, Zanichelli, 2018

M. Speranza: *Chimica Generale e Inorganica*, EdiErmes, 2013

**Modalità di esame:** Prova scritta e prova orale.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

**Program:** Atomic structure. Periodic table of the elements. Chemical bonding (ionic, covalent, metallic). Intermolecular forces and hydrogen bonding. State of matter. Weight relations in chemical reactions. Oxidation number. Balance of chemical reactions. Thermodynamics. State functions. Equilibrium between phases. Homogeneous and heterogeneous chemical equilibria. The thermodynamic equilibrium constant. Solubility equilibria. Electrolytic dissociation. Solutions and colligative properties. Acid-base equilibria in aqueous solution: pH, hydrolysis, buffer solutions, indicators. Redox systems: electrode potentials, batteries, Nernst equation, electrolysis, Faraday's law.

**Learning objectives:** Knowledge of the basic concepts and principles of Chemistry, as concerns the comprehension of the general properties of the elements, of the chemical bonding defining compounds structure and of the fundamental laws that govern chemical and physical transformation of matter. Practical exercises aimed to a deeper understanding of the concepts presented during the lectures.

**Text books:**

I. Bertini, C. Luchinat, F. Mani: *Chimica*, Ambrosiana, 1972

P. W. Atkins, L. Jones: *Principi di Chimica*, Zanichelli, 2018

M. Speranza: *Chimica Generale e Inorganica*, EdiErmes, 2013

**Exam mode:** Written exam.

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## COMPLEMENTI DI ANALISI FUNZIONALE

1° semestre

8 CFU – settore MAT/05 – 64 ore di lezione in aula – supporti: S, T

Docente F. Fidaleo

**Programma:** Elementi basilari della teoria delle distribuzioni in  $\mathbb{R}^n$ , trasformata di Fourier. Gruppi abeliani localmente compatti e dualità di Pontryagin, Convoluzione, analisi di Fourier. Elementi di teoria delle rappresentazioni per gruppi abeliani localmente compatti, e gruppi compatti. Teorema di Peter-Weyl. Teorema di Stone-von Neumann e Teorema SNAG. Cenni alla teoria delle rappresentazioni indotte per gruppi localmente compatti separabili e per gruppi polacchi non localmente compatti.

**Obiettivi di apprendimento:** Nonostante la vastità e la complessità delle potenziali tematiche, il corso si prefigge di fornire alcune importanti nozioni complementari ai programmi usuali dei corsi di base di Analisi Funzionale. Lo scopo primario del corso sarà quello di presentare nella maniera più semplice possibile, senza comunque tralasciare del tutto i risvolti tecnici delle problematiche coinvolte, alcune delle affascinanti tematiche dell'analisi funzionale (vedi programma). La parte finale del corso sarà dedicata (tempo permettendo) a descrivere alcune stimolanti applicazioni a campi della matematica e della fisica quantistica.

**Testi consigliati:**

M. Reed, B. Simon: *Methods of modern mathematical physics I,II*, Academic Press, 2003

R. Lipsman: *Group representations: A survey of some current topics*, Springer, 1974

**Modalità di esame:** Prova orale articolata sulla discussione di una tesina da preparare a cura dello studente, più domande sulle varie parti di programma svolto. Valutazioni in itinere concernenti lo svolgimento degli esercizi assegnati per casa.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

**Program:** Basic elements of the theory of distributions, Fourier transform. Locally compact abelian groups and Pontryagin Duality Theorem. Convolution, Fourier analysis. Representation theory for locally compact abelian groups and compact groups. Peter-Weyl Theorem. Stone-von Neumann Theorem and SNAG Theorem. Complements on induced representations for separable locally compact groups and polish non locally compact groups.

**Learning objectives:** Despite wideness and complexity of the topic, the objective of the course is to provide some relevant complementary argument of the usual themes of Functional Analysis. The primary aim of the course is that to present such complementary tools in the simplest possible way, but without missing the relevant technical details. The final part of the course shall provide some of stimulating applications to other branches of mathematics, and quantum physics.

**Text books:**

M. Reed, B. Simon: *Methods of modern mathematical physics I,II*, Academic Press, 2003

R. Lipsman: *Group representations: A survey of some current topics*, Springer, 1974

**Exam mode:** Verification of the homeworks during the period of the lessons, and in the final lesson that students must deliver at the end of the course of the level reached by the student concerning the basic notions delivered by the teacher during the course.

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## COMPLEMENTI DI FISICA

1° semestre

8 CFU – settore FIS/01 – 64 ore di lezione in aula – supporti: R, T

Docente V. Merlo

**Programma:** Fondamenti della meccanica statistica classica. Teoria degli ensemble, funzioni termodinamiche, applicazioni elementari. Postulati della meccanica quantistica. Equazione di Schrödinger, barriere e buche di potenziale, effetto tunnel. Oscillatore armonico lineare. Momento angolare. Atomo di idrogeno. Spin. Teoria delle perturbazioni. Metodo variazionale. Struttura fine. Particelle identiche. Gas quantistici di Fermi-Dirac e Bose-Einstein. Gas di Fermi. Corpo nero, condensazione di Bose.

**Obiettivi di apprendimento:** Acquisizione di conoscenze di base di Fisica Moderna.

**Testi consigliati:** I testi annasaranno comunicati dal docente all'inizio del corso.

**Modalità di esame:** L'esame consiste in una prova scritta di screening su argomenti svolti durante il corso, al superamento della quale lo studente espone una tesina orale concordata con il docente e avente come oggetto un nuovo argomento di interesse per lo studente.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

 **Program:** Fundamentals of classical statistical mechanics. Ensemble theory, thermodynamics, elementary examples. The postulates of quantum mechanics. The Schrödinger equation, potential wells and barriers, tunnelling. The linear harmonic oscillator. Angular momentum. The Hydrogen atom. Spin. Perturbation theory. The variational principle. Fine structure. Identical particles. Quantum gases, Fermi-Dirac and Bose-Einstein statistics. Degenerate Fermi gas, thermodynamics. Bose gas: black body, B.E. condensation.

**Learning objectives:** The course is tailored to offer an essential knowledge of both statistical and quantum mechanics, intended to tackle more advanced problems in modern physics.

**Text books:** All the information will be given at the beginning of the course.

**Exam mode:** First comes a screening written test based on the topics covered during the term; then an oral exam takes place, where the student is required to discuss a new subject previously agreed upon.

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## COMPLEMENTI DI PROBABILITÀ

1° semestre

8 CFU – settore MAT/06 – 64 ore di lezione in aula – supporti: S, T

Docente B. Torti (codocente P. Baldi)

 **Programma:** Richiami di teoria della misura. Spazi di probabilità astratti. Indipendenza. Legge 0-1 di Kolmogorov. Lemma di Borel-Cantelli. Convergenza quasi certa e in probabilità. Legge dei grandi numeri. Funzioni caratteristiche. Convergenza in legge. Aspettazione condizionale. Martingale a tempo discreto.

**Obiettivi di apprendimento:** Introdurre gli argomenti di base del Calcolo delle probabilità tramite gli strumenti forniti dalla Teoria della Misura in modo da comprendere bene gli aspetti matematici della teoria.

**Testi consigliati:** Verranno distribuiti appunti.

**Modalità di esame:** Prova scritta e orale. L'esame finale consiste in una prova scritta, consistente nella risoluzione di esercizi e una prova orale verte sulle nozioni, i teoremi e le dimostrazioni visti a lezione.

**Bibliografia di riferimento:**

D. Williams: *Probability with martingales*, Cambridge University Press, 1991

P. Billingsley: *Probability and measure*, John Wiley & Sons, 1976

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

 **Program:** Hints on measure Theory. Probability spaces. Independence. Kolmogorov's 0-1 law. Borel-Cantelli Lemma. Almost sure convergence and convergence in probability. Law of large numbers. Characteristic functions. Convergence in law. Conditional expectation. Martingales in discrete time.

**Learning objectives:** To introduce to the basic elements of Probability Calculus through the tools provided by the Measure Theory in order to better understand the mathematical aspects of the theory.

**Exam mode:** Written and oral exam. Final exam will be a written exam consisting on exercises and an oral exam focuses on the notions, theorems and proofs taught.

**Reference bibliography:**

D. Williams: *Probability with martingales*, Cambridge University Press, 1991

P. Billingsley: *Probability and measure*, John Wiley & Sons, 1976

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## COMPLEMENTI DI TOPOLOGIA ALGEBRICA E ANALISI DI DATI

2° semestre

8 CFU – settore MAT/03 – 64 ore di lezione in aula – supporti: T

Docente P. Salvatore

**Programma:** Complessi simpliciali. Complessi di catene. Gruppi di omologia. Sequenze esatte. Omologia persistente. Applicazioni all'analisi dati.

**Obiettivi di apprendimento:** Apprendimento delle nozioni di base di topologia algebrica e dell'analisi topologica dei dati. Capacità di applicare le nozioni apprese per analizzare grandi dati.

**Testi consigliati:**

H. Edelsbrunner, J. Harer: *Computational topology, an introduction*, Duke University

**Modalità di esame:** Esame orale.

**Bibliografia di riferimento:**

Carlsson: *Topology and data*, Bulletin AMS 2009 Volume 46, Number 2, April 2009, pp. 255–308

P. Bubenik: *Pagina web su analisi topologica dei dati*

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

**Program:** Simplicial complexes. Chain complexes. Homology groups. Exact sequences. Persistent homology. Applications of topological data analysis.

**Learning objectives:** Learning basic notions of algebraic topology and topological data analysis. Skill to apply these notions to the analysis of big data.

**Text books:**

H. Edelsbrunner, J. Harer: *Computational topology, an introduction*, Duke University

**Exam mode:** Oral exam.

**Bibliografia di riferimento:**

Carlsson: *Topology and data*, Bulletin AMS 2009 Volume 46, Number 2, April 2009, pp. 255–308

P. Bubenik: *Webpage on Topological Data Analysis*

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## CONTROLLO, DINAMICA ED OTTIMIZZAZIONE

1° semestre

8 CFU – settore MAT/05 – 64 ore di lezione in aula – supporti: R, S, T

Docente P. Cannarsa

**Programma:** CONTROLLO DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE. Osservabilità, controllabilità e stabilità di processi di controllo lineari a coefficienti costanti su spazi euclidei. EQUAZIONI DI EVOLUZIONE. 1. Semigruppì di operatori lineari e continui su spazi di Banach. Generatore infinitesimale. Teorema di Hille-Yosida. Comportamento asintotico. Soluzione del problema di Cauchy-Dirichlet per equazioni paraboliche del secondo ordine. 2. Operatori dissipativi e massimali dissipativi. Teoremi di Lumer-Phillips. Soluzione del problema di Cauchy-Dirichlet per equazioni iperboliche del secondo ordine. 3. Aggiunto di un operatore lineare nel caso Hilbertiano. Operatori simmetrici e autoaggiunti. Teorema di Stone. Applicazione all'equazione di Schrödinger. 4. Il problema di Cauchy non omogeneo. Il caso degli operatori autoaggiunti e dissipativi. CONTROLLO DI EQUAZIONI PARABOLICHE DEL SECONDO ORDINE. 1. Il problema della controllabilità per equazioni di evoluzione. Nozioni di osservabilità. 2. Controllabilità a zero con il metodo dei momenti. 3. Stime di Carleman per equazioni ellittiche e paraboliche del secondo ordine. Applicazione all'osservabilità. 4. Il modello di Budyko-Sellers in climatologia. CONTROLLO DI EQUAZIONI IPERBOLICHE DEL SECONDO ORDINE. 1. Osservabilità e controllabilità dell'equazione delle corde vibranti con la formula di d'Alembert. 2. Studio delle equazioni di evoluzione del secondo ordine con il metodo di Fourier. 3. Osservabilità di modelli elastici con il metodo dei moltiplicatori. 4. Controllabilità di modelli elastici con il metodo HUM. 5. Stabilizzazione di modelli elastici. APPENDICE: RICHIAMI SUGLI SPAZI DI SOBOLEV. 1. Spazi di Sobolev su domini limitati nel caso hilbertiano. 2. Duali di spazi di Sobolev.

**Obiettivi di apprendimento:** Acquisire metodologie teoriche e competenze computazionali sul controllo di equazioni a derivate parziali lineari, di tipo evolutivo.

**Testi consigliati:**

P. Cannarsa, F. Gazzola: *Dynamic Optimization for Beginners, with prerequisites and applications*, EMS Publishing House, 2021.

P. Cannarsa: *Lecture notes on evolution equations*, dispense disponibili on-line

**Modalità di esame:** Prova orale in cui il candidato dimostra di conoscere definizioni, teoremi, le dimostrazioni fondamentali e di saper combinare le nozioni apprese in modo originale.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

 **Program:** CONTROL OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS. Observability, controllability and stabilizability of linear control processes with constant coefficients on Euclidean spaces. EVOLUTION EQUATIONS. 1. Semigroups of bounded linear operators on Banach spaces. Infinitesimal generator. The Hille-Yosida theorem. Asymptotic behaviour. Solution of the Cauchy-Dirichlet problem for second order linear parabolic equations. 2. Dissipative and maximal dissipative operators. Lumer-Phillips theorems. Solution of the Operatori dissipativi e massimali dissipativi. Teoremi di Lumer-Phillips. Soluzione del problema di Cauchy-Dirichlet problem for second order linear hyperbolic equations. 3. Hilbertian adjoint of a linear operator. Symmetric and self-adjoint operators. Stone's theorem. Application to Schrödinger's equation. 4. The nonhomogeneous Cauchy problem. CONTROL OF SECOND ORDER PARABOLIC EQUATIONS. 1. Notions of controllability and observability for first order evolution equations. 2. Null controllability via the moment method. 3. Carleman estimates for second order elliptic and parabolic equations. Application to observability. 4. The Budyko-Sellers model in climatology. CONTROL OF SECOND ORDER HYPERBOLIC EQUATIONS. 1. Observability and controllability of vibrating strings by d'Alembert's formula. 2. Second order evolution equations via Fourier's method. 3. Observability of vibrating bodies via the multiplier method. 4. Controllability of vibrating bodies via the Hilbert Uniqueness Method. 5. Stabilization of vibrating bodies. APPENDIX: SOBOLEV SPACES. 1. Sobolev spaces on a bounded domain in the Hilbertian case. 2. Duals of Sobolev spaces.

**Learning objectives:** To acquire theoretical methods and computational skills for control of partial differential equations of evolutionary type.

**Text books:**

P. Cannarsa, F. Gazzola: *Dynamic Optimization for Beginners, with prerequisites and applications*, EMS Publishing House, 2021

P. Cannarsa: *Lecture notes on evolution equations*, notes available on-line

**Exam mode:** In the oral exam the candidate has to show a good control of definitions, major results and some of their proofs.

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

**EAM 1 - TEORIA SPETTRALE**

2° semestre

8 CFU – settore MAT/05 – 64 ore di lezione in aula – supporti: S, T

Docente T. Isola

 **Programma:** Algebre di Banach. Ideali massimali. Calcolo funzionale analitico. Algebre di Banach commutative e trasformazione di Gelfand.  $C^*$ -algebre. Elementi positivi, e funzionali positivi.  $C^*$ -algebre commutative e teorema di Gelfand-Naimark. Calcolo funzionale continuo. Stati e rappresentazioni di una  $C^*$ -algebra. Rappresentazione GNS. Algebre di von Neumann. Teoremi di densità di von Neumann e di Kaplanski. Algebre abeliane massimali. Calcolo funzionale Boreliano. Il teorema spettrale per operatori autoaggiunti, limitati e illimitati.

**Obiettivi di apprendimento:** Apprendere alcune nozioni elementari delle algebre di operatori.

**Testi consigliati:**

R. Kadison, J. R. Ringrose: *Fundamentals of the theory of operator algebras 1*, Academic Press, 1983

J. B. Conway: *A course in functional analysis*, Springer, 1990

G. K. Pedersen: *Analysis now*, Springer, 1989

**Modalità di esame:** Prova orale. Discussione dei principali risultati del corso, e di una tesina su un argomento non trattato durante il corso.

 **Program:** Banach algebras. Maximal ideals. Holomorphic functional calculus. Commutative Banach algebras and Gelfand transform.  $C^*$ -algebras. Positive elements and positive functionals. Commutative  $C^*$ -algebras and Gelfand-Naimark theorem. Continuous functional calculus. States and representations of a  $C^*$ -algebra. GNS representation. Von Neumann algebras. Von Neumann and Kaplanski density theorems. Maximal abelian von Neumann algebras. Borel functional calculus. Spectral theorem for self-adjoint operators, bounded and unbounded.

**Learning objectives:** To learn basic notions in the field of operator algebras.

**Text books:**

R. Kadison, J. R. Ringrose: *Fundamentals of the theory of operator algebras 1*, Academic Press, 1983

J. B. Conway: *A course in functional analysis*, Springer, 1990

G. K. Pedersen: *Analysis now*, Springer, 1989

**Exam mode:** Oral exam. Each student will discuss the most important results presented during the lectures, and a brief project on some results not treated in the lectures.

---

## EAM 2 - SPAZI DI SOBOLEV E SOLUZIONI DEBOLI

2° semestre

8 CFU – settore MAT/05 – 64 ore di lezione in aula – supporti: R, S, T

Docente C. Sinestrari

 **Programma:** Teoremi di compattezza in spazi di funzioni. Derivate deboli e distribuzioni. Spazi di Sobolev e loro proprietà. Teoremi di immersione. Formulazione debole delle equazioni ellittiche e teoremi di esistenza in spazi di Sobolev. Regolarità delle soluzioni. Principio di massimo per equazioni ellittiche e paraboliche. Semigruppdi operatori ed esistenza di soluzioni deboli per equazioni di evoluzione.

**Obiettivi di apprendimento:** Insegnare i metodi di base della teoria moderna delle equazioni differenziali alle derivate parziali, applicando gli strumenti dell'analisi funzionale e la formulazione debole delle equazioni in spazi di Sobolev.

**Testi consigliati:**

H. Brezis: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010

L. C. Evans: *Partial Differential Equations*, AMS, 1998

**Modalità di esame:** Nella prova orale verranno chieste le definizioni, i teoremi e gli esempi visti nel corso, e alcune delle principali dimostrazioni.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

 **Program:** Compactness theorems in function spaces. Weak derivatives and distributions. Sobolev spaces and their basic properties. Embedding theorems. Weak formulation of elliptic equations and existence theorems in Sobolev spaces. Applications of Fredholm theory and of the spectral decomposition of compact operators. Regularity of solutions. Maximum principle for elliptic and parabolic equations. Operator semigroups and existence of weak solutions of evolution equations.

**Learning objectives:** Teaching the basic methods of the modern theory of partial differential equations, by using the tools of functional analysis and the weak formulation of the equations in Sobolev spaces.

**Text books:**

H. Brezis: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010

L. C. Evans: *Partial Differential Equations*, AMS, 1998

**Exam mode:** In the oral exam the candidate is required to show knowledge of the definitions, the theorems the examples and of the main proofs seen in the course.

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## ELEMENTI DI ANALISI NUMERICA

1° semestre

8 CFU – settore MAT/08 – 64 ore di lezione in aula

Docente C. Di Fiore

■ **Programma:** Polinomi di Bernoulli, formula di Eulero-Maclaurin, metodi numerici per il calcolo degli autovalori e degli autovettori di matrici, metodo delle potenze, teoria di Perron-Frobenius, l'importanza dei nodi nei grafi orientati (page-rank), metodi di tipo differenze finite per la risoluzione di problemi differenziali e/o migliore approssimazione di una matrice in algebre di bassa complessità.

**Obiettivi di apprendimento:** Approfondire alcuni argomenti specifici della Matematica Numerica.

**Testi consigliati:** Appunti del docente e di ex-studenti.

**Modalità di esame:** Prova scritta e orale.

**Bibliografia di riferimento:**

D. Bertaccini, C. Di Fiore, P. Zellini: *Complessità e Iterazione - Percorsi, matrici e algoritmi veloci nel calcolo numerico*, Bollati Boringhieri, 2013

R. S. Varga: *Matrix Iterative Analysis*, Springer, 2000 (per teoria di Perron-Frobenius)

P. Berkhin: *A Survey on PageRank Computing (per page-rank)*, Internet Mathematics Vol. 2, 2005

Per gli argomenti rimanenti: files sul sito del docente e un qualsiasi buon libro di Matematica Numerica

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

🇬🇧 **Program:** Bernoulli polynomials, Eulero-Maclaurin formula, numerical methods for matrix eigenvalues and eigenvectors computation, power method, Perron-Frobenius theory, the authority of the nodes in oriented graphs (page-rank), difference methods for solving differential problems and/or best approximation of a matrix in low complexity algebras.

**Learning objectives:** Investigate some specific topics of Numerical Mathematics.

**Text books:** Notes of the teacher and of ex-students.

**Exam mode:** Written and oral exam.

**Reference bibliography:**

D. Bertaccini, C. Di Fiore, P. Zellini: *Complessità e Iterazione - Percorsi, matrici e algoritmi veloci nel calcolo numerico*, Bollati Boringhieri, 2013

R. S. Varga: *Matrix Iterative Analysis*, Springer, 2000 (for Perron-Frobenius theory)

P. Berkhin: *A Survey on PageRank Computing (for page-rank)*, Internet Mathematics Vol. 2, 2005

For the remaining topics: files on teacher web-site and any good book of Numerical Mathematics

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

## ELEMENTI DI PROBABILITÀ 1

2° semestre

8 CFU – settore MAT/06 – 64 ore di lezione in aula – supporti: T

**Docente B. Pacchiarotti**

■ **Programma:** Si tratta di un corso di calcolo stocastico. In estrema sintesi: moto Browniano; martingale a tempo continuo; integrali stocastici; formula di Ito; equazioni differenziali stocastiche e processi di Markov.

**Obiettivi di apprendimento:** Arrivare alla conoscenza, con il supporto di libri di testo avanzati, di alcuni argomenti di calcolo stocastico.

**Testi consigliati:**

P. Baldi: *Stochastic calculus*, Springer, 2017

**Modalità di esame:** Le conoscenze degli studenti saranno verificate attraverso una prova scritta strutturata in esercizi, che avranno come argomenti principali: 1) moto Browniano; 2) integrali stocastici; 3) processi di Markov; 4) equazioni differenziali stocastiche. La prova orale sarà sui teoremi e le dimostrazioni visti a lezione.

🇬🇧 **Program:** This is a stochastic calculus course. In a nutshell: Brownian motion; continuous time martingale; stochastic integrals; Ito's formula; stochastic differential equations and Markov processes.

**Learning objectives:** To get to the knowledge, with the support of advanced textbooks, of some stochastic calculus topics.

**Text books:**

P. Baldi: *Stochastic calculus*, Springer, 2017

**Exam mode:** Learning achievements will be verified by means of a written exam based on questions/exercises, with the following main topics: 1) Brownian motion; 2) stochastic integrals; 3) Markov processes; 4) stochastic differential equations. The oral exam will be on the theorems and proofs seen in class.

---

## EQUAZIONI DIFFERENZIALI

2° semestre

8 CFU – settore MAT/05 – 64 ore di lezione in aula – supporti: R, S, T

Docente D. Bartolucci

**Programma:** Introduzione alle equazioni differenziali alle derivate parziali: strategie risolutive delle equazioni di Poisson, del calore e delle onde. Problemi ellittici lineari, teorema di Lax-Milgram, autovalori. Problemi ellittici semilineari, metodi risolutivi variazionali e non variazionali. Applicazioni a problemi di geometria conforme e meccanica statistica dei fluidi di Eulero turbolenti.

**Obiettivi di apprendimento:** Acquisire familiarità con alcuni metodi classici e moderni per lo studio delle equazioni differenziali alle derivate parziali. In particolare verranno considerate equazioni nonlineari di tipo ellittico. La comprensione di tali concetti, metodi e teorie, permetterà di affrontare anche contesti potenzialmente differenti da quelli visti a lezione.

**Testi consigliati:**

L. C. Evans: *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 2010

A. Ambrosetti, G. Prodi: *A Primer of Nonlinear Analysis*, Cambridge University Press, 1995

**Modalità di esame:** Prova orale.

**Bibliografia di riferimento:**

H. Brezis: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010

D. Gilbarg, N. S. Trudinger: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Birkhäuser Springer-Verlag, 2001

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

 **Program:** Introduction to partial differential equations: some techniques to solve the Poisson, heat and wave equations. Linear elliptic problems, Lax-Milgram theorem, eigenvalues. Semilinear elliptic problems, variational and non variational methods. Applications to problems arising in conformal geometry and statistical mechanics of turbulent Euler flows.

**Learning objectives:** To get familiar with some classical and modern methods to study partial differential equations. In particular nonlinear differential equations of elliptic type are considered. The comprehension of such concepts, methods, and theories will enable students to solve problems even in different contexts from those analyzed in class.

**Text books:**

L. C. Evans: *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 2010

A. Ambrosetti, G. Prodi: *A Primer of Nonlinear Analysis*, Cambridge University Press, 1995

**Exam mode:** Oral exam.

**Reference bibliography:**

H. Brezis: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010

D. Gilbarg, N. S. Trudinger: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Birkhäuser Springer-Verlag, 2001

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## FISICA COMPUTAZIONALE

1° semestre

9 CFU – settore FIS/01 – 72 ore di lezione in aula

Docente A. Pecchia

**Programma:** Fondamentali di numerica, errori di troncamento e arrotondamento. Equazioni differenziali ordinarie (ODE) - Analisi di Stabilità. - Metodi di soluzione espliciti e impliciti - Runge-Kutta e Dormand-Prince ODE5(4) e confronto con ODE8(7) - Metodi Gear's. - Applicazioni: Attrattori strani

e caos, pendolo caotico e biforcazioni, esponenti di Lyapunov e frattalità - Introduzione alla dinamica molecolare - sviluppo di un simulatore - Applicazioni: studio di un liquido di Lennard-Jones Soluzione di equazioni lineari metodi diretti ed iterativi (CG, GMRES). Equazioni alle derivate parziali (PDE). - Classificazione in equazioni Ellittiche, Paraboliche ed Iperboliche - Discretizzazioni e stabilità (FDM, FVM, FEM). - Soluzione numerica equazioni di Poisson e di Fourier. - Soluzione numerica di equazioni di Navier-Stokes (Finite Volume Method).

**Obiettivi di apprendimento:** Gli studenti acquisiscono la capacità di risolvere problemi fisici utilizzando il computer come strumento numerico. Durante il corso vengono affrontati esempi non banali di soluzioni numeriche di modelli fisici, tra cui la risoluzione di equazioni differenziali ordinarie (ODE) e alle derivate parziali (PDE). In particolare vengono discussi i problemi posti dalla loro soluzione numerica originati dalle limitazioni dell'aritmetica finita dei calcolatori e come mitigare le instabilità numeriche associate. Risolutori ODE di diverso tipo vengono applicati all'analisi di attrattori strani e traiettorie caotiche. Vengono illustrati metodi per il calcolo dei punti critici e delle biforcazioni, numeri di Feigenbaum, il calcolo degli esponenti di Lyapunov e della dimensione frattale di diversi attrattori. Particolarmente rivolto agli studenti di Fisica Teorica e di Fisica Statistica, viene sviluppato un modello atomistico di dinamica molecolare classica, applicato allo studio di un gas di Lennard Jones. In particolare viene dimostrata il meccanismo di transizione di fase solido-liquido ed il calcolo del coefficiente di diffusione. Nell'ultima parte del corso vengono discusse le equazioni PDE fino al secondo ordine, ellittiche (e.g. equazione di Poisson), paraboliche (eq. del calore) ed iperboliche (advection-diffusion e Navier-Stokes). Di queste viene discussa la discretizzazione ed i metodi di stabilizzazione. Per poter risolvere tali equazioni vengono introdotti i solutori iterativi. Il corso si prefigge anche di insegnare i rudimenti di programmazione scientifica in ambiente Linux, l'utilizzo di librerie numeriche esistenti e prospettive nello sviluppo di computazione parallela. Alla fine del corso agli studenti viene assegnato un problema pratico da risolvere sviluppando un opportuno programma sul quale vengono valutati. Il corso di Fisica Computazionale risponde agli obiettivi formativi del corso di fisica, in particolare rafforza le conoscenze teoriche di base e la capacità di analisi critica di eventuali risultati errati a causa di errori tecnici di programmazione. Rafforza la capacità critica e di applicazione delle conoscenze acquisite, in particolare durante lo sviluppo del lavoro di tesina in preparazione dell'esame, permettendo anche di raffinare le abilità comunicative che vengono testate in sede d'esame grazie alla presentazione del lavoro svolto e dei risultati ottenuti. Gli argomenti trattati sono spesso proiettati al limite attuale della ricerca e dello sviluppo, dando la possibilità agli studenti di ricercare letteratura scientifica e di sviluppare una capacità critica e di apprendimento autonoma in vista di un eventuale dottorato.

**Testi consigliati:**

R. Landau, M. Paez, C. Bordeianu: *Computational Physics 2nd ed*, WILEY-VCH, 2007

R. Fitzpatrick: *Computational Physics*, Univ. Texas Austin, 2015

K. W. Morton, D. F. Mayers: *Numerical Solution of Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, 2012

L. Barone, E. Morinari, G. Organtini, F. Ricci-Tresenghi: *Programmazione scientifica*, Pearson Education, 2006

M. Metcald, J. Reid, M. Cohen: *Modern Fortran Explained*, Oxford University Press, 2018

**Modalità di esame:** Per valutare il reale apprendimento viene assegnato un problema da risolvere mediante implementazione numerica che poi gli studenti discutono all'esame sotto forma di una tesina. Spesso il problema viene discusso individualmente con ciascun studente per assecondarne interessi e orientamenti particolari. All'esame viene discusso il lavoro di tesina e vengono fatte domande sul programma del corso.

 **Program:** Introduction to numerics, roundoff and truncation errors. Ordinary differential equations (ODE) - Stability - Explicit and implicit methods. - Runge-Kutta e Dormand-Prince ODE5(4) and ODE8(7) Gear's Methods. - Applications: Strange attractors and caos, caotic pendulum and bifurcation, Lyapunov exponents and fractality - Introduction to molecular dynamics - Development of an efficient simulator O(N). - Applications: study of a Lennard-Jones liquid (phase transitions, diffusivity) - Solutions of linear systems: direct and iterative methods (CG, GMRES). Partial differential equations (PDE). - Elliptic, Parabolic and Hyperbolic classifications - Discretizations and stability (FDM, FVM, FEM). - Numerical solutions of Poisson and Fourier Heat equations. - Numerical Solutions of Navier-Stokes equations (Finite Volume Method).

**Learning objectives:** Students acquire the ability to solve physical problems with the help of a computer as numerical instrument. During this lecture course non-trivial examples of numerical solutions to physical models are tackled, among which numerical solutions to Ordinary Differential Equations (ODE) and

Partial differential equations (PDE). In particular problems related to discretizations and finite precision arithmetics are presented and solutions discussed. ODE solvers are developed and applied to analyze strange attractors and chaotic trajectories. Methods to compute critical points, bifurcations, Feigenbaum numbers, Lyapunov exponents and fractal dimensions are presented and discussed. Particularly oriented to theorist in physics and statistical physics, a classical molecular dynamics is developed and applied to study the Lennard-Jones gas, modelling solid-liquid phase transition and computing radial distributions functions and self-diffusion coefficients. In the last part of the course, solutions to PDEs are tackled, either elliptic (e.g., Poisson equation), parabolic (e.g. heat equation) or hyperbolic (advection and Navier-Stokes). In all cases discretization and stabilization methods are presented. In order to enable solutions of such equations, iterative methods such as Conjugate-Gradients and Krylov subspace methods are presented and implemented. Additionally, the course aims at teaching the basics of scientific programming under Linux and using a high level programming language such as Modern Fortran. How to compile and link external numerical libraries and some rudiments of parallel programming (MPI/OpenMP). At the end the students are given a problem to be solved developing a code. This is used as part of the evaluation process in the final exam. Computational Physics addresses the general objective of the bachelor course in Physics. In particular it strengthens basic theoretical knowledge and capability of analysis of erroneous results due to implementation mistakes. It strengthens critical abilities of acquired knowledge, particularly during the development of the final homework, also giving the chance to refine communication skills since the work and results must be illustrated at the exam under the form of a presentation. The treated subjects are frequently projected to the research forefront and development, giving the possibility to make literature searches and developing critical abilities and learning skills, also in view of a possible postgraduate stage.

**Text books:**

R. Landau, M. Paez, C. Bordeianu: *Computational Physics 2nd ed*, WILEY-VCH, 2007

R. Fitzpatrick: *Computational Physics*, Univ. Texas Austin, 2015

K. W. Morton, D. F. Mayers: *Numerical Solution of Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, 2012

L. Barone, E. Morinari, G. Organtini, F. Ricci-Tresenghi: *Programmazione scientifica*, Pearson Education, 2006

M. Metcald, J. Reid, M. Cohen: *Modern Fortran Explained*, Oxford University Press, 2018

**Exam mode:** Students are evaluated on a homework based on a physical problem that requires implementation of an algorithm or anything of computational nature. The work is presented in the final examination, together with additional questions on the subjects treated over the course.

## FISICA DEI FLUIDI COMPLESSI E TURBOLENZA

1° semestre

8 CFU – settore FIS/01 – 64 ore di lezione in aula

**Docente M. Chinappi**

- **Programma:** Equazioni fondamentali. Equazione di conservazione della massa e della quantità di moto. Simmetria tensore degli sforzi. Relazione costitutiva fluidi newtoniani. Equazione di Navier-Stokes per flussi incomprimibili. Condizioni al bordo. Condizione di Navier e lunghezza di scorrimento. Forma adimensionale equazioni di Navier-Stokes. Numero di Reynolds. Equazione di Stokes, linearità e simmetrie. Cenni al teorema di Purcell sul nuoto dei microorganismi. Flusso di Poiseuille. Moto Browniano. Diffusione di particelle in un fluido. Equazione di conservazione. Equazione di Langevin per il moto di un singolo colloide. Teorema di fluttuazione dissipazione. Metodi numerici per equazioni differenziali stocastiche. Elettroidrodinamica. Sistema completo di equazioni per trasporto specie cariche. Equazione di Poisson-Boltzmann. Lunghezza di Debye. Flusso elettroosmotico ideale in un canale piano. Flussi elettroosmotici in nanopori. Applicazioni per biosensori e blue energy. Tensione superficiale e dinamica delle interfacce. Definizione di tensione superficiale. Equazione di Laplace. Equazione di Young e angolo di contatto. Stati di Cassie e di Wenzel. Legge di Jurin. Lunghezza di capillarità. Instabilità Taylor-Rayley. Cenni ai modelli continui per flussi bifase (Continuum force model). Cenni su tecniche di simulazione atomistica. Turbolenza. Descrizione in spazio di Fourier. Produzione, trasferimento e dissipazione di energia cinetica turbolenta. Teoria di Kolmogorov per turbolenza omogenea e isotropa. Scala di Kolmogorov. Equazioni mediate alla Reynold e problema della chiusura.

**Obiettivi di apprendimento:** Il corso fornisce un'introduzione su argomenti avanzati di dinamica dei fluidi. Il filo conduttore del corso è la complessità e le metodologie per affrontarla. Gli esempi selezionati saranno scelti in un'ottica multiscala (diverse scale spaziali e temporali rilevanti per l'analisi del fenomeno) e multifisica (diversi effetti contribuiscono alla fenomenologia). In particolare, verranno trattati i seguenti argomenti: moti turbolenti per fluidi semplici, soluzioni colloidali di particelle micrometriche (moto Browniano), flussi bifase ed elettroidrodinamica. Nel corso vengono forniti gli strumenti concettuali e analitici per descrivere fluidi e flussi complessi.

**Testi consigliati:**

U. Frisch: *Turbulence: the legacy of A. N. Kolmogorov*, Cambridge University Press, 1995

S. B. Pope: *Turbulent flows*, Cambridge University Press, 2000

M. San Miguel, R. Toral: *Stochastic effects in physical systems. In Instabilities and nonequilibrium structures VI*, Springer, 2000, Dordrecht (pp. 35-127)

**Modalità di esame:** Prova orale.

**Bibliografia di riferimento:**

P. K. Kundu, I. M. Cohen: *Fluid Mechanics*, Fourth Edition, Elsevier, 2008

H. Bruus: *Theoretical Microfluidics*, Oxford University Press, 2008

P. De Gennes, F. Brochard-Wyart, D. Quéré: *Capillarity and wetting phenomena: drops, bubbles, pearls, waves*, Springer, 2004

 **Program:** Fundamental equations. Conservation of mass and momentum. Stress tensor symmetry. Newtonian fluids constitutive relation. Navier-Stokes equation for incompressible flows. Boundary conditions. Navier condition and slip length. Dimensionless form of the Navier-Stokes equations. Reynolds number. Stokes equation, linearity and symmetries. Notes on Purcell's theorem concerning the swimming of microorganisms. Poiseuille flow. Brownian Motion. Diffusion of particles in a fluid. Conservation equation. Langevin equation for the motion of a single colloid. Fluctuation-dissipation theorem. Numerical methods for stochastic differential equations. Electrohydrodynamics. Complete system of equations for transporting charged species. Poisson-Boltzmann equation. Debye length. Ideal electroosmotic flow in a plane channel. Electroosmotic flows in nanopores. Applications for biosensors and blue energy. Surface and dynamic tension of the interfaces. Definition of surface tension. Laplace equation. Young's equation and contact angle. Cassie and Wenzel states. Jurin's law. Capillary length. Taylor-Rayley instability. Overview on continuous models for two-phase flows (Continuum force model). Atomistic simulation techniques. Turbulence. Description in Fourier space. Production, transfer and dissipation of turbulent kinetic energy. Kolmogorov theory for homogeneous and isotropic turbulence. Kolmogorov scale. Reynold-averages equations.

**Learning objectives:** The course provides an introduction to advanced topics in fluid dynamics. The common thread of the course is the complexity and the methodologies to face it. The selected examples will be chosen from a multiscale perspective (different spatial and temporal scales relevant to the analysis of the phenomenon) and multi-physics (different effects contribute to the phenomenology). In particular, the following topics will be covered: turbulent motions for simple fluids, colloidal solutions of micrometric particles (Brownian motion), two-phase and electro-dynamic flows. The course provides conceptual and analytical tools to describe complex fluids and flows.

**Text books:**

U. Frisch: *Turbulence: the legacy of A. N. Kolmogorov*, Cambridge University Press, 1995

S. B. Pope: *Turbulent flows*, Cambridge University Press, 2000

M. San Miguel, R. Toral: *Stochastic effects in physical systems. In Instabilities and nonequilibrium structures VI*, Springer, 2000, Dordrecht (pp. 35-127)

**Exam mode:** Oral exam.

**Reference bibliography:**

P. K. Kundu, I. M. Cohen: *Fluid Mechanics*, Elsevier, 2008

H. Bruus: *Theoretical Microfluidics*, Oxford University Press, 2008

P. De Gennes, F. Brochard-Wyart, D. Quéré: *Capillarity and wetting phenomena: drops, bubbles, pearls, waves*, Springer, 2004

## GEOMETRIA ALGEBRICA

2° semestre

8 CFU – settore MAT/03 – 64 ore di lezione in aula – supporti: T

Docente G. Pareschi

- Programma:** Si tratta di un'introduzione alla Geometria Algebrica basata sulla teoria delle curve. Consiste in : 1) una parte iniziale sulle superfici di Riemann compatte/curve proiettive lisce complesse comprendente una trattazione delle 1-forme olomorfe e meromorfe e del Teorema di Riemann-Roch; 2) trattazione degli stessi argomenti della parte nel contesto delle curve su un campo qualsiasi (algebricamente chiuso e successivamente non-algebricamente chiuso; 3) speciale attenzione verrà dedicata ai tori complessi/curve ellittiche, e agli aspetti aritmetici.

**Obiettivi di apprendimento:** Apprendimento di alcuni aspetti di Geometria Algebrica.

**Testi consigliati:**

R. Miranda: *Algebraic curves and Riemann Surfaces*, American Mathematical Society, 1995

J. H. Silverman: *The Arithmetic of Elliptic Curves*, Springer-Verlag, 1986

**Modalità di esame:** Prova orale. Esposizione rigorosa degli argomenti del corso.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

- Program:** The course will consist to a introduction to Algebraic Geometry based on curve theory. It will consist of: 1) a first part on compact Riemann surfaces/smooth projective complex curves, including holomorphic and meromorphic 1-forms and the Riemann-Roch theorem ; 2) a second part on the same topics in the much broader context of smooth projective curves defined over any field, algebraically closed and not algebraically closed ; 3) special emphasis will be on complex tori and elliptic curves, and to some arithmetic aspects.

**Learning objectives:** Learning some aspects of Algebraic Geometry.

**Text books:**

R. Miranda: *Algebraic curves and Riemann Surfaces*, American Mathematical Society, 1995

J. H. Silverman: *The Arithmetic of Elliptic Curves*, Springer-Verlag, 1986

**Exam mode:** Oral exam. Rigorous exposition of some topics of the course.

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

## GEOMETRIA COMPLESSA

2° semestre

8 CFU – settore MAT/03 – 64 ore di lezione in aula

Docente S. Trapani (codocente F. Bracci)

- Programma:** Richiami su varietà differenziabili e geometria Riemanniana, richiami su coomologia di De Rham, forme armoniche, teorema di Hodge su varietà differenziabili, varietà complesse, varietà di Kahler. Richiami sul teorema di Dolbeau, coomologia delle  $(p,q)$  forme e decomposizione di Hodge per le varietà di Kahler. Fibrati in rette e teorema di immersione di Kodaira.

**Testi consigliati:**

J. Demailly: *complex analytic and differential geometry*, Université de Grenoble I, 1997

C. Voisin: *Hodge theory and complex algebraic geometry*, Centre de Mathématiques de Jussieu, Paris

**Modalità di esame:** Prova orale.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

- Program:** Summary of differentiable manifolds, Riemannian geometry, and De Rham cohomology. Harmonic forms and Hodge theory on differentiable manifolds. Complex manifolds and Kahler manifolds. Summary on Dolbeau cohomology, Hodge theory for Kahler manifolds, line bundles and Kodaira embedding theorem.

**Text books:**

J. Demailly: *complex analytic and differential geometry*, Université de Grenoble I, 1997

C. Voisin: *Hodge theory and complex algebraic geometry*, Centre de Mathématiques de Jussieu, Paris

**Exam mode:** Oral exam.

In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.

---

## GEOMETRIA DIFFERENZIALE

2° semestre

8 CFU – settore MAT/03 – 64 ore di lezione in aula – supporti: R, T

Docente A. Iannuzzi (codocente F. Bracci)

**Programma:** Gruppi topologici. Elementi della teoria di Lie, mappa esponenziale, rappresentazioni aggiunte. Varietà Riemanniane. Connessioni affini, connessione di Levi Civita. Geodetiche e mappa esponenziale riemanniana. Nozioni di curvatura. Campi di Jacobi. Varietà Riemanniane complete, teoremi di Hopf e di Hadamard. Spazi a curvatura sezionale costante. Teorema di Bonnet-Myers: la topologia dei gruppi di Lie con metrica bi-invariante.

**Obiettivi di apprendimento:** Elementi di teoria dei gruppi di Lie e di geometria Riemanniana.

**Testi consigliati:**

M. P. Do Carmo: *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, 1992

W. M. Boothby: *An introduction to differentiable manifold and Riemannian Geometry*, Academic Press, 1975

S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine: *Riemannian Geometry*, Springer, 2004

**Modalità di esame:** Prova orale.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

**Program:** Topological groups. Elements of Lie theory, exponential map, adjoint representations. Riemannian manifolds. Affine and Levi Civita connections. Geodesic and Riemannian exponential map. Notions of curvature. Jacobi fields. Complete Riemannian manifolds. Hopf and Hadamard's theorems. Spaces of constant sectional curvature. Bonnet-Myers theorem and the topology of Lie groups admitting a bi-invariant metric.

**Learning objectives:** Theory of Lie groups and Riemannian geometry.

**Text books:**

M. P. Do Carmo: *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, 1992

W. M. Boothby: *An introduction to differentiable manifold and Riemannian Geometry*, Academic Press, 1975

S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine: *Riemannian Geometry*, Springer, 2004

**Exam mode:** Oral exam.

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## HIGH DIMENSIONAL PROBABILITY AND STATISTICS

2° semestre

8 CFU – settore MAT/06 – 64 ore di lezione in aula – supporti: R, T

Docente M. Salvi (codocente S. Vigogna)

**Programma:** Verranno trattati argomenti scelti di probabilità e statistica in alta dimensione. Verrà dato particolare risalto all'applicazione di tecniche avanzate a problemi applicati in diversi campi. Gli argomenti principali del corso includono: disuguaglianze di concentrazione; vettori aleatori in alta dimensione; applicazioni ai grafi aleatori; matrici aleatorie; applicazioni a problemi in computer e data science; processi stocastici gaussiani e subgaussiani; chaining; applicazioni allo statistical learning; metric entropy; principal component analysis in alta dimensione.

**Obiettivi di apprendimento:** Il corso si prefigge di fornire agli studenti strumenti avanzati della moderna teoria delle probabilità e della statistica in alta dimensione e di illustrarne numerose applicazioni (tra cui machine learning, statistical learning e data science). L'obiettivo è quello di rendere gli studenti indipendenti nell'utilizzo di tali tecniche in modo che possano a loro volta adattare a problemi ed a contesti differenti.

**Testi consigliati:**

R. Vershynin: *High-Dimensional Probability: An Introduction with Applications in Data Science*, Cambridge University Press, 2018

M. J. Wainwright: *High-Dimensional Statistics: A Non-Asymptotic Viewpoint*, Cambridge University Press, 2019

**Modalità di esame:** Le conoscenze apprese verranno verificate attraverso un colloquio orale ed alla presentazione di un progetto.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

 **Program:** We will treat a selection of topics in high dimensional probability and statistics. We will put a particular emphasis on the application of advanced techniques to problems arising from different fields. The main arguments of the course include: concentration inequalities; random vectors in high dimension; applications to random graphs; random matrices; applications in computer science and data science; gaussian and sub-gaussian stochastic processes; chaining; applications to statistical learning; metric entropy; principal component analysis in high dimension.

**Learning objectives:** In this course we will learn advanced tools from modern probability theory and statistics in high dimension and apply them to problems in a number of fields (such as machine learning, statistical learning and data science). The final goal is to make the student able to master those tools in order to flexibly apply them in different contexts.

**Text books:**

R. Vershynin: *High-Dimensional Probability: An Introduction with Applications in Data Science*, Cambridge University Press, 2018

M. J. Wainwright: *High-Dimensional Statistics: A Non-Asymptotic Viewpoint*, Cambridge University Press, 2019

**Exam mode:** The evaluation will consist of an oral examination and the presentation of a project.

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

## INTRODUZIONE AI PROCESSI ALEATORI

**1° semestre**

8 CFU – settore SECS-S/01 – 64 ore di lezione in aula – supporti: R, S, T

**Docente D. Marinucci**

 **Programma:** Introduzione - stazionarietà debole e forte. Richiami di spazi di Hilbert. Processi ARMA - condizioni di esistenza e stazionarietà, proprietà funzioni di covarianza. Teorema di Herglotz-Bochner; densità e distribuzione spettrale. Filtri lineari; densità spettrale processi ARMA. Costruzione degli integrali stocastici; teorema di rappresentazione spettrale. Stima della densità spettrale: il periodogramma e le sue proprietà asintotiche. Whittle likelihood. Processi nonstazionari: convergenza debole in spazi di funzioni, processi a radici unitarie, tests. Campi aleatori isotropi sulla sfera: rappresentazione spettrale.

**Obiettivi di apprendimento:** Il corso fornisce una introduzione all'analisi spettrale dei processi stazionari; vengono affrontati anche argomenti più specialistici, quali i processi a radici unitarie ed i campi aleatori sulla sfera.

**Testi consigliati:**

P. J. Brockwell, R. A. Davis: *Time Series Models*, Springer, 1991

**Modalità di esame:** Prova scritta e orale.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

 **Program:** Weak and strong stationarity. Background on Hilbert spaces. ARMA processes, covariance functions, Herglotz-Bochner Theorem, spectral density and distribution function. Linear filters, spectral density of ARMA processes. Stochastic integrals and the spectral representation theorem. Spectral density estimators: the periodogram and its asymptotic properties. Whittle likelihood. Nonstationary processes, weak convergence on function spaces, unit roots, tests. Random fields on the sphere: spectral representations.

**Learning objectives:** The aim of this course is to provide an introduction to the theory of stationary stochastic processes. Some more advanced material is also addressed, such as unit root processes and spherical random fields.

**Text books:**

P. J. Brockwell, R. A. Davis: *Time Series Models*, Springer, 1991

**Exam mode:** Written and oral exam.

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## INTRODUZIONE ALLE VARIETÀ DIFFERENZIABILI

1° semestre

8 CFU – settore MAT/03 – 64 ore di lezione in aula – supporti: R, S, T

**Docente L. Geatti (codocente S. Trapani)**

**Programma:** Varietà topologiche e differenziabili. Funzioni e mappe lisce su varietà. Vettori tangenti, fibrato tangente e differenziale di mappe. Sommersioni, immersioni, embedding, sottovarietà. Teorema di Whitney (caso compatto). Gruppi di Lie, azioni e quozienti, spazi omogenei. Campi vettoriali, parentesi di Lie, algebre di Lie. Flussi di campi vettoriali, derivate di Lie, campi che commutano. Tensori, forme differenziali, differenziale esterno, orientazione di varietà, integrazione di forme differenziali, Teorema di Stokes. Teorema di Frobenius e applicazioni. Fanno parte integrante del programma anche gli esercizi assegnati settimanalmente.

**Obiettivi di apprendimento:** Introdurre lo studente alle nozioni di base della geometria differenziale.

**Testi consigliati:**

J. M. Lee: *Introduction to smooth manifolds*, Springer, 2013

W. Boothby: *An Introduction to differentiable manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, 2003

F. Warner: *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer Verlag, 1969

**Modalità di esame:** Prova orale. Lo studente deve essere in grado di esporre in modo rigoroso i risultati discussi durante il corso. Deve anche saperli applicare agli esempi e ai problemi assegnati settimanalmente.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

**Program:** Topological and smooth manifolds. Functions and maps on manifolds. Tangent vectors, tangent bundle and differential of maps. Submersion, immersions, embeddings, submanifolds. Whitney's theorem (compact case). Lie groups, actions and quotients, homogeneous spaces. Vector fields, Lie brackets, Lie algebras. Flow of a vector field, Lie derivatives, commuting vector fields. Tensors, differential forms, exterior differentiation, orientation of a manifold, integration of a differential form, Stokes Theorem. Frobenius theorem and applications. The program also includes the exercises assigned weekly.

**Learning objectives:** Introduce the student to the basic notions of differential geometry.

**Text books:**

J. M. Lee: *Introduction to smooth manifolds*, Springer, 2013

M. Abate, F. Tovena: *Geometria differenziale*, Springer-Verlag Italia, 2011

F. Warner: *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer Verlag, 1969

**Exam mode:** Oral exam. The student must be able to rigorously expose the results discussed during the course. The student should also be able to apply them to the examples and to the problems assigned weekly.

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## LABORATORIO DI CALCOLO

1° semestre

4 CFU – settore INF/01 – 40 ore di lezione in aula – supporti: R, T

**Docente H. Speleers**

**Programma:** Il corso fornisce un'introduzione al sistema Python per il calcolo scientifico. In particolare saranno presentati: - Python, un linguaggio di programmazione general purpose; interpretato e scritto dinamicamente quindi molto adatto ad una programmazione interattiva e ad una prototipazione veloce pur essendo sufficientemente potente per affrontare applicazioni di larga scala. - NumPy, il package fondamentale per il calcolo. - Matplotlib, un package per la grafica in 2D con estensioni per semplici grafici 3D. - SciPy, una collezione di algoritmi numerici. - SymPy, un package per il calcolo simbolico e la computer algebra.

**Obiettivi di apprendimento:** L'insegnamento si propone di fornire conoscenze di base per l'uso di software scientifico per lo studio e la risoluzione di problemi di matematica avanzata.

**Testi consigliati:**

G. Varoquaux, E. Gouillart, O. Vahtras, et al.: *Scipy Lecture Notes*, disponibile on-line  
Note disponibili sul sito web del docente

**Modalità di esame:** Nella prova orale lo studente deve discutere il progetto realizzato. Il punteggio della prova d'esame è attribuito mediante un voto espresso in trentesimi.

**L'insegnamento sarà erogato in lingua inglese.**

 **Program:** The course provides an introduction to the Python ecosystem for scientific computing. In particular, the following packages are addressed: - Python, a general purpose programming language; it is interpreted and dynamically typed and is very suited for interactive work and quick prototyping, while being powerful enough to write large applications in. - NumPy, the fundamental package for numerical computation. - Matplotlib, a mature package for 2D plotting as well as basic 3D plotting. - SciPy, a collection of numerical algorithms. - SymPy, a package for symbolic mathematics and computer algebra.

**Learning objectives:** The course aims at the ability to use scientific software for the analysis and solution of advanced mathematical problems.

**Text books:**

G. Varoquaux, E. Gouillart, O. Vahtras, et al.: *Scipy Lecture Notes*, notes available on-line  
Material available on the website of the course

**Exam mode:** A project has to be made. In the oral exam the student has to discuss the project. The exam score is given by a mark expressed in thirtieths.

**Lectures will be given in English.**

## LABORATORIO DI DIDATTICA DELLA MATEMATICA

1° semestre

8 CFU – settore MAT/04 – 64 ore di lezione in aula – supporti: R, S, T

**Docente F. Tovenà (codocente B. Scoppola)**

 **Programma:** A partire dallo studio di testi di matematica classica si propongono attività laboratoriali in cui si valorizza il legame tra aritmetica e geometria e si pone l'attenzione sugli aspetti didattici, con speciale attenzione alle indicazioni nazionali per la matematica relative alla scuola secondaria di primo e secondo grado e alle informazioni fornite dai recenti studi in neuroscienze. Si tratteranno, tra l'altro: la nozione di numero, il concetto di commensurabilità e gli insiemi numerici; la radice quadrata; applicazioni del teorema di Pitagora; stime delle aree; applicazioni fisico-matematiche.

**Obiettivi di apprendimento:** Valorizzazione del legame tra aritmetica e geometria in modo da proporre una matematica che ponga al centro dei processi di apprendimento anche gli aspetti percettivi. Presentazione della matematica come linguaggio naturale per descrivere i fenomeni naturali. Gli studenti interessati possono svolgere 3CFU di tirocinio scolastico all'interno dell'insegnamento. Il docente è disponibile a erogare l'insegnamento in lingua inglese, qualora richiesto dagli studenti.

**Testi consigliati:**

L. Russo, G. Pirro, E. Salciccia: *Euclide, il I libro degli Elementi*, Carocci Editore, 2017

M. Montessori: *Psicogeometria*, Opera Nazionale Montessori, 2012

Dispense messe a disposizione dai docenti

**Modalità di esame:** Nella prova orale, lo studente presenta e motiva una propria proposta didattica su argomenti correlati a quelli discussi nel corso delle lezioni, illustrandone le motivazioni didattiche e corredandola con i relativi materiali. Nell'esposizione, sono verificate il livello di padronanza delle nozioni introdotte nel corso dell'insegnamento, l'autonomia e la consapevolezza nell'individuazione delle modalità didattiche in funzione dei destinatari e dei nodi cognitivi nell'argomento trattato, la completezza e la chiarezza espositiva, la capacità di sintesi e di analisi critica, la coerenza e l'efficacia delle argomentazioni prodotte, la rilevanza degli argomenti trattati.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

 **Program:** Starting from the study of classical mathematics texts, laboratory activities are proposed in which enhances the link between arithmetic and geometry and focuses on the didactic aspects, with special attention to the national indications for mathematics related to the first and second grade secondary school and to the information provided by recent studies in neuroscience. Among other things: the notion of number, the concept of commensurability and numerical sets; the square root; applications of the Pythagorean theorem; area estimates; physical-mathematical applications. Interested students can carry out 3CFU of school-based work experience within the teaching programme. The lecturer is available to teach in English if requested by the students.

**Learning objectives:** Enhancement of the link between arithmetic and geometry in order to propose a mathematics that also places perceptive aspects at the center of the learning processes. Presentation of mathematics as a natural language to describe natural phenomena.

**Text books:**

L. Russo, G. Pirro, E. Salciccia: *Euclide, il I libro degli Elementi*, Carocci Editore, 2017

M. Montessori: *Psicogeometria*, Opera Nazionale Montessori, 2012

Lecture notes made available by the teachers

**Exam mode:** In the oral exam, the student presents and motivates his own teaching proposal on topics related to those discussed during the lectures; he/she discusses the didactic motivations and the related materials. In the exposition, the level of mastery of the notions introduced in the course of teaching, autonomy and awareness in the identification of the didactic modalities according to the recipients and cognitive nodes in the treated topic, the completeness and the clarity of exposition are verified, the capacity for synthesis and critical analysis, the consistency and effectiveness of the arguments produced, the relevance of the topics discussed.

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

## LINGUA INGLESE CORSO AVANZATO

### 1° semestre

5 CFU – settore L-LIN/12

**Docente CLA (codocente D. Giammarresi)**

 **Programma:** Il programma si compone di due parti: una di inglese e una di introduzione al LaTeX. Per la parte di Inglese (4 CFU): Forme comuni e strutture principali della lingua inglese. Vocabolario necessario per operare in inglese nel settore professionale. Per la parte di LaTeX (1 CFU): Introduzione all'editoria scientifica e al LaTeX. Formule matematiche, stili di testo, ambienti per stili di scrittura, liste, tabelle, matrici, figure. Realizzazione di un documento di classe article. Preambolo, pacchetti da includere, definizioni di ambienti di tipo "theorem". Etichette e riferimenti. Scrivere una tesi di laurea. Uso della classe book e organizzazione dei file necessari. Realizzazione della bibliografia usando BibTeX e il database di MatSciNet.

**Obiettivi di apprendimento:** Obiettivo del corso è il raggiungimento di competenze e conoscenze linguistiche tali da permettere una padronanza della lingua di livello avanzato in ambito professionale. Relativamente alla parte di LaTeX, l'obiettivo è quello di essere in grado di scrivere un articolo scientifico e la tesi di laurea secondo gli standard dell'editoria scientifica.

**Testi consigliati:**

P. Dummett, J. Hughes, H. Stephenson: *Life Advanced*, Second Edition, Cengage Learning, 2018

L. Lamport: *LATEX. A Document Preparation System*, Addison-Wesley, 1994

**Modalità di esame:** Un esame scritto o computer based per la parte di Inglese. Per la parte di LaTeX, allo studente dovrà scrivere il codice LaTeX per la realizzazione di un breve documento contenente formule matematiche e completo di bibliografia.

 **Program:** The course is composed by two different parts: advanced English and Introduction to LaTeX. English part (4 CFU): Common forms and main structures of the English language. Vocabulary needed to work in English in the professional sectors. LaTeX part (1 CFU): Introduction to scientific publishing and to LaTeX. Mathematical formulas, text styles, environments for writing styles, lists, tables, matrices, figures. Realization of an article class document. Preamble, packages to be included, definitions of "theorem" type environments. Labels and references. How to write a thesis. Use of the book class and organization of the necessary files. Implementation of the bibliography using BibTeX and the MatSciNet database.

**Learning objectives:** The aim of the course is the achievement of linguistic skills and knowledge that allow for an advanced level of proficiency in the professional field.

With regard to the LaTeX part, the goal is to be able to write a scientific article and the degree thesis according to the standards of scientific publishing.

**Text books:**

P Dummett, J. Hughes, H. Stephenson: *Life Advanced*, Second Edition, Cengage Learning, 2018

L. Lamport: *LATEX. A Document Preparation System*, Addison-Wesley, 1994

**Exam mode:** A written or computer based exam for the English part. For the LaTeX part, the student will be asked to write the LaTeX code corresponding to a given short document with math formulas and bibliography.

## LOGICA MATEMATICA 1

1° semestre

8 CFU – settore MAT/01 – 64 ore di lezione in aula – supporti: R, S, T

Docente P. Lipparini

**Programma:** Paradossi. Sistemi formali. Linguaggi. Formule ben formate. Assiomi. Dimostrazioni in senso formale. Calcolo delle proposizioni. Calcolo dei predicati del primo ordine. Modelli. Soddisfaccibilità. Teorie del primo ordine. Teoremi di completezza e compattezza. Applicazioni. Modelli non standard. Teoremi di incompletezza. Conseguenze. Costruzioni di modelli. Teoremi di Lowenheim Skolem. Assiomi della teoria degli insiemi e loro formalizzazione. Analisi non standard.

**Obiettivi di apprendimento:** Acquisire una buona conoscenza dello sviluppo, dei metodi e delle applicazioni della logica matematica, con particolare riguardo ai teoremi di incompletezza, alla teoria degli insiemi e all'uso della teoria dei modelli. Rendersi conto dell'esistenza di limiti ben definiti alle possibilità del metodo deduttivo formale.

**Testi consigliati:** Verranno rese disponibili dispense, con altro materiale consultabile on-line.

**Modalità di esame:** Accertamento mediante colloquio che gli obiettivi formativi e risultati di apprendimento attesi, come esplicitamente specificati nella sezione precedente, siano stati raggiunti.

**Program:** Paradoxes. Formal systems. Languages. Well formed formulas. Axioms. Formal proofs. Propositional calculus. First order predicate calculus. Models. Satisfaction. First order theories and the completeness and compactness theorems. Applications. Non standard models. Incompleteness theorems and consequences. Basic model constructions. Lowenheim Skolem theorems. Axiomatic set theory. Non standard analysis.

**Learning objectives:** The aim of the course is to provide a good knowledge of the developments, the methods and the applications of mathematical logic, in particular, of the incompleteness theorems, of set theory and of model theory. The student will also realize the intrinsic limits of the deductive method.

**Text books:** Material will be available on-line.

**Exam mode:** Oral examination in which it is ascertained the the objectives have been reached.

## MACHINE LEARNING

2° semestre

9 CFU – settore INF/01 – 72 ore di lezione in aula

Docente G. Gambosi

**Programma:** Richiami di statistica bayesiana e apprendimento bayesiano. Modelli grafici e reti bayesiane. Apprendimento supervisionato. Regressione (lineare e non) e regolarizzazione. Selezione delle variabili, cenni. Classificazione: LDA di Fisher, perceptrone, naive bayes. Modelli generativi per la classificazione. Modelli discriminativi per la classificazione, regressione logistica. Support vector machines, kernel. Multilayer perceptron. Modelli non parametrici: knn e finestre di Parzen. Processi gaussiani. Alberi di decisione. Ensemble di modelli: bagging, boosting, foreste casuali, Adaboost, Gradient boosting. Apprendimento non supervisionato. Clustering: k-means, modelli di mistura. Riduzione di dimensionalità: analisi delle componenti principali (PCA), PCA probabilistica, analisi fattoriale. Testo, matrici di cooccorrenze e sistemi di recommendation. Latent semantic analysis. Deep learning. Reti convoluzionali. Reti ricorrenti e LSTM.

**Obiettivi di apprendimento:** Acquisizione dei concetti fondamentali dell'apprendimento automatico e dei più comuni e rilevanti modelli/algoritmi applicati in tale ambito. Conoscenza dei relativi fondamenti matematici.

**Testi consigliati:**

M. Bishop: *Pattern Recognition and Machine Learning*, Springer, 2006

**Modalità di esame:** Prova orale. Interazione e discussioni nel corso delle lezioni.

 **Program:** Recall of bayesian statistics and learning Graphical models and bayesian networks. Supervised learning. Regression (linear and not linear), regularization. Feature selection. Linear classification: Fisher LDA, perceptron Naive bayes. Generative models for classification. Discriminative models for classification, logistic regression. Support vector machines, kernel Multilayer perceptron. Non parametrics models: knn and Parzen windows. Gaussian processes Decision trees. Ensemble models: bagging, boosting, random forests, Adaboost, Gradient boosting Unsupervised learning. Clustering: k-means, mixture models. Dimensionality reduction: Principal component analysis, Probabilistic principal component analysis, Factor analysis. Text, pair matrices and recommenders. Latent semantic analysis. Deep learning Convolutional networks. Recurrent and LSTM networks.

**Learning objectives:** Acquiring the fundamental concepts of machine learning and the most common and relevant models/algorithms in that framework. Knowledge of the corresponding mathematical foundations.

**Text books:**

M. Bishop: *Pattern Recognition and Machine Learning*, Springer, 2006

**Exam mode:** Oral exam. Interaction and discussions during the lectures.

## MECCANICA ANALITICA E CELESTE

2° semestre

8 CFU – settore MAT/07 – 64 ore di lezione in aula

Docente G. Pucacco

 **Programma:** Richiami di teoria dei sistemi dinamici e meccanica hamiltoniana: campi vettoriali ed equazioni del moto; integrabilità, integrali primi, simmetrie; non-integrabilità, instabilità, caos. Metodi analitici: teoria delle perturbazioni di sistemi quasi-integrabili; forme normali di Birkhoff-Gustavson; varietà invarianti (orbite periodiche, tori invarianti e stabilità di Lyapunov), stabilità di Kolmogorov e Nekhoroshev. Metodi numerici: integrazione di sistemi dinamici, calcolo di “superfici di sezione”, studio della struttura dello spazio delle fasi, determinazione di traiettorie regolari e caotiche, controllo degli errori numerici. Applicazioni: problema dei due corpi; geo-potenziale, maree e accoppiamento spin-orbita; problema dei tre corpi; perturbazioni secolari e risonanti; sistemi solari (architettura e stabilità); moto in potenziali galattici. Teoria delle perturbazioni con la trasformata di Lie; teoria KAM; teoria della regolarizzazione; trasformazione di Levi-Civita e Kustaanheimo-Stiefel.

**Obiettivi di apprendimento:** L'insegnamento è volto a fornire una introduzione alle tematiche avanzate della meccanica analitica e delle relative problematiche applicative in Meccanica Celeste e Dinamica Galattica.

**Bibliografia di riferimento:**

D. Boccaletti, G. Pucacco: *Theory of Orbits*, Springer, 1999

A. Celletti: *Stability and Chaos in Celestial Mechanics*, Springer, 2009

J. A. Sanders, F. Verhulst, J. Murdock: *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*, Second Edition, Springer, 2007

K. R. Meyer, G. R. Hall, D. Offin: *Introduction to Hamiltonian dynamical systems and the N-body problem*, Springer, 2009

C. D. Murray, S. F. Dermott: *Solar system dynamics*, Cambridge University Press, 1999

**Modalità di esame:** L'esame si svolge con una tesina scritta su un argomento concordato e una discussione orale.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

 **Program:** Review of dynamical systems and Hamiltonian mechanics: Vector fields and equations of motion; Integrability, First integrals, symmetries; Non-integrability, instability, chaos. Analytical Methods:

Perturbation Theory of nearly-integrable systems; Birkhoff-Gustavson “normal form”; Invariant manifolds (periodic orbits, invariant tori and Lyapunov stability); Kolmogorov and Nekhoroshev stability. Numerical Methods: Integration of dynamical systems, computation of “surfaces of section”, investigation of phase-space structure, detection of regular and chaotic trajectories, control of numerical errors. Applications: Two-body problem; Geo-potential, tides and spin-orbit coupling; Three-body problem; Secular and resonant perturbations; Solar systems: architecture and stability; Motion in galactic potentials. Lie transform perturbation theory; KAM Theory; regularization theory; Levi-Civita and Kustaanheimo-Stiefel transformations.

**Learning objectives:** Introduction to advanced methods in analytical mechanics with applications in Celestial Mechanics (motion in the Geo-potential and in the Solar and extra-Solar systems) and Galactic Dynamics.

**Reference bibliography:**

D. Boccaletti, G. Pucacco: *Theory of Orbits*, Springer, 1999

A. Celletti: *Stability and Chaos in Celestial Mechanics*, Springer, 2009

J. A. Sanders, F. Verhulst, J. Murdock: *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*, Second Edition, Springer, 2007

K. R. Meyer, G. R. Hall, D. Offin: *Introduction to Hamiltonian dynamical systems and the N-body problem*, Springer, 2009

C. D. Murray, S. F. Dermott: *Solar system dynamics*, Cambridge University Press, 1999

**Exam mode:** Written report on a given argument and oral discussion.

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

## MECCANICA STATISTICA 2

1° semestre

6 CFU – settore FIS/03 – 48 ore di lezione in aula

Docente R. Marra

■ ■ **Programma:** Introduzione alle transizioni di fase. Modello di Ising. Argomento di Peierls. Teoria di campo medio per il modello di Ising. Trasformazione di dualità. Soluzione di Onsager. Gruppo di rinormalizzazione. Blocchi di spin e teorema del limite centrale. Leggi di scala ed esponenti critici. Elementi di teoria della percolazione. Altri modelli: Modello Gaussiano, Rotatore piano. Modelli di teorie di gauge. Metodi di simulazione numerica. Tempi di rilassamento. Efficienza di un algoritmo. Algoritmi Monte-carlo: dinamica di Glauber e di Kawasaki. Elementi di dinamica dei fluidi. Teoria cinetica. Equazione di Boltzmann. Entropia e teorema H. Relazione con l'idrodinamica.

**Obiettivi di apprendimento:** Il corso è volto a fornire una preparazione avanzata nel campo della Meccanica Statistica di equilibrio e di non-equilibrio, con conoscenze di argomenti specialistici della recente ricerca nel settore. Gli obiettivi formativi prevedono la conoscenza avanzata della fisica delle transizioni di fase e dell'equazione di Boltzmann e dei metodi matematici per il loro studio. Capacità di risolvere problemi generali nel settore.

**Testi consigliati:** Dispense del corso, disponibili on-line sul sito del docente.

**Modalità di esame:** La valutazione è formulata mediante prova orale. In particolare, si richiede allo/a studente di dimostrare: a) di aver compreso idee e concetti e saperli comunicare utilizzando conoscenze di fisica di base; b) di saper formalizzare i concetti e saperli trattare attraverso l'uso di uno o più tra i metodi sviluppati nel corso e relative procedure; c) autonomia, consapevolezza di quanto appreso, efficacia ed efficienza nella comunicazione scientifica; d) di saper svolgere un argomento non trattato in modo autonomo.

■ **Program:** Phase transitions: introduction. Ising Model. Peierls result. Mean field theory. Rigorous results on the Ising model. Renormalization group and spin blocks. Boltzmann equation. H theorem. Hydrodynamics.

**Learning objectives:** The course is aimed at providing advanced preparation in the field of Statistical Mechanics of equilibrium and non-equilibrium, with knowledge of specialized topics of recent research in the field. The educational objectives include advanced knowledge of the physics of phase transitions and the Boltzmann equation and mathematical methods for their study. Ability to solve general problems in the field.

**Text books:** Lecture notes are available on the teacher web page.

**Exam mode:** The evaluation is formulated by oral test. In particular, the student is required to demonstrate: a) to have understood ideas and concepts and to know how to communicate them using basic physics knowledge; b) to know how to formalize the concepts and know how to treat them through the use of one or more of the methods developed in the course and related procedures; c) autonomy, awareness of what has been learned, effectiveness and efficiency in scientific communication; d) to know how to carry out an untreated topic independently.

---

## MECCANICA SUPERIORE 2

1° semestre

8 CFU – settore MAT/07 – 64 ore di lezione in aula – supporti: R, S, T

Docente A. Pizzo

**Programma:** Fondamenti della meccanica quantistica Lo spazio di Hilbert e la formulazione algebrica Le equazioni di Schrodinger and Heisenberg Analisi di sistemi elementari Simmetrie in meccanica quantistica Rappresentazione di SU(2) e lo spin Teoria spettrale di operatori di Schrodinger Teoria delle perturbazioni Applicazioni ad atomi e molecole.

**Obiettivi di apprendimento:** Il corso mira a fornire le nozioni di base per lo studio matematicamente rigoroso di sistemi quantistici. Il programma potrà variare sulla base delle conoscenze preliminari dell'uditorio.

**Testi consigliati:**

M. Reed B. Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics*, Volumi I e IV - Academic Press, 1972

A. Galindo, P. Pasqual: *Quantum Mechanics I*, Springer, 1990

Dispense disponibili on-line

**Modalità di esame:** Prova orale. Durante la prova lo studente presenta una tesina su un argomento collegato al corso e dimostra di avere una conoscenza generale del programma.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

**Program:** Foundations of quantum mechanics The Hilbert space and operator algebra formulation The Schrodinger and Heisenberg equations Analysis of simple systems Symmetry in quantum mechanics Representations of SU(2) and spin Spectral theory of Schrodinger operators Perturbation theory Applications to atoms and molecules.

**Learning objectives:** The course aims to providing basic notions for a rigorous mathematical analysis of quantum systems. The program may vary on the basis of the background knowledge of the audience.

**Text books:**

M. Reed B. Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics*, Volumes I and IV - Academic Press, 1972

A. Galindo, P. Pasqual: *Quantum Mechanics I*, Springer, 1990

Lecture notes available on-line

**Exam mode:** Oral exam where the student presents a talk on a topic related to the course and shows a general knowledge of the course contents.

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## METODI COMPUTAZIONALI PER SISTEMI HAMILTONIANI

2° semestre

8 CFU – settore MAT/07 – 64 ore di lezione in aula – supporti: R, S, T

Docente U. Locatelli

**Programma:** Richiami di formalismo Hamiltoniano: parentesi di Poisson e trasformazioni canoniche. I sistemi integrabili: teorema di Liouville; cenni al teorema di Arnold-Jost. Trasformazioni canoniche prossime all'identità: serie di Lie. Introduzione ai metodi симпlettici di integrazione numerica dei sistemi Hamiltoniani. I sistemi quasi integrabili: la dinamica nell'intorno di un punto di equilibrio. Studio di alcuni esempi fondamentali: problema ristretto dei 3 corpi nei pressi dei punti Lagrangiani equilateri, modello di Henon-Heiles. Forma normale di Birkhoff e stabilità effettiva alla Nekhoroshev. Cenni al

teorema KAM sulla persistenza dei moti quasi periodici. A seconda del tempo a disposizione, l'ultima parte del corso tratterà uno dei due seguenti argomenti oppure entrambi. 1) Il teorema della varietà stabile. Visualizzazione grafica delle varietà stabili/instabili. Origine del caos e esponenti di Lyapunov. 2) Studio della dinamica Hamiltoniana quasi-integrabile con il metodo dell'analisi in frequenza, l'argomento che sarà trattato anche durante alcune speciali sessioni di attività laboratoriali ad esso dedicate.

**Obiettivi di apprendimento:** Miglioramento delle capacità di comprensione della teoria dei sistemi Hamiltoniani grazie allo sviluppo delle applicazioni computazionali.

**Testi consigliati:**

A. Giorgilli: *Notes on Hamiltonian Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 2022

U. Locatelli: *Metodi numerici di studio dei sistemi dinamici Hamiltoniani*, dispense disponibili on-line

**Modalità di esame:** L'esame è costituito da tre prove e tutte contribuiscono (approssimativamente in parti uguali) alla valutazione finale: una dissertazione scritta su uno degli argomenti principali del corso, la preparazione di un programma di calcolo per la soluzione di un problema simile a uno di quelli trattati nelle sessioni laboratoriali, una prova orale su uno degli argomenti del corso.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

 **Program:** Introduction to the Hamiltonian formalism: Poisson brackets and canonical transformations. Integrable systems: the Liouville theorem; sketch of the Arnold-Jost theorem. Canonical transformations close to the identity: Lie series. Introduction to symplectic methods for the numerical integration of Hamiltonian systems. Quasi-integrable systems: the dynamics around a point of equilibrium. Study of some fundamental examples: restricted three-body problem near the equilateral Lagrangian points, Henon-Heiles model. Birkhoff normal form and effective stability in the spirit of the estimates à la Nekhoroshev. Outline of the KAM theorem on the persistence of quasi-periodic motions. The last part of the course covers one of the following two topics or both. 1) The theorem of the stable manifold. Visualization techniques for stable / unstable manifolds. Origin of chaos and Lyapunov exponents. 2) Study of the Hamiltonian dynamics for quasi-integrable systems by using the frequency analysis method, this topic will be described during some special work sessions in a computer lab.

**Learning objectives:** Enhancement of the understanding about Hamiltonian systems theory, also because of the development of some computational applications.

**Text books:**

A. Giorgilli: *Notes on Hamiltonian Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 2022

U. Locatelli: *Metodi numerici di studio dei sistemi dinamici Hamiltoniani*, notes available on-line

**Exam mode:** The exam consists of three tests and all of them contribute (in nearly equal parts) to the final evaluation: a written dissertation on one of the main topics of the course, the preparation of a computational code solving a problem similar to one of those discussed in the work sessions in a computer lab, one oral exam on one of the main topics of the course.

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## METODI DI OTTIMIZZAZIONE PER BIG DATA

2° semestre

9 CFU – settore MAT/09 – 90 ore di lezione in aula

Docente A. Pacifici

 **Programma:** Introduzione all'ottimizzazione: approccio modellistico. Problemi di ottimizzazione: classificazione. Problemi di Programmazione Matematica: condizioni di esistenza della soluzione. Ottimizzazione non vincolata: condizioni di ottimo, algoritmi di soluzione: condizioni di convergenza globale, ricerca di linea, cenni sul metodo del gradiente. Ottimizzazione vincolata: condizioni di ottimo e algoritmi di soluzione. Duali di Wolfe e SVM. Algoritmi per SVM: SVM\_light e metodo delle coordinate duali. Clustering non supervisionato: formulazione e algoritmo k-means batch e on line. Algoritmo k-medoids. Clustering gerarchico agglomerativo e divisivo. Alberi di decisione: Alberi di decisione e classificazione. CART (Classification And Regression Trees). Induction task: TDIDT e approccio Top-Down. Scelta dello split test. Misure di "impurità" ai nodi: Gini index, Chi-quadro, Entropia, Information Gain, Gain Ratio ed Errore di Classificazione. Cenni di complessità computazionale. Disegno di un Optimal Classification Tree (OCT) come problema di ottimizzazione intera (MIO). Modello di Bertsimas e Dunn: OCT-MIO. Caso univariato: Definizione delle variabili. Modellare la struttura ad albero. Pruning. Consistenza con l'output dei test. Assegnamento di class-label ai nodi foglia. Estensione di OCT-MIO al caso multivariato: OCT-H.

**Obiettivi di apprendimento:** L'obiettivo del corso è quello di introdurre all'ottimizzazione vincolata con attenzione alle applicazioni nel campo dell'addestramento di SVM (Support Vector Machine) e alla definizione di tecniche di clustering. Vengono descritti inoltre gli alberi di decisione.

**Testi consigliati:**

L. Grippo, M. Sciandrone: *Metodi di Ottimizzazione Non Vincolata*, Springer, Unitext, 2011

M. Sciandrone: *Support Vector Machines*, dispense disponibili on-line

M. Sciandrone: *Clustering e metodi di decomposizione*, dispense disponibili on-line

G. James, D. Witten, T. Hastie, R. Tibshirani: *An Introduction to Statistical Learning: With Applications in R*, Springer Publishing Company, Incorporated, 2014

D. Bertsimas, J. Dunn: *Optimal classification trees. Machine Learning*, Springer, 2017

A. Pacifici: *Alberi di decisione per la classificazione*, dispense disponibili on-line

**Modalità di esame:** L'esame si compone di una prova scritta, di una prova orale e di un progetto che possono essere svolti indipendentemente (quindi nell'ordine che preferisce il candidato) purché nell'ambito di un anno accademico. Non sono previste prove in itinere. La prova scritta si compone di una serie di esercizi da svolgere in un tempo di approssimativamente 2 ore. La valutazione massima per la prova scritta – ottenuta sommando le votazioni parziali dei singoli esercizi che la compongono – è pari a 10/30. La prova orale consta di domande aperte, con voto massimo di 11/30. Il progetto riguarda la risoluzione (attraverso software dedicati) di uno specifico problema di classificazione per il quale viene fornito un dataset. La valutazione massima per il progetto – valutato sulla base della sua correttezza, rigore e completezza e dei risultati su opportuno test set – è pari a 10/30. Il voto finale è la somma delle valutazioni delle tre prove.

 **Program:** Introduction to optimization: modeling approach. Optimization issues: classification Problems of Mathematical Programming: conditions of existence of the solution. Unconstrained optimization: optimality conditions, solution algorithms: global convergence conditions, line search, hints on the gradient method. Constrained optimization: optimal conditions and solution algorithms Wolfe and SVM dual. Algorithms for SVM: SVM\_light and dual coordinate method. Unsupervised clustering: formulation and k-means algorithm batch and online. Algorithm k-medoids. Agglomerative and divisive hierarchical clustering Decision trees: Decision trees and classification. CART (Classification And Regression Trees). Induction task: TDIDT and Top-Down approach. Choice of split test. Measures of “impurities” at nodes: Gini index, Chi-quadro, Entropia, Information Gain, Gain Ratio and Classification Error. Notes on computational complexity. Design of an Optimal Classification Tree (OCT) as a whole optimization problem (MIO). Bertsimas and Dunn model: OCT-MIO. Unique case: Definition of variables. Modeling the tree structure. Pruning. Consistency with test output. Class-label assignment to leaf nodes. Extension of OCT-MIO to the multivariate case: OCT-H.

**Learning objectives:** Aim of the course is to introduce constrained optimization with specific attention to applications in the field of SVM (Support Vector Machine) training and the definition of clustering techniques. Decision trees for classification are also described.

**Text books:**

L. Grippo, M. Sciandrone: *Metodi di Ottimizzazione Non Vincolata*, Springer, Unitext, 2011

M. Sciandrone: *Support Vector Machines*, notes available on-line

M. Sciandrone: *Clustering e metodi di decomposizione*, notes available on-line

G. James, D. Witten, T. Hastie, R. Tibshirani: *An Introduction to Statistical Learning: With Applications in R*, Springer Publishing Company, Incorporated, 2014

D. Bertsimas, J. Dunn: *Optimal classification trees. Machine Learning*, Springer, 2017

A. Pacifici: *Alberi di decisione per la classificazione*, notes available on-line

**Exam mode:** The examination consists of a written test, an oral test and a project which can be carried out independently (i.e. in the order the candidate prefers) provided that it is within the framework of an academic year. There are no ongoing tests. The written test consists of a series of exercises to be carried out in a time of approximately 2 hours. The maximum score for the written test – obtained by adding up the partial votes of the individual exercises that compose it – is equal to 10/30. The oral test consists of open questions, with a maximum score of 11/30. The project concerns the resolution (through dedicated software) of a specific classification problem for which a dataset is provided. The maximum score for the project – evaluated on the basis of its correctness, rigor and completeness and the results on a suitable test set – is 10/30. The final grade is the sum of the evaluations of the three tests.

## METODI E MODELLI DEI MERCATI FINANZIARI

1° semestre

8 CFU – settore SECS/S-06 – 64 ore di lezione in aula – supporti: S, T

Docente L. Caramellino

**Programma:** Il corso si propone lo studio dei modelli continui in tempo e in spazio per la descrizione dei mercati finanziari e, in particolare, dei due problemi fondamentali in finanza: valutazione del prezzo e calcolo della copertura di opzioni. La prima parte del corso è dedicata a richiami ed approfondimenti di calcolo stocastico (processi di Markov, teorema di Girsanov, diffusioni e formule di rappresentazione alla Feynman-Kac). Successivamente vengono introdotti i modelli continui per la finanza (modelli di Itô, processi di diffusione), le strategie di gestione, l'arbitraggio e la completezza del mercato. Particolare enfasi è data al modello di Black e Scholes. La parte finale del corso è dedicata ai metodi numerici Monte Carlo in finanza. Saranno infine proposti alcuni approfondimenti a scelta dello studente (tassi di interesse, opzioni americane, applicazioni del calcolo di Malliavin alla finanza).

**Obiettivi di apprendimento:** Comprensione del linguaggio proprio della finanza matematica; conoscenza dei modelli di diffusione per la finanza, in particolare per la risoluzione dei problemi legati alle opzioni (calcolo del prezzo e della copertura); capacità di istituire collegamenti con materie collegate (teoria della misura, analisi funzionale, problemi alle derivate parziali, linguaggi di programmazione etc.) e con problemi provenienti dal mondo reale; risoluzione numerica di problemi reali (prezzo e copertura di opzioni) tramite costruzione di algoritmi Monte Carlo.

**Testi consigliati:**

D. Lamberton, B. Lapeyre: *Introduction to stochastic calculus applied to finance*, Chapman & Hall, 2008

P. Baldi: *Stochastic Calculus. An Introduction Through Theory and Exercises*, Springer, 2017

D. Brigo, A. Dalessandro, M. Neugebauer, F. Triki: *A Stochastic Processes Toolkit for Risk Management*, Journal of Risk Management in Financial Institutions, 2(4), 2008-2009

**Modalità di esame:** Prova orale, previa consegna e discussione del progetto con la risoluzione dei problemi numerici proposti (si richiede l'uso di un linguaggio di programmazione, ad esempio C).

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

**Program:** The course deals with the problems of the pricing and the hedging of European options when the underlying market model is set as a diffusion model. Firstly, special topics in stochastic calculus are recalled and developed (Markov processes, Girsanov's theorem, diffusion processes and Feynman-Kac type representation formulas); secondly, diffusion models are introduced for the study of the arbitrage and the completeness of the financial markets. A special emphasis is given to the Black and Scholes model. A part of the course is devoted to Monte Carlo numerical methods in Finance. Students have to choose a free-choice part of the course among the following subjects: American options, interest rate models, Malliavin calculus and application to finance.

**Learning objectives:** Comprehension of the financial language; knowledge of the diffusion models used in Finance, in particular for the solution to the pricing and the hedging problem; ability in linking related mathematical topics (measure theory, functional analysis, partial differential equations, programming languages) and real world problems; numerical solutions of practical problems (pricing and hedging options) through Monte Carlo algorithms.

**Text books:**

D. Lamberton, B. Lapeyre: *Introduction to stochastic calculus applied to finance*, Chapman & Hall, 2008

P. Baldi: *Stochastic Calculus. An Introduction Through Theory and Exercises*, Springer, 2017

D. Brigo, A. Dalessandro, M. Neugebauer, F. Triki: *A Stochastic Processes Toolkit for Risk Management*, Journal of Risk Management in Financial Institutions, 2(4), 2008-2009

**Exam mode:** The final exam consists of an oral examination, which includes also a deep discussion on the simulation algorithms analyzed during the course. Students must deliver the source codes (preferably in C or C++ language) with the resolution of the numerical exercises ten days before the exam date (by sending an e-mail).

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

## METODI E MODELLI IN COMPUTER GRAPHICS

1° semestre

8 CFU – settore MAT/08 – 64 ore di lezione in aula – supporti: R, S, T

Docente C. Garoni

**Programma:** Vengono studiati in dettaglio i seguenti argomenti: ray casting, modelli d'illuminazione diretta e globale, ray tracing (ricorsivo), radiosità. Vengono inoltre ripassati e integrati i seguenti argomenti: - metodi iterativi (stazionari e non stazionari) per sistemi lineari - superfici e integrali di superficie. Il programma del corso prevede anche l'apprendimento del software di calcolo simbolico Maple, necessario per risolvere esercizi e problemi inerenti il corso nonché per sostenere l'esame finale.

**Obiettivi di apprendimento:** Il corso copre gli algoritmi classici della computer graphics per il rendering 3D fotorealistico, con particolare riferimento agli aspetti matematici (soprattutto analitici, numerici e probabilistici). Vengono studiati in dettaglio i seguenti argomenti: ray casting, modelli d'illuminazione diretta e globale, ray tracing (ricorsivo), radiosità. Un ulteriore importante obiettivo formativo è l'apprendimento del software di calcolo simbolico Maple, necessario per risolvere esercizi e problemi inerenti al corso nonché per sostenere l'esame finale.

**Testi consigliati:**

C. Garoni: *Metodi e Modelli Matematici in Computer Graphics: Rendering 3D Fotorealistico*, libro di testo fornito durante il corso

M. Picardello: *Rendering tridimensionale: metodi numerici, analitici e probabilistici*, dispense disponibili on-line

P. Dutré, K. Bala, P. Bekaert: *Advanced Global Illumination*, Second edition, Taylor & Francis, 2006

**Modalità di esame:** L'esame avviene attraverso una prova scritta ed una orale. Allo scritto sarà verificato anche l'apprendimento di Maple.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

**Program:** The following topics are studied in detail: ray casting, direct and global illumination models, recursive ray tracing, radiosity. The following topics are recalled and integrated: - stationary and non-stationary iterative methods for linear systems - surfaces and surface integrals The course program also includes the learning of the symbolic computation software Maple, which is necessary to solve exercises and problems of the course as well as to pass the final exam.

**Learning objectives:** Computer graphics algorithms for the photorealistic 3D rendering are covered, with emphasis on the mathematical aspects (especially, analytic, numerical and probabilistic aspects). The following topics are studied in detail: ray casting, direct and global illumination models, recursive ray tracing, radiosity. A further important objective of the course consists in learning the symbolic computation software Maple, which is necessary to solve exercises and problems of the course as well as to pass the final exam.

**Text books:**

C. Garoni: *Metodi e Modelli Matematici in Computer Graphics: Rendering 3D Fotorealistico*, textbook provided during the course

M. Picardello: *Rendering tridimensionale: metodi numerici, analitici e probabilistici*, notes available on-line

P. Dutré, K. Bala, P. Bekaert: *Advanced Global Illumination*, Second edition, Taylor & Francis, 2006

**Exam mode:** The exam is based upon a written test and an oral test. During the written test, also the knowledge of Maple will be checked.

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## NATURAL LANGUAGE PROCESSING

1° semestre

6 CFU – settore INF-ING/05 – 48 ore di lezione in aula

Docente F. Zanzotto

**Programma:** Introduzione al NLP e la sfida delle macchine parlanti. Il Linguaggio: modelli e teorie linguistiche. Modelli Linguistici e Sistemi. Come determinare che un modello è corretto e un sistema è efficace: inter-annotation agreement e statistical significance. Automi a stati finiti e trasduttori per la

morfologia (appunti per la lezione): software Xerox Finite State Transducers. Elaborazione sintattica con le grammatiche context-free. Parsing con le grammatiche context-free. Feature Structures e Unificazione. Tree Adjoining Grammars. Modular and Lexicalized Parsing. Probabilistic context-free grammar. Semantica. Rappresentazione semantica simbolica: Introduzione a WordNet e FrameNet Lambda Calcolo per la semantica del linguaggio naturale. Rappresentazione semantica distribuzionale. Textual Entailment Recognition. Cenni di Rappresentazione Simbolica Distribuita per Reti Neurali.

**Obiettivi di apprendimento:** Il corso si propone di introdurre lo studente agli scopi, alle principali problematiche e ai principali modelli simbolici dell'elaborazione del linguaggio naturale.

**Testi consigliati:**

D. Jurafsky, J. H. Martin: *Speech and Language PROCESSING: An Introduction to Natural Language Processing, Computational Linguistics, and Speech Recognition*, 2014

I. Dagan, D. Roth, M. Sammons, F. M. Zanzotto: *Recognizing Textual Entailment: Models and Applications, Synthesis Lectures on Human Language Technologies #23*, Morgan & Claypool Publishers, 2013

**Modalità di esame:** Agli studenti è richiesto di: 1) Preparare una presentazione su un argomento casuale del corso. Lo studente ha a disposizione accesso ad internet e a tutti i suoi appunti. 2) Costruire una applicazione per un problema che coinvolga il linguaggio naturale.

 **Program:** Introduction to NLP and to the challenge of talking machines. The language: linguistic models and theories. Linguistic models and systems. How to determine that a model is correct and a system is effective: inter-annotation agreement and statistical significance. Morphology: Finite state automaton and transducers. Syntactic analysis with context-free grammars Parsing with context-free grammars. Feature Structures and Unification. Tree Adjoining Grammars. Modular and Lexicalized Parsing. Probabilistic context-free grammar. Semantics. Symbolic Semantic Representation: WordNet and FrameNet. Lambda Calculus for natural language semantics. Distributional semantics. Textual Entailment Recognition. Distributed Representations of Discrete Symbolic Representations for Neural Networks.

**Learning objectives:** The course introduces the common practices and the common models of natural language processing.

**Text books:**

D. Jurafsky, J. H. Martin: *Speech and Language PROCESSING: An Introduction to Natural Language Processing, Computational Linguistics, and Speech Recognition*, 2014

I. Dagan, D. Roth, M. Sammons, F. M. Zanzotto: *Recognizing Textual Entailment: Models and Applications, Synthesis Lectures on Human Language Technologies #23*, Morgan & Claypool Publishers, 2013

**Exam mode:** Student are asked to: 1) Prepare a presentation on a random topic of the course in 1h. They have complete access to the internet and to their notes. 2) Build a simple application on an NLP problem.

## NUMERICAL METHODS FOR COMPUTER GRAPHICS IN JAVA

1° semestre

8 CFU – settore MAT/08 – 64 ore di lezione in aula – supporti: R, T

Docente H. Speleers

 **Programma:** La computer graphics è largamente utilizzata nell'industria cinematografica e dei video giochi. Il corso ha lo scopo di fornire le tecniche di base per la computer graphics ed una introduzione alla programmazione in Java. Il corso è formato da due parti. Parte 1: Introduzione a Java e alla programmazione orientata agli oggetti. Parte 2: Principi della computer graphics, fondamenti del rendering pipeline e rendering foto-realistico tramite ray-tracing.

**Obiettivi di apprendimento:** Fornire conoscenze di base delle tecniche di computer graphics per le applicazioni nel modelling e nella visualizzazione; mettere gli studenti in grado di implementare programmi di media dimensione in Java seguendo una programmazione orientata agli oggetti.

**Testi consigliati:**

B. Eckel: *Thinking in JAVA, 4th Edition*, Prentice Hall, 2006

F. S. Hill, S. M. Kelley: *Computer Graphics Using OpenGL, 3rd Edition*, Prentice Hall, 2006

Note disponibili sul sito web del docente

**Modalità di esame:** La prova scritta è composta da quesiti teorici ed esercizi. Nella prova orale lo studente deve discutere il progetto realizzato.

**L'insegnamento sarà erogato in lingua inglese.**

 **Program:** Computer graphics is widely used in the video game and movie industry. The goal of this course is to provide some basic techniques in computer graphics, and to give an introduction to the programming language Java. The course consists of two parts. Part 1: Introduction to Java as an object-oriented programming language. Part 2: Principles of computer graphics, the basic rendering pipeline, and photo-realistic rendering by ray-tracing.

**Learning objectives:** Insight in the basic computer graphics techniques for modelling and visualization applications; the ability to implement small to medium-sized problems in an object-oriented programming language as Java.

**Text books:**

B. Eckel: *Thinking in JAVA, 4th Edition*, Prentice Hall, 2006

F. S. Hill, S. M. Kelley: *Computer Graphics Using OpenGL, 3rd Edition*, Prentice Hall, 2006

Material available on the website of the course

**Exam mode:** The written exam consists of both theoretical questions and exercises. A project has to be made. In the oral exam the student has to discuss the project.

**Lectures will be given in English.**

---

## PROGETTAZIONE DI SISTEMI INFORMATICI

2° semestre

8 CFU – settore INF/01 – 64 ore di lezione in aula

Docente E. Nardelli

 **Programma:** Test driven design. Statecharts. Basi di dati.

**Obiettivi di apprendimento:** L'insegnamento si propone di fornire agli studenti gli elementi fondamentali per lo sviluppo di sistemi informatici.

**Testi consigliati:**

L. Koskela: *Test Driven*, Manning, 2007

D. Harel, M. Politi: *Modeling Reactive Systems with Statecharts: the STATEMATE approach*, McGraw Hill, 1998

P. Atzeni et al.: *Basi di Dati*, McGraw Hill, 2014

**Modalità di esame:** Svolgimento di prova scritta con: esercizio di progettazione con StateCharts esercizi di progettazione di Basi di Dati. Progetto di sviluppo di un sistema informatico in Eiffel. Discussione orale.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

 **Program:** Test driven design. Statecharts. Basi di dati.

**Learning objectives:** This module aims at providing to students the fundamental concepts needed during informatics systems development.

**Text books:**

L. Koskela: *Test Driven*, Manning, 2007

D. Harel, M. Politi: *Modeling Reactive Systems with Statecharts: the STATEMATE approach*, McGraw Hill, 1998

P. Atzeni et al.: *Basi di Dati*, McGraw Hill, 2014

**Exam mode:** Written exam with: StateCharts design exercise. Database design exercises. Project developing an informatics system in Eiffel. Oral discussion.

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## RELATIVITÀ E COSMOLOGIA

2° semestre

8 CFU – settore FIS/05 – 64 ore di lezione in aula

Docente N. Vittorio

**Programma:** Il principio di equivalenza. Campi gravitazionali deboli. Moto geodetico. Significato fisico della metrica. Arrossamento delle righe spettrali. Forze inerziali. Tensori. Derivazione covariante. Il tensore di Riemann-Christoffel. Equazione di campo nel vuoto. Il tensore energia-impulso. Equazione di campo in presenza di materia. Leggi di conservazione. La soluzione di Schwarzschild: coordinate isotrope; moto planetario; deflessione della luce. L'espansione di Hubble. La radiazione cosmica di fondo. La metrica di Friedmann-Robertson-Walker. Nucleosintesi primordiale degli elementi leggeri. Il problema della distanza in Cosmologia. Il modello standard in cosmologia e gli scenari inflazionati.

**Obiettivi di apprendimento:** Conoscenza della relatività generale classica e degli strumenti del calcolo tensoriale. Competenze mirate alla risoluzione di problemi semplici in relatività generale. Conoscenze dei modelli astrofisici che richiedono una trattazione general-relativistica (collasso gravitazionale, onde gravitazionali, cosmologia teorica) e delle osservazioni che consentono di validare questi modelli. Competenze mirate alla predizione di alcuni osservabili dell'astrofisica e della cosmologia moderna.

**Testi consigliati:**

J. V. Narlikar: *An introduction to Relativity*, Cambridge University Press, 2010

S. Carroll: *Spacetime and Geometry: an introduction to General Relativity*, Addison-Wesley, 2003

**Modalità di esame:** Prova orale.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

**Program:** The equivalence principle. Weak gravitational field. Geodesic motion. Physical interpretation of the metric tensor. Reddening of spectral lines. Inertial forces. Tensors. Covariant derivatives. The Riemann-Christoffel tensor. Field equation in vacuum. The energy-momentum tensor. Field equations in the presence of matter. Conservation laws. The Schwarzschild solution: isotropic coordinates; planetary motion; light deflection. The Hubble expansion. The Cosmic Microwave Background radiation. The Friedmann-Robertson-Walker metric. Primordial nucleosynthesis. The distance problem in cosmology. The standard model in cosmology and inflationary scenarios.

**Learning objectives:** Knowledge of modern theories for the large scale structure formation in the universe. Knowledge of the basic statistic tools, e.g. correlation function and power spectrum, in the framework of Gaussian stochastic processes. Knowledge of the cosmological models dominated by dark matter and dark energy. Skills aimed to characterize primordial density fluctuation, their evolution and their test against observations. Knowledge of the main processes responsible for CMB anisotropies, in the context of general relativity. Skills aimed to the interpretation of the COBE, WMAP, Planck satellite main results.

**Text books:**

J. V. Narlikar: *An introduction to Relativity*, Cambridge University Press, 2010

S. Carroll: *Spacetime and Geometry: an introduction to General Relativity*, Addison-Wesley, 2003

**Exam mode:** Oral exam.

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## STATISTICAL LEARNING AND HIGH DIMENSIONAL DATA

2° semestre

8 CFU – settore MAT/06 – 64 ore di lezione in aula

Docente D. De Canditiis

**Programma:** INTRODUZIONE GENERALE: Problemi supervised e problemi unsupervised. Il workflow di un problema di analisi dati. Esempi vari tratti dal Cap 1. LA REGRESSIONE: Cosa è la regressione e perché usarla. La definizione di Loss function e di Risk function. Analisi delle Loss function più comuni: L1, L2, quantile, Vapkin's e Huber. Definizione di Bias e Varianza, discussione e primi esempi di compromesso tra Bias e Varianza (il metodo dei vicini più vicini e il metodo lineare). La maledizione della dimensionalità. (Cap 2) LA REGRESSIONE LINEARE MULTIPLA: Interpretazione algebrica ed interpretazione geometrica della soluzione ai minimi quadrati. Sotto l'ipotesi di rumore bianco dimostrazione delle proprietà distribuzionali dello stimatore ai minimi. (Par 3.2) Utilizzo delle proprietà distribuzionali dello stimatore ai minimi quadrati per la costruzione di test di ipotesi e di intervalli di confidenza e di predizione. Il teorema di Gauss-Markov (Par. 3.2.2) Dalla regressione semplice alla regressione multipla, interpretazione dei coefficienti (Par. 3.2.3) Implementazione dell'algoritmo 3.1 di pag 54. TECNICHE PER IL TRATTAMENTO DI DATI AD ALTA DIMENSIONE: Discussione delle problematiche in caso di linearità e/o nel caso  $p > n$ . Discussione generale sulle possibili tecniche da adottare nel caso di dati ad

alta dimensione, specializzazione di queste tecniche al caso del modello lineare con funzione perdita L2. Accenno ai seguenti criteri di selezione del modello:  $C_p$  (Mallow's), AIC (Akaike Information Criterion), BIC (Bayesian Information Criterion), MDL (Minimum Description Length). Il metodo della Best Subset Selection, vantaggi e svantaggi. Su un data set sintetico verifica della sua forte variabilità. Il metodo della Forward Stepwise Selection, vantaggi e svantaggi. Confronto con la Best Subset Selection su un data set sintetico, il comando `stepwiselm` di matlab. Il metodo della Forward Stagewise Regression, vantaggi e svantaggi. La tecnica della PCA (Principal Component Analysis) per la riduzione della dimensionalità di un set di dati qualsiasi. Il metodo della PC regression, vantaggi e svantaggi. Il Partial Least Square, e loro confronto con la PC regression. La tecnica della supervised PC regression. La Ridge regression come metodo di penalizzazione e dal punto di vista geometrico. Il concetto generale di degree of freedom per un metodo di supervised learning. Il calcolo del df nel caso della ridge regression. Equivalenza tra la scelta del parametro di penalizzazione della Ridge e la regolarizzazione iterativa ad arresto precoce. La penalizzazione LASSO. Giustificazione numerica e geometrica della scelta della norma  $l_1$  per avere soluzioni sparse. Soluzione esplicita del problema di regressione lineare con penalizzazione LASSO nel caso di matrice design ortonormale. Algoritmo Pathwise coordinate optimization per la soluzione del problema di regressione lineare con penalizzazione LASSO nel caso di matrice design generale. Nota sulla normalizzazione delle colonne della matrice design e commenti sulla routine di matlab 'lasso.m'. Interpretazione bayesiana della penalty lasso. La scelta del parametro di regolarizzazione e possibile stima del degree of freedom per il problema di regressione lineare con penalty lasso. Proprietà teoriche dello stimatore lasso nel caso di modello lineare. Dimostrazione della slow e della fast convergence rate del prediction error. Analisi della subroutine lasso di matlab esempio di applicazione del metodo al dataset prostate cancer data e ricostruzione completa della tavola 3.3 del libro di testo. Possibili miglioramenti del metodo Lasso: elastic net, relaxed lasso, adaptive lasso. Le penalty SCAD e MCP. Commenti ed esempio sintetico per un confronto tra le possibili penalty diverse. Come utilizzare il modello lineare per lavorare con modelli non lineari sia parametrici che non parametrici. La regressione polinomiale a tratti: le regression splines e le smoothing splines.  $C_p$  (Mallow's), AIC (Akaike Information Criterion), BIC (Bayesian Information Criterion), MDL (Minimum Description Length). Il metodo della Best Subset Selection, vantaggi e svantaggi. Su un data set sintetico verifica della sua forte variabilità. Il metodo della Forward Stepwise Selection, vantaggi e svantaggi. Confronto con la Best Subset Selection su un data set sintetico, il comando `stepwiselm` di matlab. Il metodo della Forward Stagewise Regression, vantaggi e svantaggi. La tecnica della PCA (Principal Component Analysis) per la riduzione della dimensionalità di un set di dati qualsiasi. Il metodo della PC regression, vantaggi e svantaggi. Il Partial Least Square, e loro confronto con la PC regression. La tecnica della supervised PC regression. La Ridge regression come metodo di penalizzazione e dal punto di vista geometrico. Il concetto generale di degree of freedom per un metodo di supervised learning. Il calcolo del df nel caso della ridge regression. Equivalenza tra la scelta del parametro di penalizzazione della Ridge e la regolarizzazione iterativa ad arresto precoce. La penalizzazione LASSO. Giustificazione numerica e geometrica della scelta della norma  $l_1$  per avere soluzioni sparse. Soluzione esplicita del problema di regressione lineare con penalizzazione LASSO nel caso di matrice design ortonormale. Algoritmo Pathwise coordinate optimization per la soluzione del problema di regressione lineare con penalizzazione LASSO nel caso di matrice design generale. Nota sulla normalizzazione delle colonne della matrice design e commenti sulla routine di matlab 'lasso.m'. Interpretazione bayesiana della penalty lasso. La scelta del parametro di regolarizzazione e possibile stima del degree of freedom per il problema di regressione lineare con penalty lasso. Proprietà teoriche dello stimatore lasso nel caso di modello lineare. Dimostrazione della slow e della fast convergence rate del prediction error. Analisi della subroutine lasso di matlab esempio di applicazione del metodo al dataset prostate cancer data e ricostruzione completa della tavola 3.3 del libro di testo. Possibili miglioramenti del metodo Lasso: elastic net, relaxed lasso, adaptive lasso. Le penalty SCAD e MCP. Commenti ed esempio sintetico per un confronto tra le possibili penalty diverse. Come utilizzare il modello lineare per lavorare con modelli non lineari sia parametrici che non parametrici. La regressione polinomiale a tratti: le regression splines e le smoothing splines.

**Obiettivi di apprendimento:** Fornire agli studenti le conoscenze teoriche e le intuizioni di base necessarie per utilizzare ed eventualmente sviluppare efficaci soluzioni per l'analisi di dati in problemi reali e di diversa natura.

**Testi consigliati:**

T. Hastie, R. Tibshirani, J. Friedman: *The Elements of Statistical Learning*, Springer, 2009

**Modalità di esame:** Gli studenti dovranno elaborare un progetto di analisi dati che verrà esaminato dal docente. Inoltre gli studenti dovranno rispondere ad alcune domande riguardanti l'intero programma in modalità orale.

 **Program:** GENERAL INTRODUCTION: Supervised and unsupervised problems. The workflow of a data analysis problem. Various examples taken from Chap 1. REGRESSION: What is regression and why use it. The definition of loss function and risk function. Analysis of the most common loss functions: L1, L2, quantile, Vapkin's and Huber. Definition of Bias and Variance, discussion and first examples of compromise between Bias and Variance (the method of the closest neighbors and the linear method). The curse of dimensionality. (Ch 2) MULTIPLE LINEAR REGRESSION: Algebraic interpretation and geometric interpretation of the least squares solution. Under the hypothesis of white noise demonstration of the distributional properties of the estimator at the minimum. (Par 3.2) Use of the least squares estimator's distributional properties for the construction of hypothesis tests and confidence and prediction intervals. The Gauss-Markov theorem (Par. 3.2.2) From simple regression to multiple regression, interpretation of the coefficients (Par. 3.2.3) Implementation of the algorithm 3.1 on page 54. TECHNIQUES FOR THE TREATMENT OF HIGH-DIMENSIONAL DATA: Discussion of the problems in case of collinearity and / or in the case  $p > n$ . General discussion on the possible techniques to be adopted in the case of high-dimensional data, specialization of these techniques in the case of the linear model with L2 loss function. General discussion on possible techniques for making model selection, study of Cross Validation. (Par 7.1-7.2-7.10) I refer to the following model selection criteria:  $C_p$  (Mallow's), AIC (Akaike Information Criterion), BIC (Bayesian Informaion Criteiron), MDL (Minimum Description Lenght). The Best Subset Selection method, advantages and disadvantages. On a synthetic data set, it checks its strong variability. The Forward Stepwise Selection method, advantages and disadvantages. Comparison with the Best Subset Selection on a synthetic data set, matlab's stepwiselm command. The Forward Stagewise Regression method, advantages and disadvantages. The PCA (Principal Component Analysis) technique for reducing the dimensionality of any data set. The PC regression method, advantages and disadvantages. Partial Least Square, and their comparison with PC regression. The technique of supervised PC regression. Ridge regression as a penalization method and from a geometric point of view. The general concept of degree of freedom for a supervised learning method. The calculation of the df in the case of the ridge regression. Equivalence between the choice of the Ridge penalty parameter and the iterative regularization at early stop. The LASSO penalty. Numerical and geometric justification of the choice of the standard  $l_1$  to have scattered solutions. Explicit solution of the linear regression problem with LASS penalty in the case of orthonormal design matrix. Pathwise coordinate optimization algorithm for the solution of the linear regression problem with LASS penalty in the case of a general design matrix. Note on the normalization of the columns of the design matrix and comments on the matlab routine 'lasso.m'. Bayesian interpretation of the penalty lapse. The choice of the regularization parameter is a possible estimate of the degree of freedom for the linear regression problem with penalty lapse. Theoretical properties of the lasso estimator in the case of a linear model. Demonstration of the slow and fast convergence rate of the prediction error. Analysis of the matlab lasso subroutine example of application of the method to the prostate cancer data dataset and complete reconstruction of table 3.3 of the textbook. Possible improvements of the Lasso method: elastic net, relaxed lasso, adaptive lasso. SCAD and MCP penalties. Comments and summary example for a comparison of different possible penalties. How to use the linear model to work with both parametric and non-parametric nonlinear models. Polynomial piecewise regression: regression splines and smoothing splines.

**Learning objectives:** To provide students with the theoretical knowledge and the basic insights necessary to use and eventually develop effective solutions for the analysis of data in real and different problems.

**Text books:**

T. Hastie, R. Tibshirani, J. Friedman: *The Elements of Statistical Learning*, Springer, 2009

**Exam mode:** Students will have to elaborate a data analysis project which will be examined by the teacher. In addition, students will have to answer some questions regarding the entire program in oral form.

## STORIA DELLA SCIENZA

2° semestre

8 CFU – settore MAT/04 – 64 ore di lezione in aula – supporti: R, S, T

Docente B. Scoppola

 **Programma:** Ripercorrere l'evoluzione della scienza sottolineando i legami tra la scienza ellenistica e la rinascita della scienza in età moderna. Lista degli argomenti: Geometria Forma e dimensioni della

Terra Geografia matematica Gravitazione Scienza e navigazione Teoria atomico-molecolare Evoluzione biologica Studio del sistema nervoso

**Obiettivi di apprendimento:** Attraverso la presentazione di alcuni temi, si chiede agli studenti di imparare a leggere le relazioni tra la scienza ellenistica, la rinascita della scienza moderna e gli sviluppi della scienza dell'ultimo secolo.

**Testi consigliati:**

L. Russo: *Stelle atomi e velieri*, Mondadori Università, 2015

L. Russo: *La rivoluzione dimenticata*, Feltrinelli, 2021

Elementi di Euclide

Appunti del corso

**Modalità di esame:** Prova orale. Gli studenti discuteranno una tesina su un argomento a loro scelta, e poi discuteranno brevemente qualche argomento scelto dal docente. Sarà valutata la capacità di stabilire connessioni tra lo stato attuale delle teorie scientifiche e la storia delle medesime teorie.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

 **Program:** To revise the evolution of the science outlining the links between ellenistic and modern science. Arguments Geometry Shape and dimensions of the Earth Mathematical geography Gravitation Science and gravitation Atomic and molecular theory Biological evolution Study of the nervous system

**Learning objectives:** By the presentation of some specific themes, the students should learn to read the relations between the ellenistic science, the modern science and the recent developments of the science in the last century.

**Text books:**

L. Russo: *Stelle atomi e velieri*, Mondadori Università, 2015

L. Russo: *La rivoluzione dimenticata*, Feltrinelli, 2021

Euclid's elements

**Exam mode:** Oral exam. The students will discuss a subject of their choice, and then will answer to some question posed by the teacher. The knowledge of the relations between the current state of a scientific theory and its history will be particularly evaluated.

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

## SUPERFICI DI RIEMANN

1° semestre

8 CFU – settore MAT/03 – 64 ore di lezione in aula

Docente M. Mcquillan

 **Programma:** Deformazione di superficie di Riemann compatte e loro modulo. Rigidità di Thurston dei sistemi dinamici sulla sfera, e topoi associati.

**Testi consigliati:**

A. Douady and J. Hubbard: *A proof of Thurston's topological characterisation of rational functions*, Acta Mathematica, 1993

Grothendieck: *Seminaire de la Geometrie Algebrique du Bois-Marie*, Springer Verlag, 1965-1966

**Modalità di esame:** Prova orale.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

 **Program:** Deformations of Riemann surfaces and their moduli. Thurston rigidity of dynamical systems on the sphere, and their associated topoi.

**Text books:**

A. Douady and J. Hubbard: *A proof of Thurston's topological characterisation of rational functions*, Acta Mathematica, 1993

Grothendieck: *Seminaire de la Geometrie Algebrique du Bois-Marie*, Springer Verlag, 1965-1966

**Exam mode:** Oral exam.

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

## TEORIA DEI GIOCHI E PROGETTO DI RETI

1° semestre

9 CFU – settore MAT/09 – 90 ore di lezione in aula

Docente P. Oriolo

**Programma:** 1. Giochi in forma normale. Equilibri di Nash. Ottimalità di Pareto. Strategie debolmente e strettamente dominanti. Strategie conservative. Payoff e preordini totali. 2. Un'applicazione delle strategie dominanti: i meccanismi di asta. Aste di primo prezzo e aste secondo prezzo (o di Vickrey). Un'applicazione degli equilibri di Nash: la legislazione di incidente. 3. Giochi antagonistici e a somma zero. Punti di sella ed equilibri di Nash per giochi a somma zero. Giochi strettamente competitivi. 4. Estensione in strategia mista di un gioco antagonistico. L'esistenza di un equilibrio nella strategia mista per i giochi antagonistico e valore del gioco. Il teorema di von Neumann. Bluff, underbid e poker di Kuhn. 5. I giochi cooperativi. Nucleo di un gioco. Il teorema di Bondareva-Shapley. I mercati con utilità trasferibile. Giochi semplici e valore di Shapley. 6. Giochi cooperativi con l'utilità non trasferibile. Il problema dell'house allocation. Il problema dello stable marriage. 7. Facility location: teoria ed algoritmi risolutivi esatti ed approssimati, deterministici e randomizzati. Algoritmo primale duale e meccanismi di cost sharing. Facility location games. 8. Albero ricoprente di peso minimo: teoria e algoritmi esatti. Alberi di Steiner: teoria ed algoritmi risolutivi esatti ed approssimati. Algoritmo primale duale e meccanismi di cost sharing. Giochi con alberi di Steiner.

**Obiettivi di apprendimento:** Lo scopo di questo corso è quello di introdurre la teoria dei giochi e di mostrarne alcune applicazioni con un focus su problemi progetto di reti. Lo studente è introdotto alle conoscenze di base e alle tecniche tipiche della Teoria dei giochi con particolare riferimento ai giochi non-cooperativi, ai giochi cooperativa, alla teoria dei giochi algoritmica.

**Testi consigliati:** Dispense a cura di G. Oriolo.

**Modalità di esame:** Il voto finale si ottiene sommando il voto di una prima prova scritta (fino a 25 punti) e di una seconda prova scritta oppure (molto consigliato) di un progetto (entrambi fino a 5 punti). Le prove scritte si articolano su diversi esercizi, da svolgere in un tempo di 1 ora e 30 minuti, mirati ad appurare la padronanza delle varie parti del programma. Il progetto richiede la soluzione di un problema di Progetto di Reti per il quale vengono fornite istanze test e viene valutato sulla qualità sia della soluzione prodotta che della strategia di soluzione stessa. I progetti devono essere svolti in team.

**Bibliografia di riferimento:**

M. J. Osborne: *An introduction to Game Theory*, Oxford University press, 2003

N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, V.V. Vazirani: *Algorithmic Game Theory*, Cambridge Univ. Press, 2011

**Program:** 1. Games in normal form. Nash equilibria. Pareto optimality. Weakly and strictly dominant strategies. Conservative strategies. Payoff and total preorders. 2. An application of dominant strategies: auction mechanisms. First price and second price (Vickrey) auctions. An application of Nash equilibria: law of accident. 3. Zero-sum games. Saddle points and Nash equilibria for zero-sum games. Strictly competitive games. 4. Extension in mixed strategy of a game. Existence of an equilibrium in mixed strategy for zero-sum games. Von Neumann's theorem. Bluff, underbid and Kuhn's poker. 5. Cooperative games. Core of a game. The theorem of Bondareva-Shapley. Markets with transferable utility. Shapley value. Simple games. 6. Cooperative games with nontransferable utility. The house allocation problem. The stable marriage problem. 7. Facility location: theory and exact approximate algorithms, deterministic and randomized. Primal dual schemes. Facility location games. 8. Minimum spanning tree: theory and exact algorithms. Steiner trees: theory and approximate algorithms. Primal dual schemes. Cost sharing mechanisms. Steiner trees games.

**Learning objectives:** The aim of this class is to introduce game theory and network design. Several examples of games, network problems and games on networks will be presented and solved by means of optimization techniques, mainly linear and integer programming.

**Text books:** Lecture Notes by G. Oriolo.

**Exam mode:** The final grading is obtained by summing the grades obtained in a first written exam (up to 25 pts.) and then either a second written exam or (highly recommended) a project (both up to 5 pts.) The written exam are comprised of a number of exercises and open questions each with a given value. Projects consists in solving a specific assigned network design problem which is evaluated with respect to the quality of both the solution strategy and the solution itself. Projects must be carried out in teams.

### Reference bibliography:

M. J. Osborne: *An introduction to Game Theory*, Oxford University press, 2003

N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, V.V. Vazirani: *Algorithmic Game Theory*, Cambridge Univ. Press, 2011

---

## TEORIA DELLE RAPPRESENTAZIONI 2

2° semestre

8 CFU – settore MAT/02 – 64 ore di lezione in aula

Docente I. Damiani

**Programma:** A seconda degli studenti che frequenteranno il corso proporrò uno tra i due seguenti programmi. Proposta A: Gruppi di Lie e algebre di Lie; la categoria delle algebre di Lie. Algebre di Lie e algebre associative: l'algebra involuante di un'algebra di Lie e il teorema di Poincaré-Birkhoff-Witt. Algebre di Lie nilpotenti e algebre di Lie risolubili. Algebre di Lie semisemplici di dimensione finita: sistemi di radici e classificazione. Rappresentazioni delle algebre di Lie semplici di dimensione finita; caratteri; il teorema di Harish-Chandra. Il teorema di Kostant e il gruppo di Chevalley. Proposta B: Gruppi algebrici. Elementi di geometria algebrica: topologia di Zariski e varietà algebriche; dimensione; spazio tangente. Introduzione ai gruppi algebrici: gruppi algebrici lineari; spazi omogenei; l'algebra di Lie di un gruppo algebrico. Gruppi algebrici commutativi: i tori. Gruppi algebrici risolubili. Gruppi algebrici riduttivi: gruppo di Weyl e sistema di radici; decomposizione di Bruhat; teorema di struttura.

**Obiettivi di apprendimento:** Proposta A: L'obiettivo di questo corso è introdurre allo studio delle algebre di Lie di dimensione finita e delle loro rappresentazioni: come strumento per studiare (linearizzandole) le rappresentazioni dei gruppi di Lie e dei gruppi algebrici; nelle sue molteplici e profonde connessioni con concetti e strutture che compaiono in altri campi della matematica; aprendo ad un vasto e ricco campo di studi. Proposta B: L'obiettivo di questo corso è introdurre alla teoria dei gruppi algebrici lineari sui complessi, alla loro struttura e alla loro teoria delle rappresentazioni: come punto di vista fondamentale nello studio dei gruppi topologici, in particolare quelli compatti; per l'importanza e le molteplici e profonde connessioni con concetti e strutture che compaiono in altri settori; aprendo ad un vasto e ricco campo di studi.

### Testi consigliati:

J.E. Humphreys: *Introduction to Lie algebras and Representation Theory*, Springer-Verlag, 1972. Proposta A

A. Borel : *Linear algebraic groups, second enlarged edition, Graduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag, 1991. Proposta B

T.A. Springer: *Linear algebraic groups, second enlarged edition, Progress in Mathematics*, Birkhäuser, 1998. Proposta B

**Modalità di esame:** Esame orale, eventualmente preceduto da esercizi scritti.

**Program:** According to the students I shall propose one of the two following programs. Proposal A: Lie groups and Lie algebras; the category of Lie algebras. Lie algebras and associative algebras: the enveloping algebra of a Lie algebra and the Poincaré-Birkhoff-Witt theorem. Nilpotent Lie algebras and solvable Lie algebras. Semisimple finite-dimensional Lie algebras: root systems and classification. Representations of simple finite-dimensional Lie algebras; characters; Harish-Chandra theorem. Kostant theorem and Chevalley groups. Proposal B: Elements of algebraic geometry: Zariski topology and algebraic varieties; dimension; tangent space. Introduction to algebraic groups: linear algebraic groups; homogeneous spaces; the Lie algebra of an algebraic group. Commutative algebraic groups: the tori. Solvable algebraic groups. Reductive algebraic groups: Weyl group and root system; Bruhat decomposition; the structure theorem.

**Learning objectives:** Proposal A: This course is meant as an introduction to the study of finite dimensional Lie algebras and their representation theory. Proposal B: The aim of this course is introducing to the theory of complex linear algebraic groups, to their structure and to their representation theory.

### Text books:

J.E. Humphreys: *Introduction to Lie algebras and Representation Theory*, Springer-Verlag 1972. Proposal A

A. Borel : *Linear algebraic groups, second enlarged edition, Graduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag, 1991. Proposal B

T. A. Springer: *Linear algebraic groups, second enlarged edition, Progress in Mathematics*, Birkhäuser, 1998. Proposal B

**Exam mode:** Oral examination (with preliminary written exercises).

---

## WEB MINING AND RETRIEVAL

2° semestre

9 CFU – settore ING-INF/05 – 72 ore di lezione in aula

Docente R. Basili

 **Programma:** Vedasi versione inglese.

**Obiettivi di apprendimento:** Il Web è la più grande collezione di informazione in formato digitale oggi disponibile in modo pubblicamente accessibile. Il corso affronta gli aspetti teorici e realizzativi che ne consentono lo sfruttamento, dai processi di indicizzazione, accesso e recupero di informazione all'acquisizione di conoscenza da grandi collezioni di dati distribuite geograficamente. Le finalità del corso sono di: Approfondire tematiche legate all'apprendimento automatico, presentando i metodi avanzati di induzione di conoscenza dai dati. Conoscere i modelli utilizzati nei motori di ricerca per il WWW e nelle loro declinazioni semantiche (Semantic Enterprise Search). Conoscere le tecnologie avanzate di Intelligenza Artificiale applicata al Web, per il trattamento linguistico dei testi (Natural Language Processing) e sperimentarne la applicazione nei domini del Social Web in problemi di Semantic document management.

### Testi consigliati:

C. D. Manning, P. Raghavan, H. Schütze: *Introduction to Information Retrieval*, Cambridge University Press, 2008

R. Basili, A. Moschitti: *Text Categorization: from Information Retrieval to Support Vector Learning*, ARACNE Editore, 2005

I. Goodfellow, Y. Bengio, A. Courville: *Deep Learning*, MIT press, 2016

Note del docente e articoli scientifici distribuiti durante il corso

**Modalità di esame:** In due test di midterm (equivalenti ad una singola prova orale) vengono utilizzate domande chiuse per la verifica dei temi dell'intero programma, ed una prova di progettazione di un DB. Il progetto verte sullo studio di un modello di Machine Learning avanzato su dati Web o su dati erogati da competizioni di ricerca internazionali (ad es. Kaggle benchmarks, SemEval dataset) e può prevedere lo sviluppo di una corrispondente applicazione Web che orchestra servizi avanzati di Web Mining (ad es. Sentiment Analysis su Twitter) o di Web Retrieval (interfacce di ricerca in linguaggio naturale su dati Web). La verifica delle competenze tende ad studiare le conoscenze acquisite in ampiezza sui temi del programma e la capacità modellistica e di progettazione di metodi avanzati di WB o WR in un dominio.

 **Program:** Basic overview of Machine Learning. Supervised vs. Unsupervised methods. Machine Learning Metrics and Evaluation. Introduction to document modelling: from Information Retrieval to Natural Language Processing models of free texts. Language Models. Markov processes. Generative models: HMM. Use Case: Probabilistic POS tagging PAC Learnability. Perceptron SVM. Hard Margin. Soft margin SVM. Kernels. Polynomial and Gaussian Kernels. Sequence Kernels. Kernel for NLP Tree Kernels. Semantic Tree kernels. Deep Learning. Intro e Background. NNs: tasks and Training. Convolutional Neural Networks. Recurrent Neural Networks. Deep Learning Software Development. NN in Python. Language modelling with neural models. Advanced topics: attention; encoding-decoding; adversarial NNs; transformers. Web Search basics: Overview of the IR process. Crawling. Spam & Ads in Web search. Web Search & Link Analysis. Rank and Relevance: PageRank. HITS. Web and Lexical Semantics: the role of lexical learning in Web scenarios. Opinion Mining e Sentiment Analysis: the tasks, the resources and the training methods. Advanced Statistical NLP for QA (from NERC & SRL to QA). Advanced Machine Learning for the Web: Learning to Rank, Recommending systems.

**Learning objectives:** Introducing and exploring topics related to data-driven algorithms for the induction of knowledge, from large scale data collections. Presenting the major data models underlying Web search engines and for Enterprise Search. Studying technologies and formalisms for the treatment of unstructured Web data through Artificial Intelligence and Natural Language Processing methods and for the linguistic processing of texts and Social Web data Introducing experimental practices in application such as Semantic document management, Web Network Analysis and Opinion Mining.

### Text books:

C. D. Manning, P. Raghavan, H. Schütze: *Introduction to Information Retrieval*, Cambridge University Press, 2008

R. Basili, A. Moschitti: *Text Categorization: from Information Retrieval to Support Vector Learning*, ARACNE

Editore, 2005

I. Goodfellow, Y. Bengio, A. Courville: *Deep Learning*, MIT press, 2016

Teacher's lecture notes and scientific papers distributed during the course

**Exam mode:** Written and Oral. Two midterm exams are used as an equivalent of the final full test, each including questions on all the program. A project on the design of a Web application applying a complex machine learning method to a Web Mining or Web Retrieval task is required, and its oral presentation is considered part of the exam. The project consists in the study and optimization of an advanced Machine Learning model applied to Web data or to dataset used in international competitive benchmarking campaigns (such as Kaggle benchmarks, SemEval dataset, ...).

---