

Meccanica Celeste: dalla dinamica del volo spaziale alla stabilità dei pianeti



di Alessandra Celletti

a.a. 2013/2014



Dipartimento di Matematica
Università di Roma Tor Vergata
celletti@mat.uniroma2.it

Immagine: CICLOPS, JPL, ESA, NASA

SOMMARIO

Il Sistema Solare

La Meccanica Celeste

Il problema dei 2 corpi

Il problema dei 3 corpi

Caos

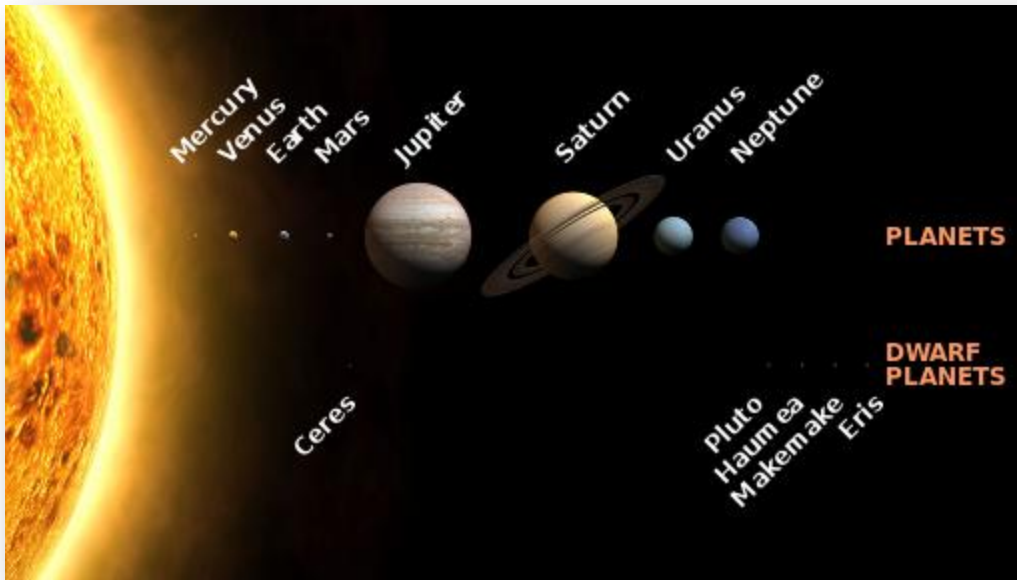
Risonanze orbitali

Le autostrade interplanetarie

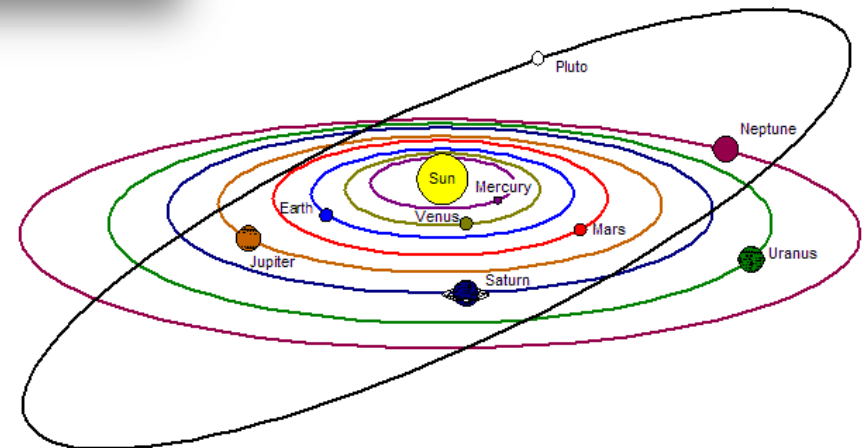
Risonanze spin-orbita

La stabilità dei pianeti

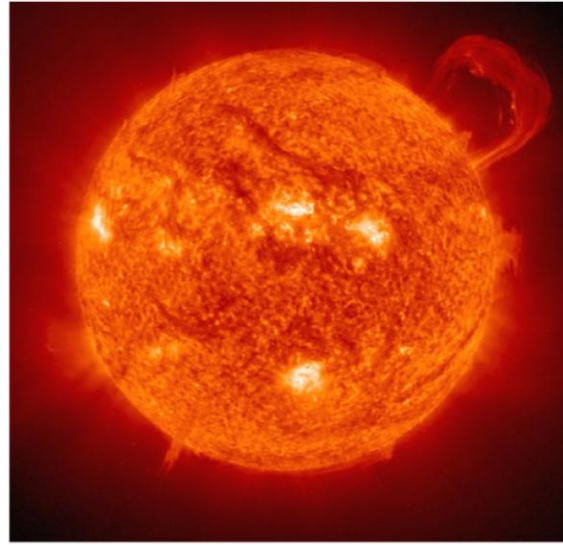
1. Il sistema solare



- Sole
- Pianeti rocciosi
- Pianeti gassosi
- Pianeti nani
- Satelliti
- Asteroidi e comete

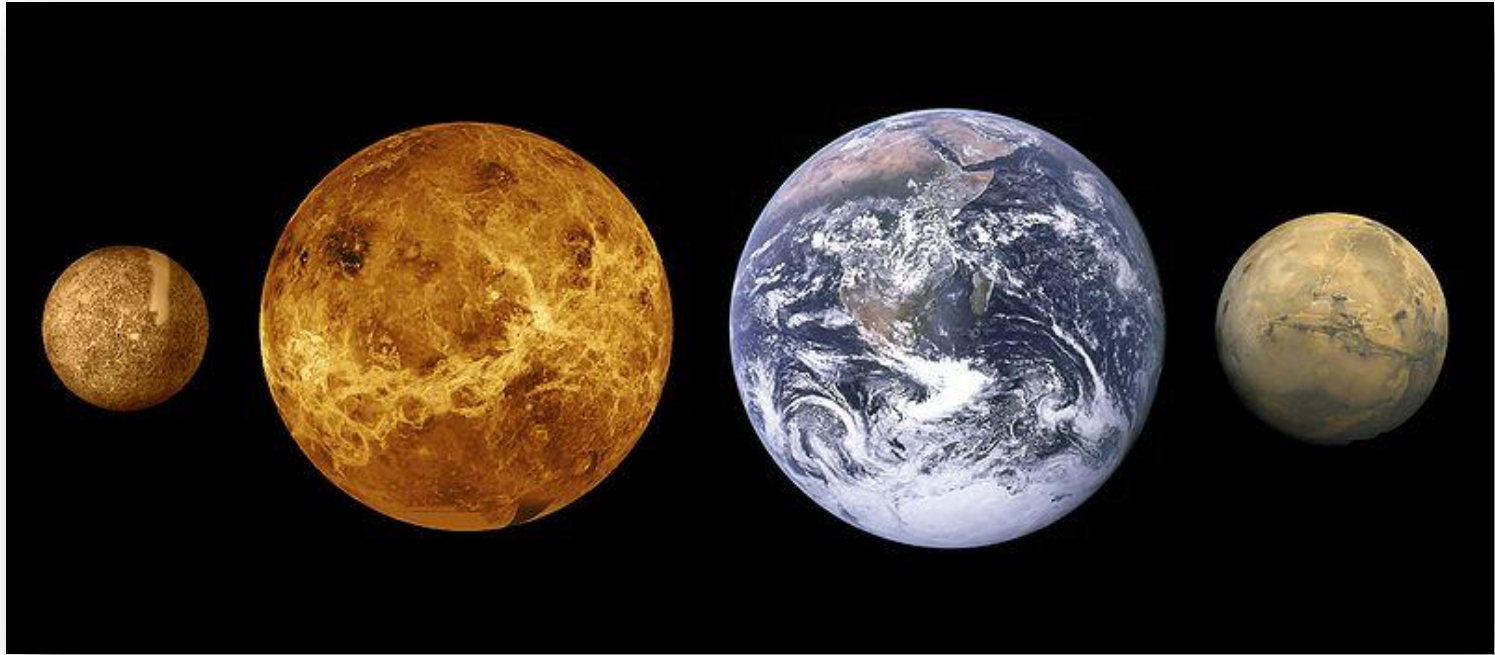


Il Sole



- Stella di media grandezza alla periferia di uno dei bracci a spirale della Via Lattea
- Circa a metà della sua vita (4.5 miliardi di anni)
- Evoluzione in gigante rossa e nana bianca
- Massa: $2 \cdot 10^{30}$ Kg
- Raggio 695,000 Km
- Composizione: H e He

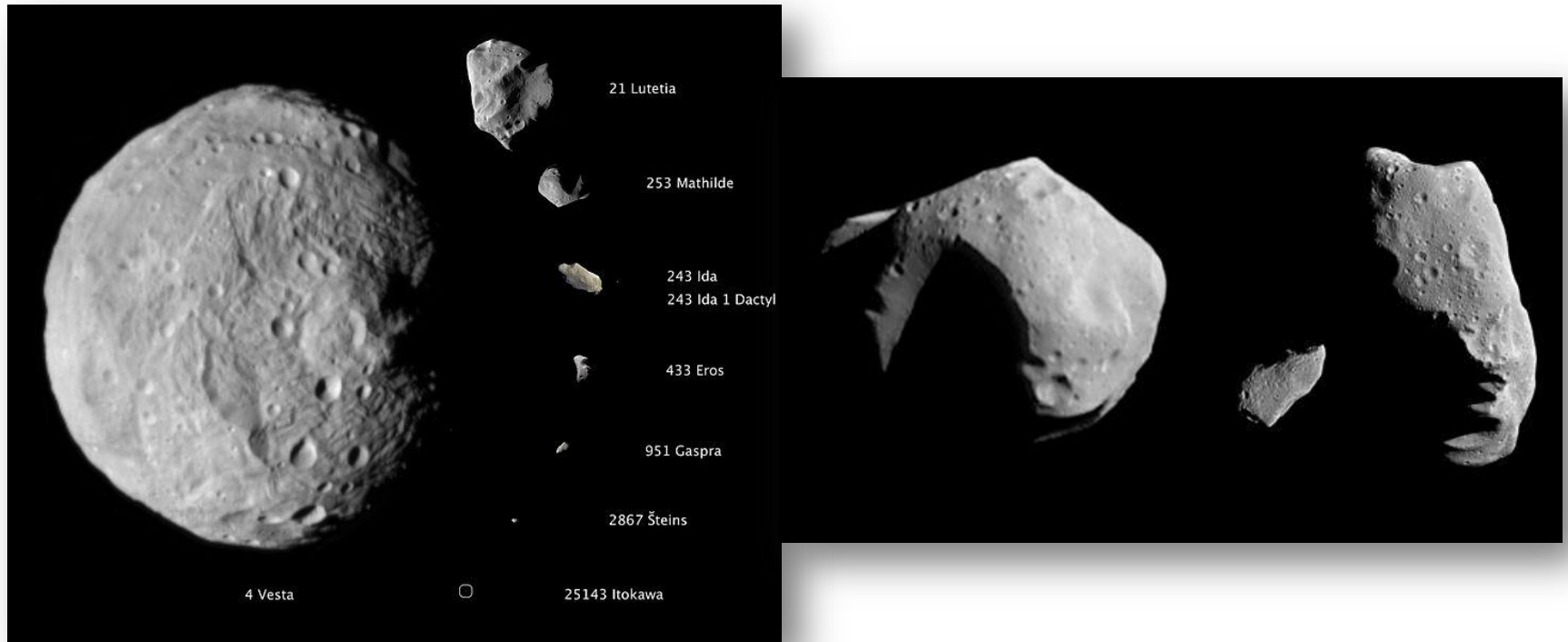
Pianeti rocciosi o interni



Mercurio, Venere, Terra, Marte

Piccoli, rocciosi, nessuno o pochi satelliti

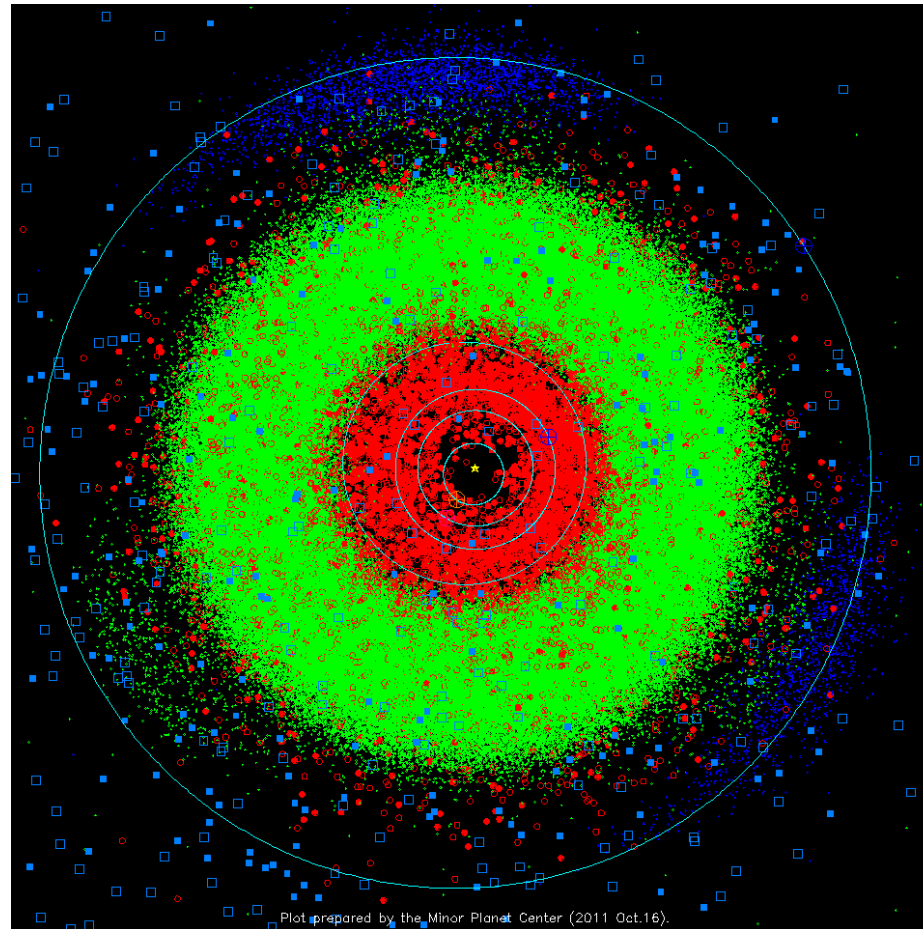
Asteroidi: 580.000 oggetti catalogati



Hanno dimensioni e forme irregolare, qualcuno ha satelliti, formano una fascia tra Marte e Giove; video interessante

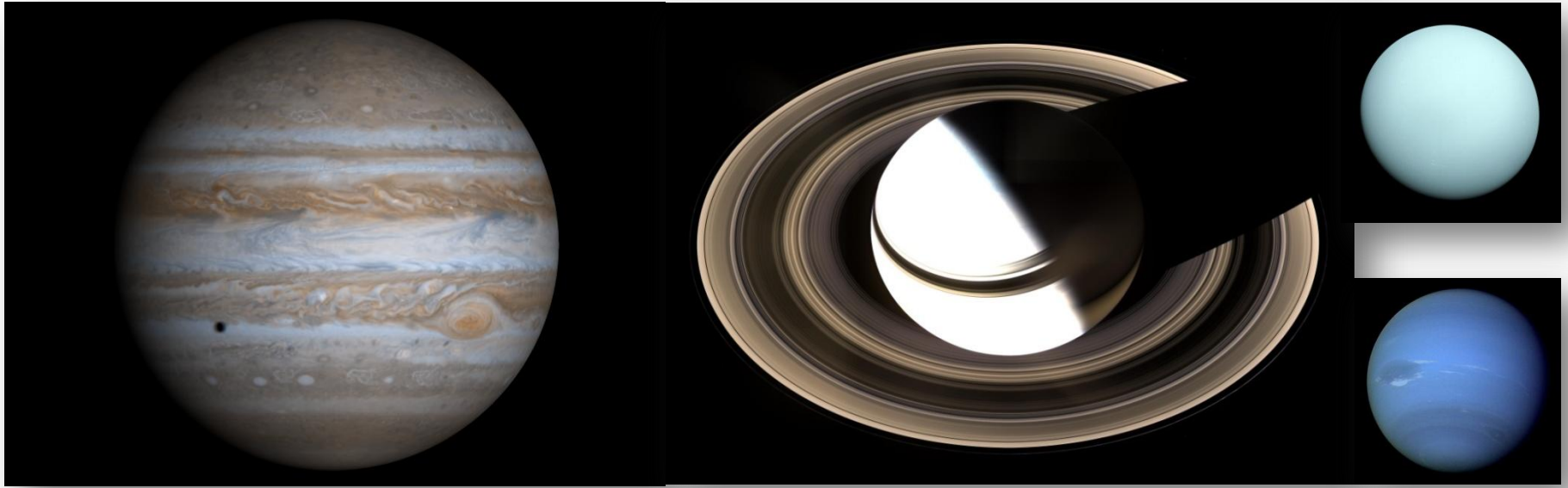


Sistema solare interno



In verde: asteroidi, in rosso: oggetti che si avvicinano alla Terra, quadratini blu: comete.

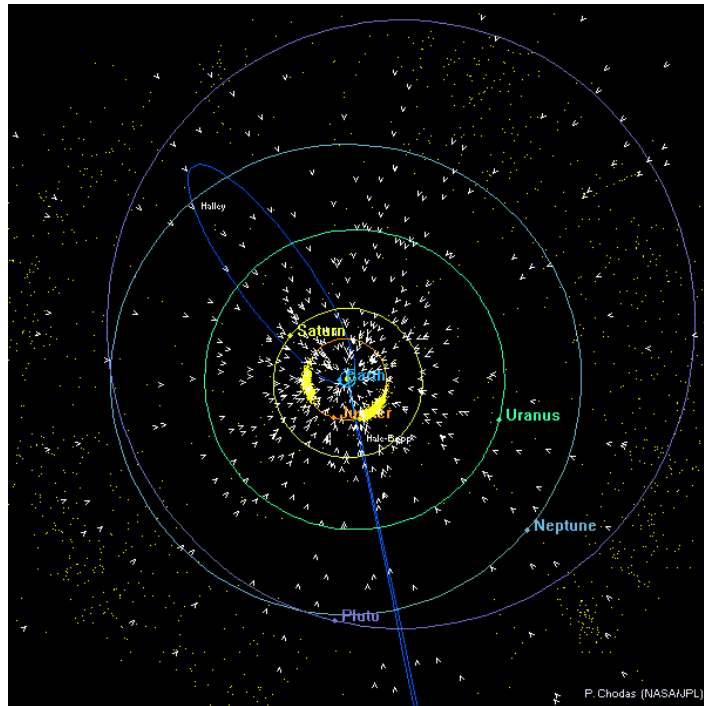
Pianeti gassosi o esterni



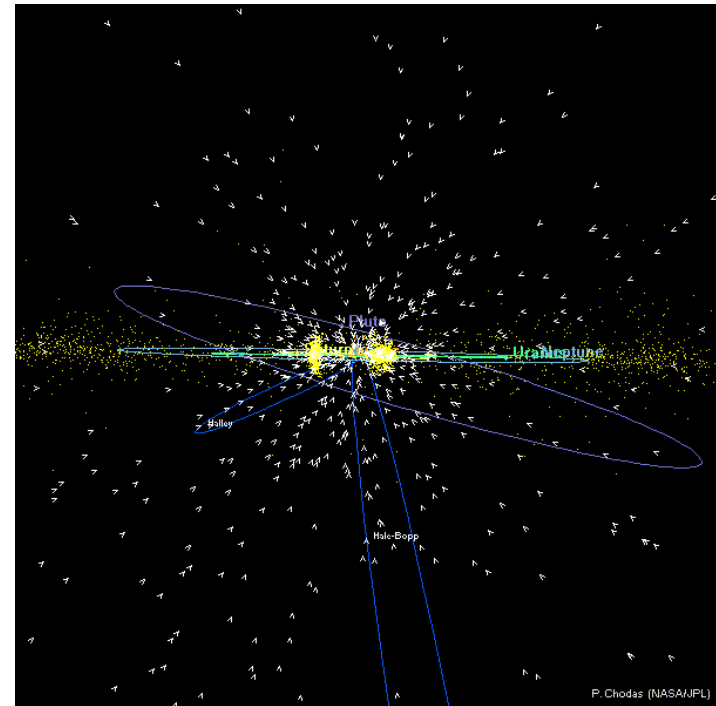
Giove, Saturno, Urano, Nettuno

Grandi, gassosi, con tanti satelliti e con anelli

Sistema solare esterno: in giallo gli asteroidi, in bianco le comete

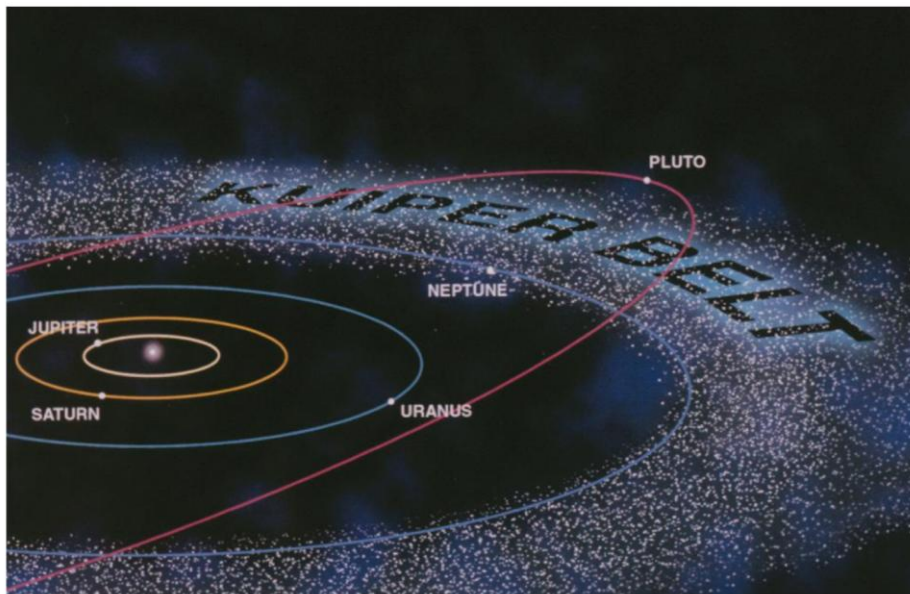


Vista dall'alto



Vista di profilo

Fascia di Kuiper

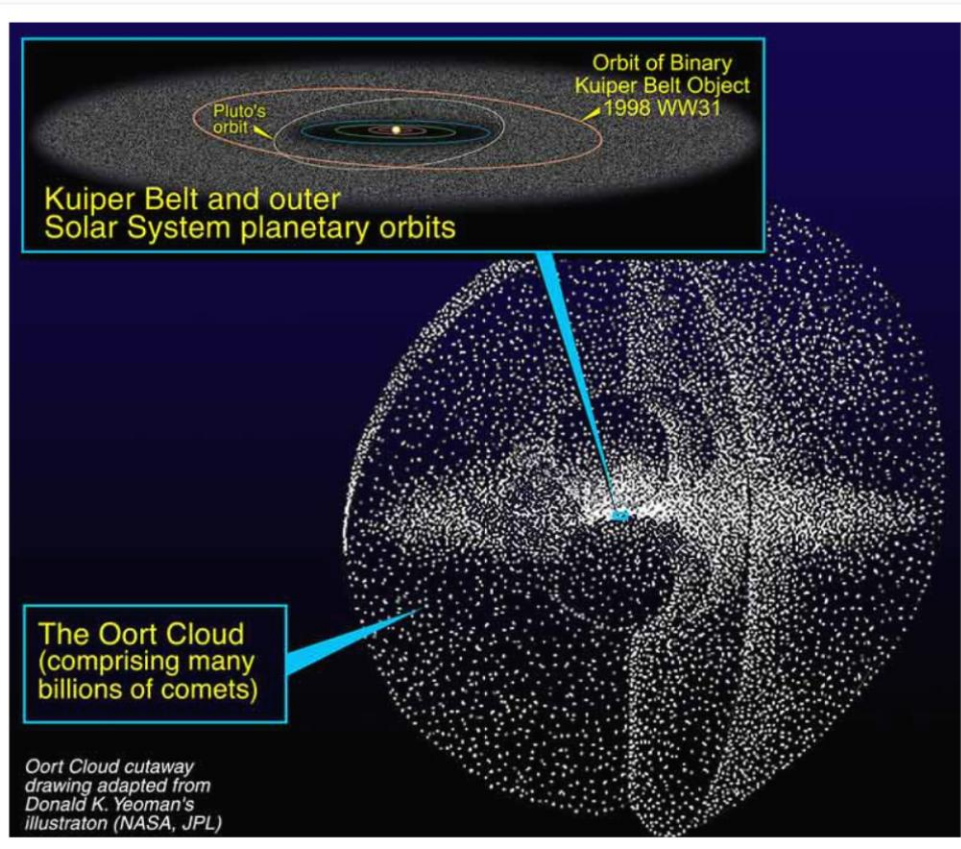


Largest known trans-Neptunian objects (TNOs)



Centinaia (migliaia?) di oggetti rocciosi e ghiacciati (tra cui Plutone), ai confini del sistema solare esterno

Nube di Oort

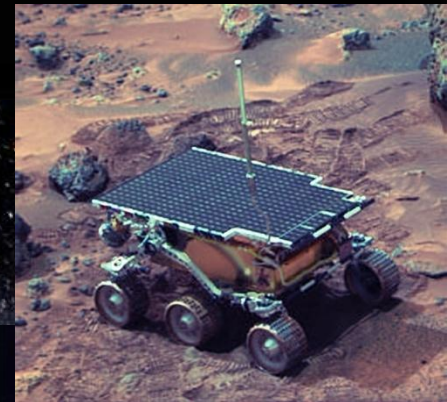


- Tra 30,000 e 100,000 UA
- Miliardi di oggetti ghiacciati
- Serbatoio di comete a *lungo periodo*, lanciate nel sistema solare da forti perturbazioni (avvicinamento ad una stella o passaggio del Sole attraverso una nube molecolare gigante).

1 UA = distanza Sole-Terra = 150 milioni km.

2. La Meccanica Celeste

- La **MECCANICA CELESTE** studia la dinamica degli oggetti del sistema solare: pianeti, satelliti, asteroidi, ecc.
- La **MECCANICA CELESTE** studia anche la dinamica dei pianeti **extrasolari** (n. **992** al 4 Ottobre 2013)
- La **DINAMICA DEL VOLO SPAZIALE** studia il moto dei satelliti artificiali e delle sonde interplanetarie (prima **missione spaziale**: Sputnik 1 il 4 Ottobre 1957)



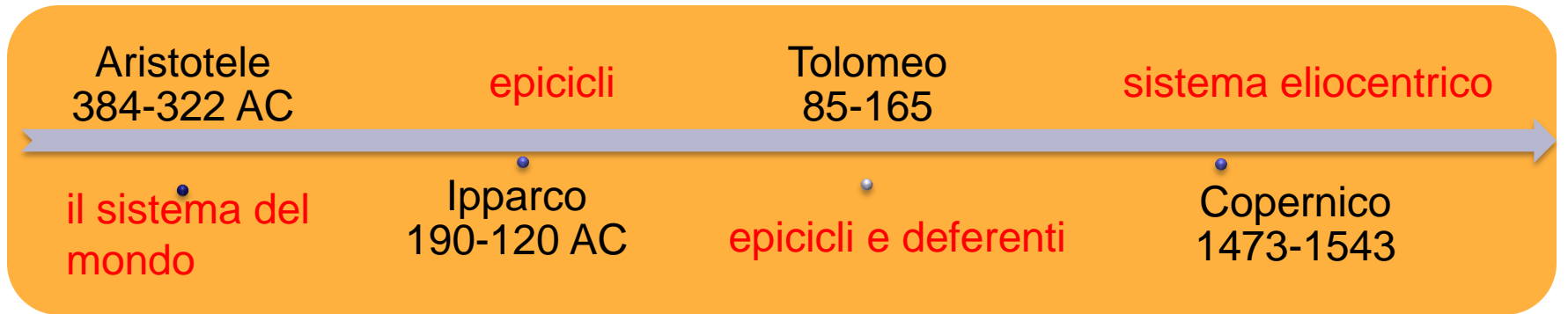
Annefrank

Wild 2

Tempel1



Immagini: NASA/JPL-Caltech/University of Maryland/Cornell, NASA and The Hubble Heritage Team (STScI/AURA), ESA-Hubble Collaboration, E. L. Wright (UCLA), The COBE Project, DIRBE, NASA , GALILEO/NASA/JPL



3. Il problema dei 2 corpi

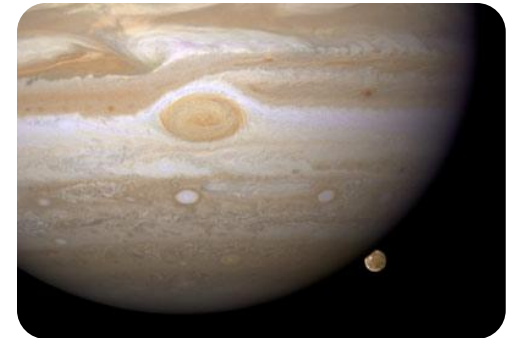
- Modello *semplificato* in cui si considera solo l'interazione gravitazionale tra **2** oggetti

- Legge di Newton:

$$F = - \frac{G M m}{d^2}$$

- Esempi:

- *Sole e Terra*
- *Sole e un asteroide*
- *Sole e una cometa*
- *Pianeta e un satellite (Terra-Luna, ecc.)*
- *Due stelle binarie*



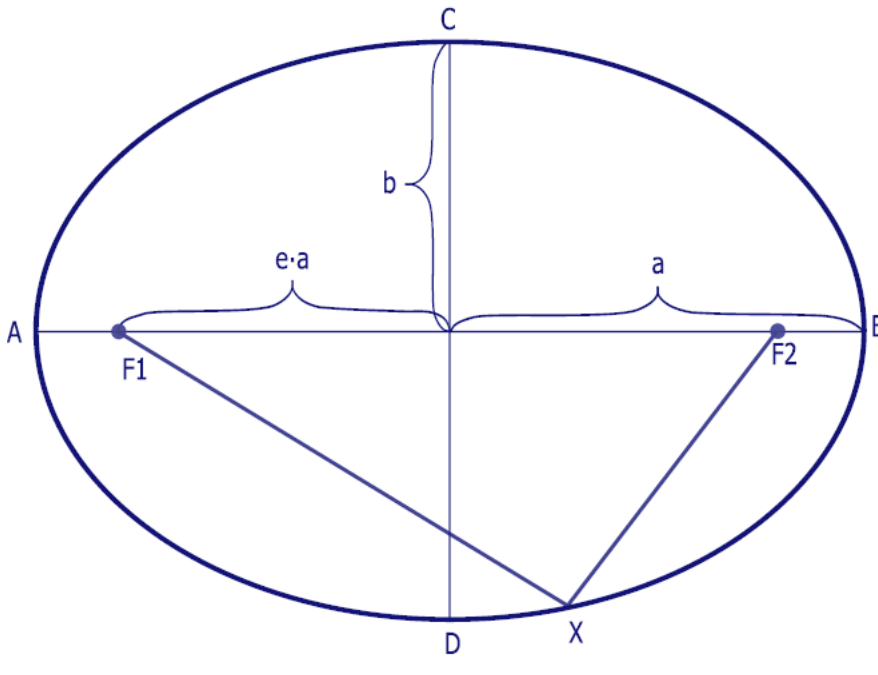
Immagini: NASA, NASA/NEAR

Johannes Kepler (1571-1630)

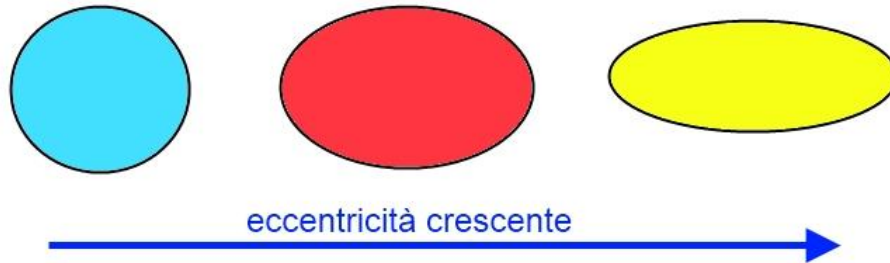
- Kepler o **Keplero**, abbracciò senza esitazioni la teoria eliocentrica di Copernico
- Lasciò numerosi scritti in cui l'astronomia veniva miscelata con la matematica, la fisica, la filosofia e la musica (nell' "***Harmonices Mundi***" ricerca l'armonia fisica dei moti planetari)
- Studiò per anni i dati astronomici sul moto dei pianeti raccolti da **Tycho Brahe** (1546-1601), il quale costruì un osservatorio astronomico chiamato "**Uraniborg**" – "Il castello del cielo"
- Giunse alla conclusione che il movimento dei pianeti è regolato da tre leggi fondamentali

Le leggi di Keplero

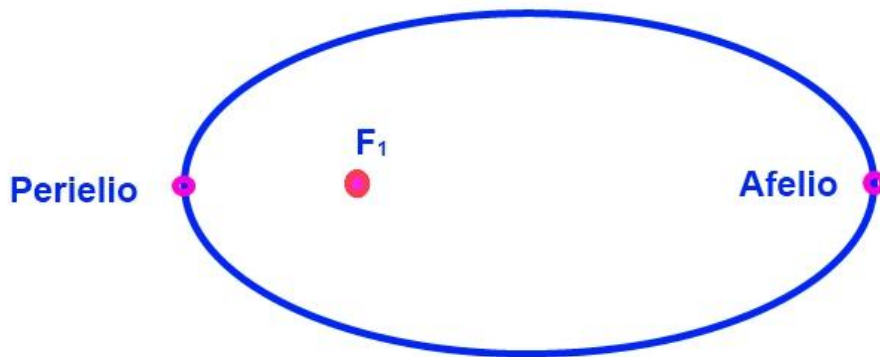
- Tre leggi che risolvono il problema dei due corpi: i pianeti si muovono su **ELLISSI**, sono più **VELOCI** vicino al Sole, il **PERIODO** cresce all'aumentare della distanza
- **Ellisse**: luogo dei punti tali che la somma delle distanze da due punti fissi, detti fuochi, è costante



- F_1, F_2 fuochi
- a = semiasse maggiore
- b = semiasse minore
- e = eccentricità



- Diverse eccentricità:
- $e=0$ cerchio
- $0 < e < 1$ ellisse



- Il Sole in F_1 ,
il fuoco F_2 è vuoto
- Perielio: vicino al Sole
- Afelio: lontano dal Sole

Eccentricità nel sistema solare:

*Terra: 0.017, Giove: 0.048, Mercurio: 0.206, Nettuno: 0.008,
Plutone: 0.249, Luna: 0.055, Europa: 0.0094, Tarvos: 0.5309*

I legge di Keplero:

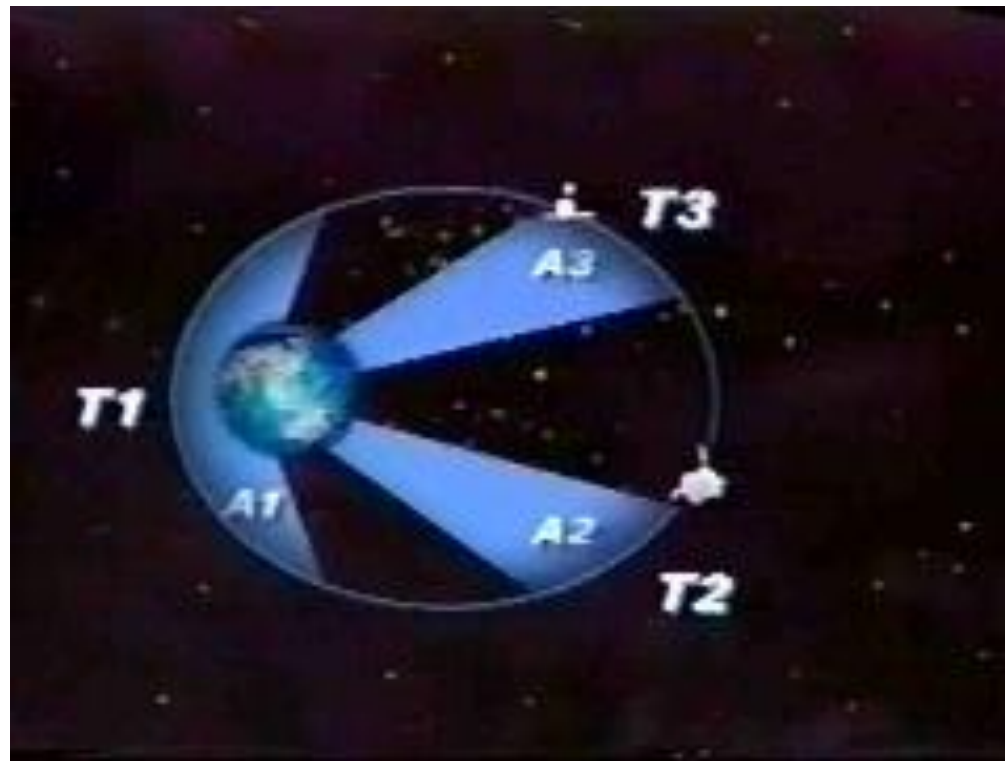
i pianeti si muovono su ellissi di cui il Sole occupa uno dei due fuochi



Il legge di Keplero: i pianeti spazzano aree uguali in tempi uguali



III legge di Keplero:
il quadrato del periodo di rivoluzione è
proporzionale al cubo del semiasse maggiore



III legge di Keplero

- *Il quadrato del periodo P è proporzionale al cubo del semiasse maggiore a*
- Conseguenza: il periodo aumenta con la distanza dal Sole (Mercurio: 88 giorni, Nettuno: 164 giorni)
- Assumendo come unità: 1 UA, 1 anno terrestre:
$$P \text{ (anni)}^2 = a \text{ (UA)}^3$$

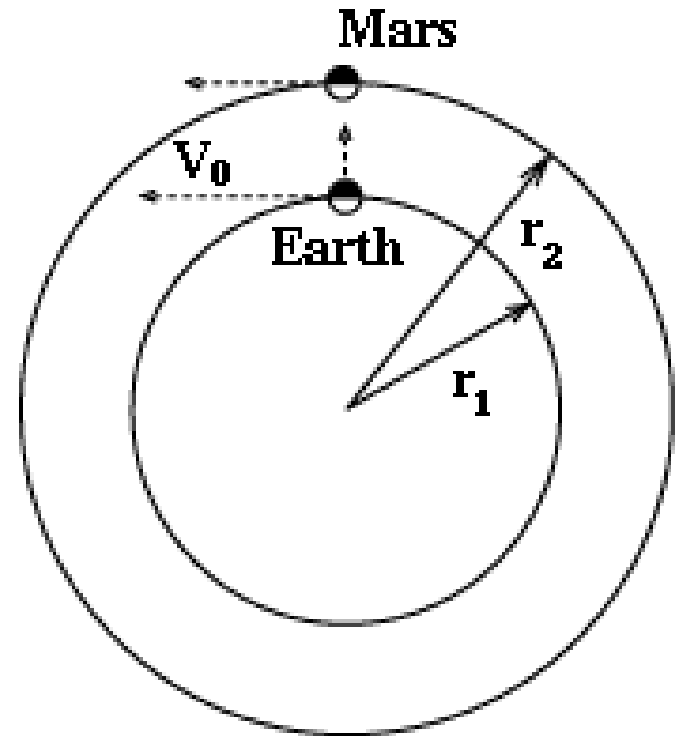
ovvero

$$a \text{ (UA)} = P \text{ (anni)}^{2/3}$$
- Esempio: per Marte $P=1.88$ anni implica
$$a = P^{2/3} = (1.88)^{2/3} = 1.52 \text{ UA}$$

(NASA: $a=1.52371034$ UA)

4. Come NON andare su Marte

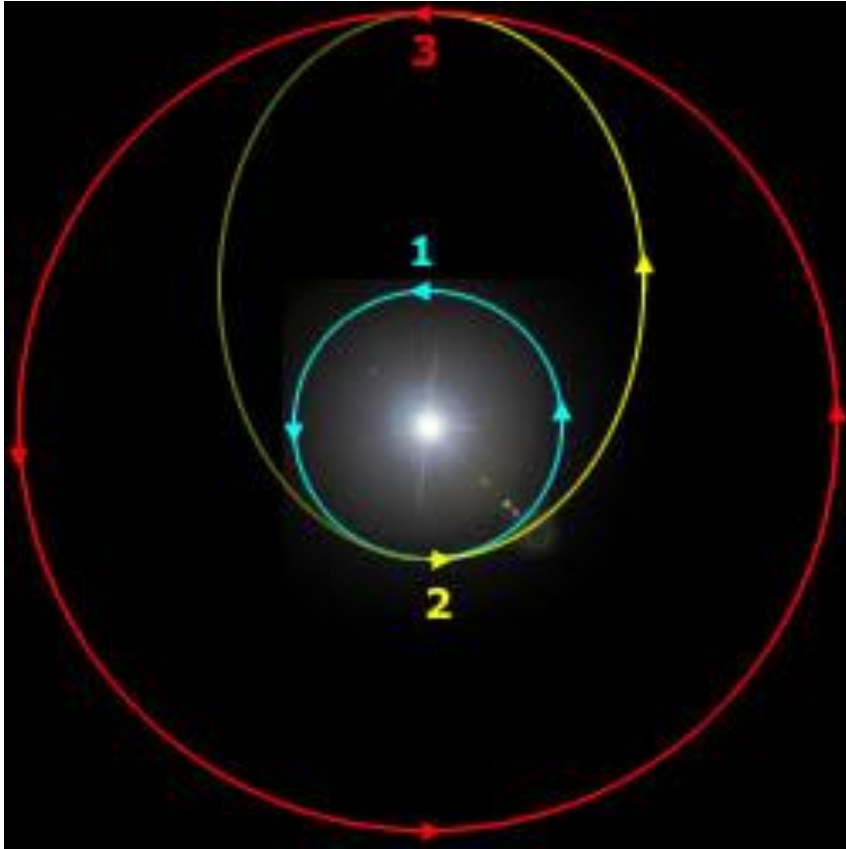
- Fasi della missione: lancio, trasferimento, immissione in orbita, mantenimento orbitale, rientro (se previsto)
- Terra e Marte su orbite circolari di raggi r_1 , r_2
- Aspettare la congiunzione Terra-Marte e andare in linea retta!
 - La gravità curva le traiettorie
 - l'orbita di Marte viene raggiunta perpendicolarmente
 - il Sole influenza gravitazionalmente il satellite.



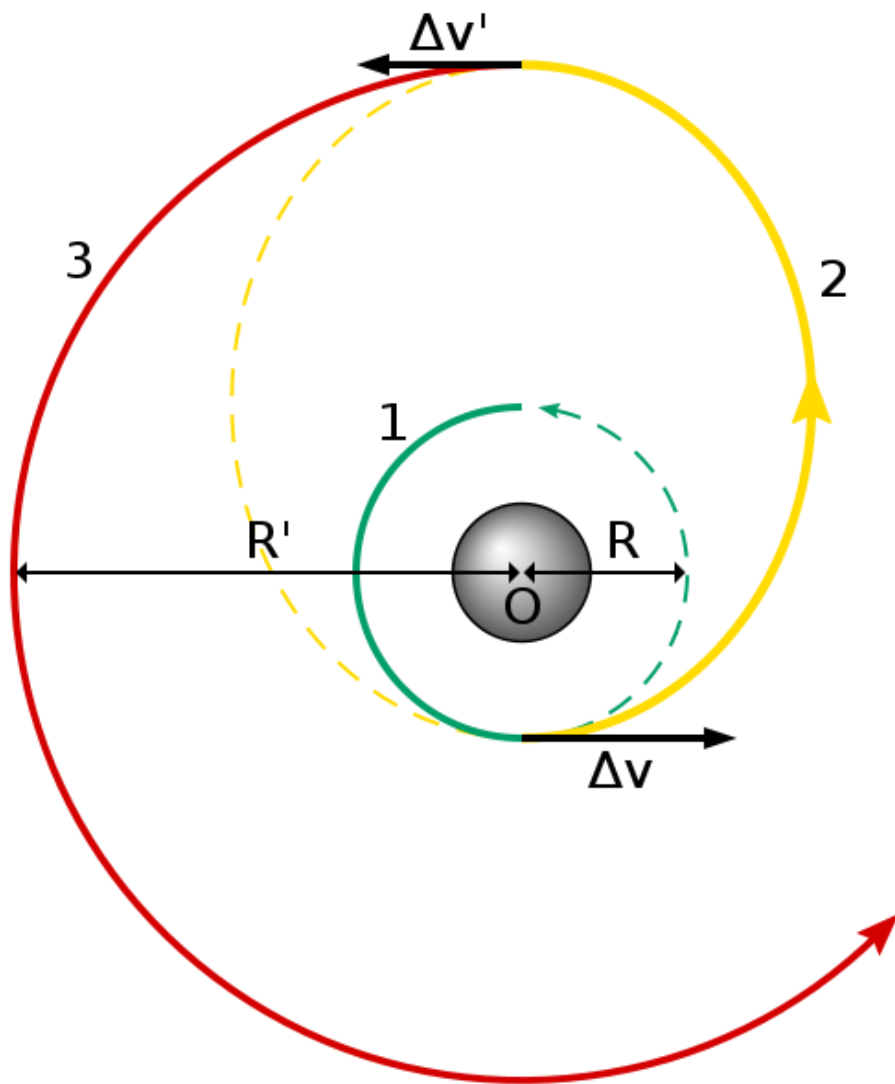
5. Orbite di Hohmann

- **Walter Hohmann** (1880-1945), ingegnere tedesco
- Si interessò al problema di minimizzare il carburante delle missioni spaziali
- Nel 1925 pubblicò “*Die Erreichbarkeit der Himmelskörper*” ovvero “*La raggiungibilità dei corpi celesti*”
- Le orbite di trasferimento di Hohmann vennero utilizzate nel programma Apollo
- Sono attualmente usate per andare sulla Luna e per i viaggi interplanetari

6. Come andare su Marte



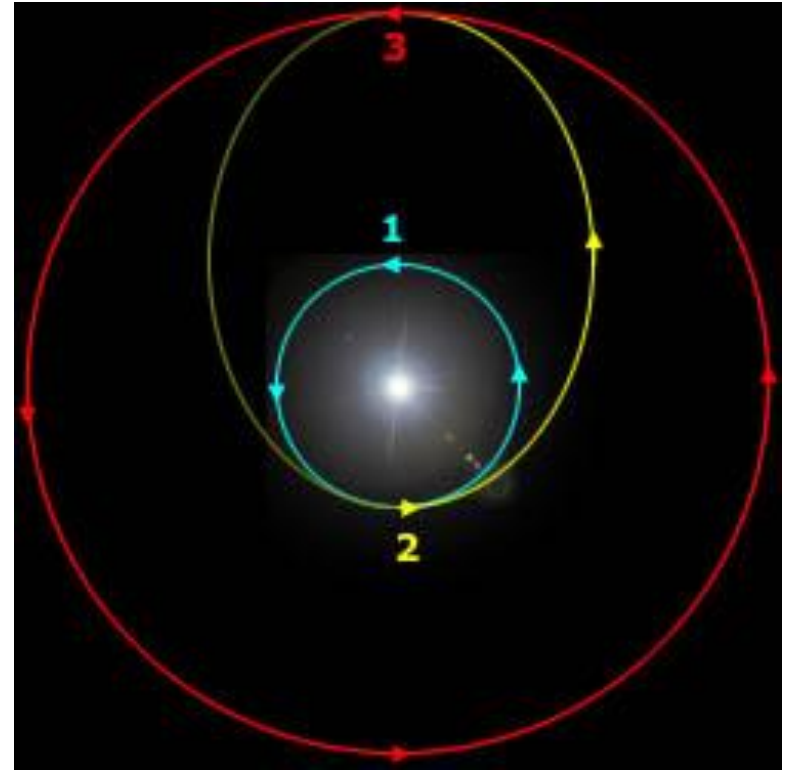
- 1 = orbita iniziale
 - 2 = orbita di trasferimento di Hohmann
 - 3 = orbita bersaglio
-
- Orbita 2 ha perielio su orbita 1 e afelio su orbita 3
 - Trasferimento con minore consumo di carburante



- All'inizio bisogna accendere i motori per immettere il satellite in orbita 2; alla fine bisogna decelerare per immettersi nell'orbita 3 (Δv)
- Δv misura il consumo di carburante = costo della missione
- La **finestra di lancio** (*launch window*) è l'intervallo di tempo utile affinché il satellite possa raggiungere Marte

Durata del volo

- Unità di misura: TERRA:
 $P_{\text{Terra}}=1$ anno, $a_{\text{Terra}}=1$ UA
- $a_{\text{Marte}} = 1.52$ UA
- Distanza complessiva:
 $R = 1 + 1.52 = 2.52$ UA $= 2 a_{\text{tr}}$
- $a_{\text{tr}} = 1.26$ UA
- III legge di Keplero: $P^2/a^3 = 1$
- $a_{\text{tr}}^3 = 2.00 = P^2$
- $P = 1.41$ anni
- $P/2 = 0.707$ anni = 8.5 mesi



Mercurio: 3.5 mesi, Nettuno: 30.61 anni, Luna: 5 giorni

7. Il problema dei 3 corpi

- Cosa succede quando si considerano 3 corpi, ad esempio **Sole-Terra-Giove** ?
- Le leggi di Keplero sono solo **un'approssimazione** del moto dei pianeti, ma il problema dei 3 corpi non si riesce a risolvere esattamente!
- **Teoria matematica delle perturbazioni:** consente di calcolare *approssimazioni successive* della soluzione del problema dei tre corpi
- **Sole-Terra-Giove:** massa(**Giove**) = massa(**Sole**) / 1000 →
2-corpi Sole-Terra
+
piccola perturbazione di Giove

• La serie geometrica:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k = x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

Esempio: $x=1/4$

$$1/4 = 0.25$$

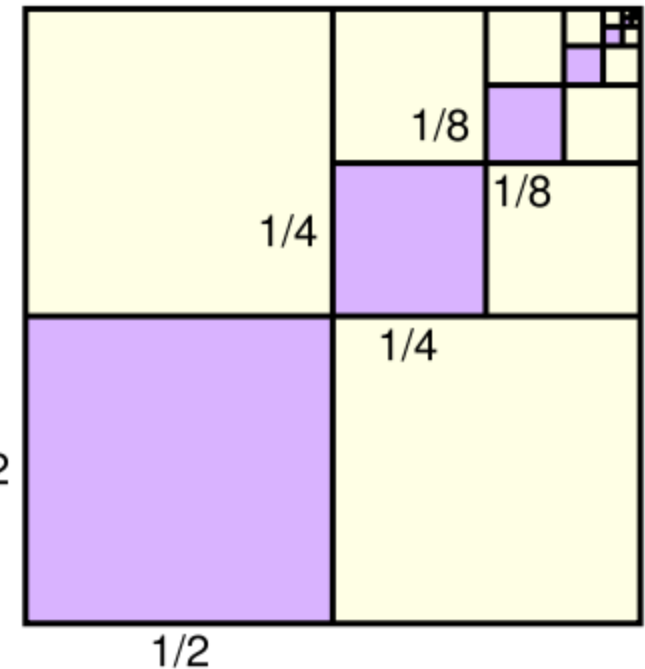
$$1/4 + 1/16 = 0.3125$$

$$1/4 + 1/16 + 1/64 = 0.328125$$

$$1/4 + 1/16 + 1/64 + 1/256 = 0.332031$$

$$1/4 + 1/16 + 1/64 + 1/256 + 1/1024 = 0.333008$$

$$1/4 + 1/16 + 1/64 + 1/256 + 1/1024 + \dots = \mathbf{1/3}$$



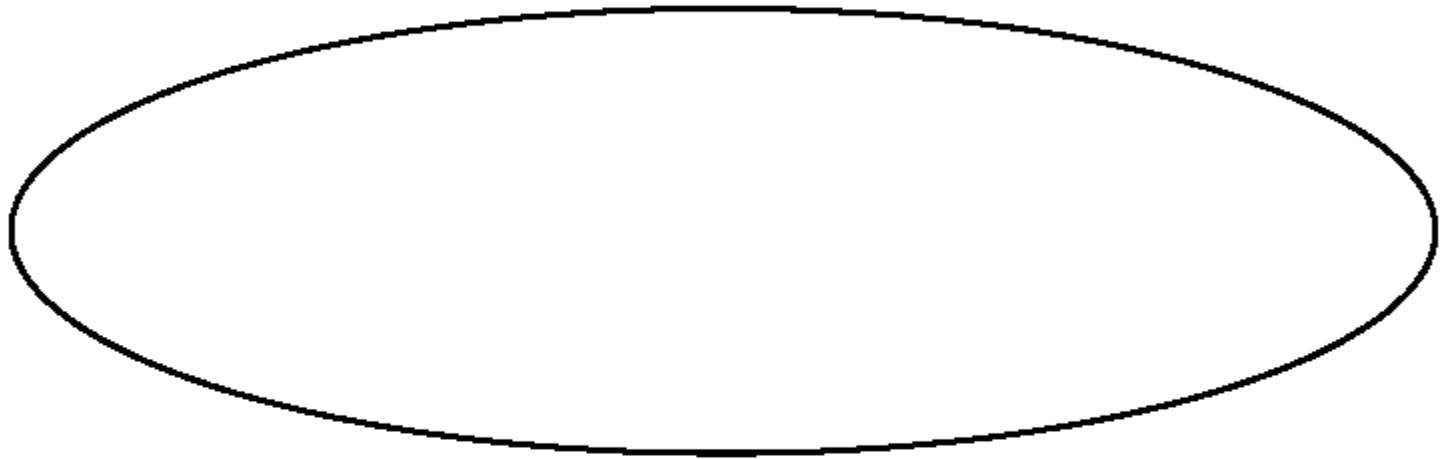
Esempio: $x=1.2$

$$1.2$$

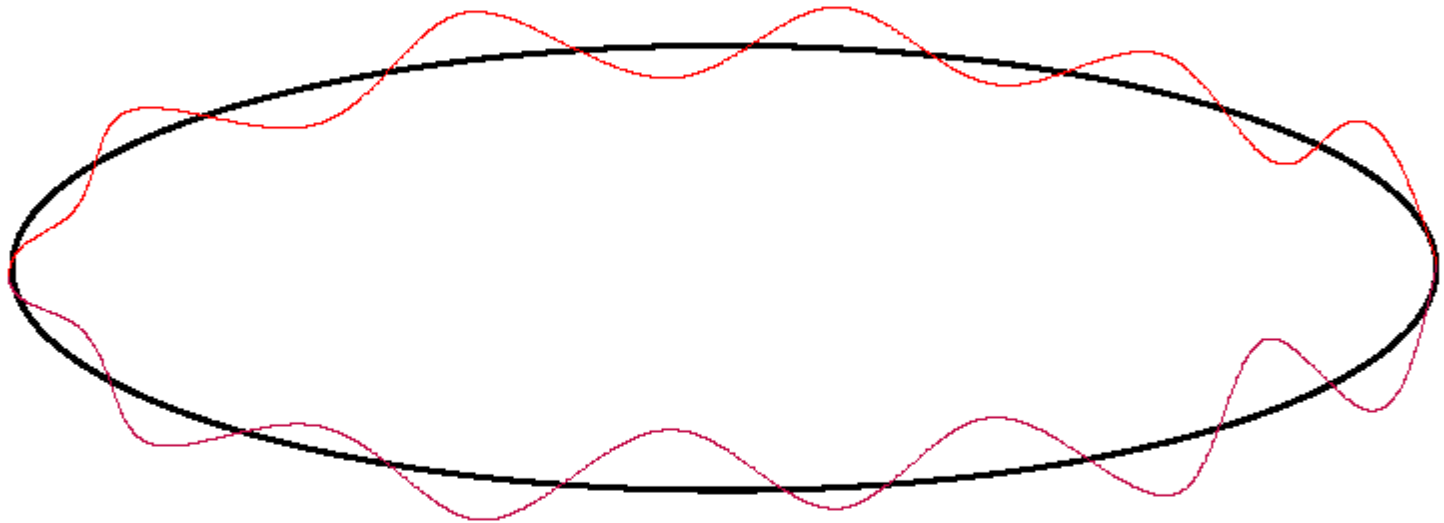
$$1.2 + 1.2^2 = 2.64$$

$$1.2 + 1.2^2 + 1.2^3 = 4.368$$

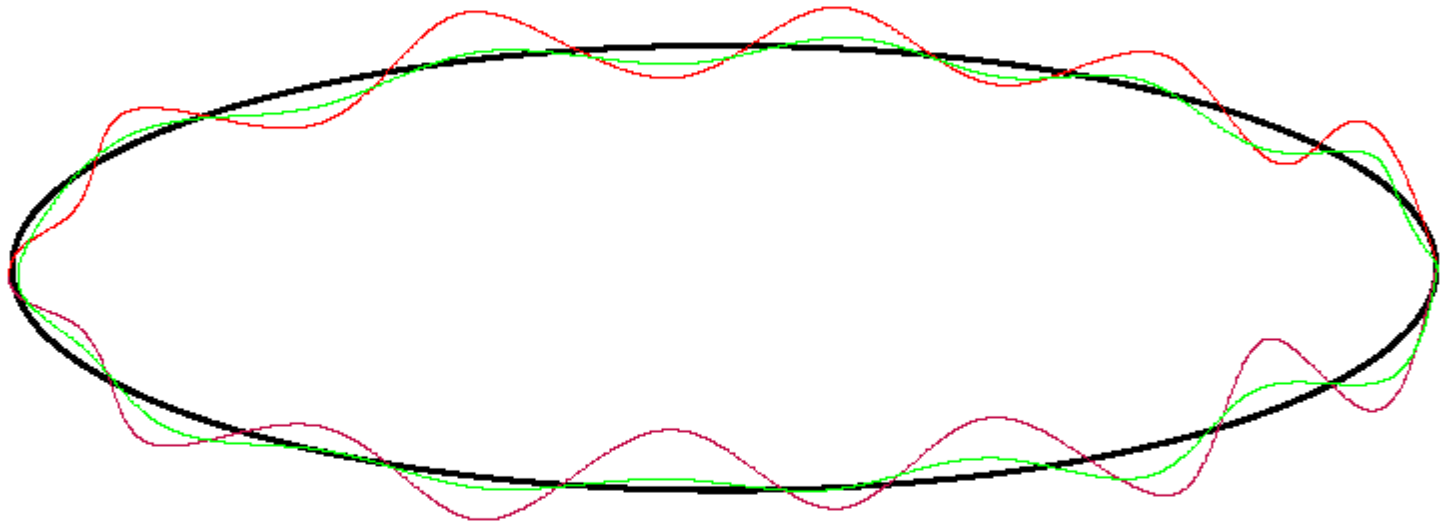
$$1.2 + 1.2^2 + 1.2^3 + 1.2^4 = 6.4416$$



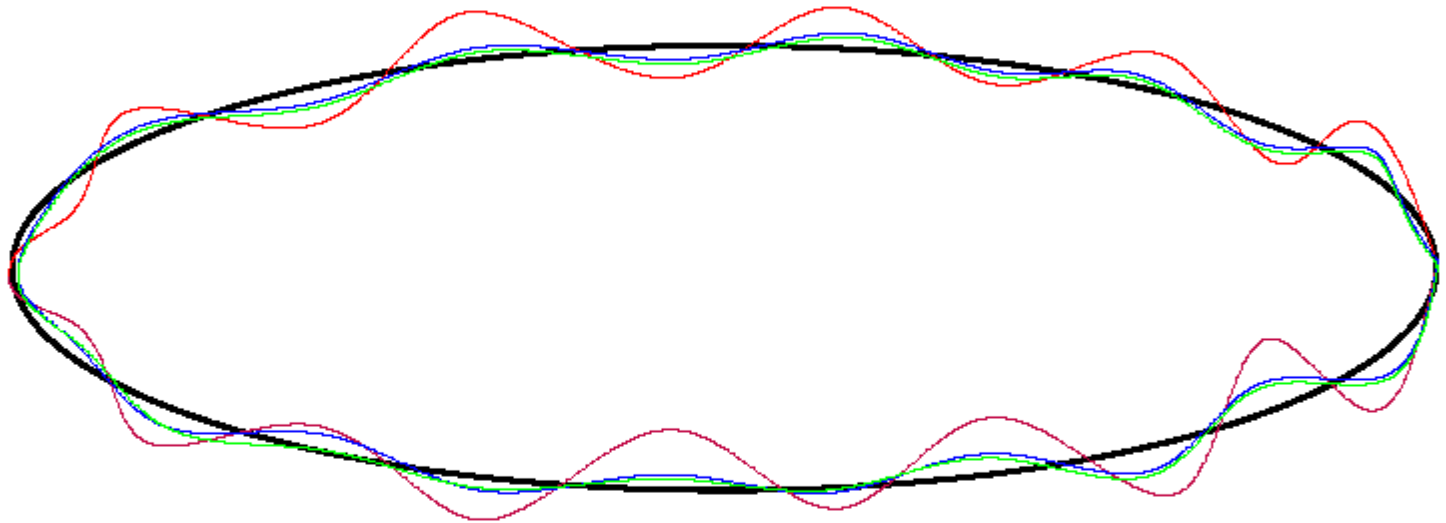
Ellisse Kepleriana: approssimazione base



Prima approssimazione (curva rossa)

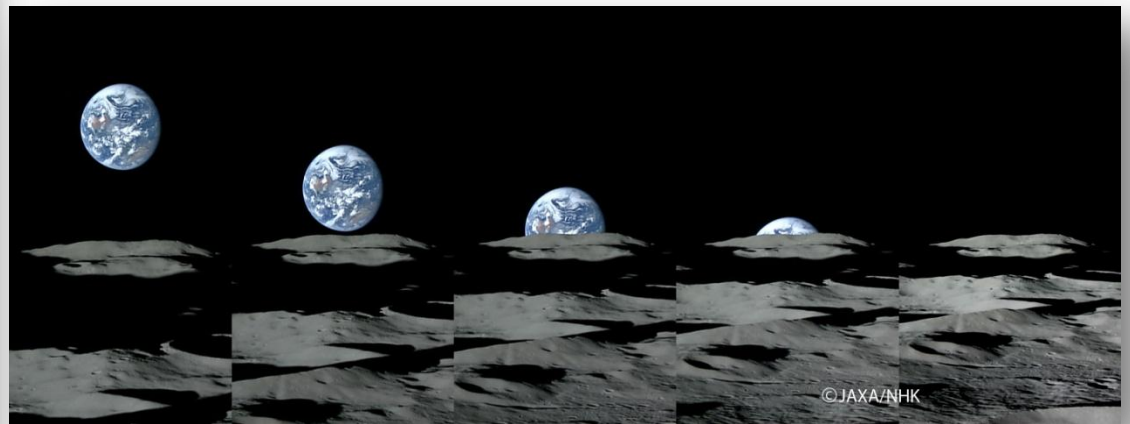


Seconda approssimazione (curva verde)



Terza approssimazione (curva blu)

- La **teoria delle perturbazioni** consente di determinare una soluzione approssimata delle equazioni del moto (Laplace, Lagrange, Delaunay, Leverrier, ecc., XVIII-XIX secolo).
- **Charles Delaunay** (1816-1872) sviluppò una teoria della Luna molto precisa, basata sulla teoria delle perturbazioni.



DE LAUNAY

THÉORIE DU MOUVEMENT DE LA LUNE.

CHAPITRE PREMIER.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU MOUVEMENT DE LA LUNE. — MOUVEMENT ELLIPTIQUE. — VARIATION DES CONSTANTES DU MOUVEMENT ELLIPTIQUE.

1. Soient X, Y, Z les coordonnées de la Terre rapportées à des axes rectangulaires fixes dans l'espace; ξ, η, ζ les coordonnées de la Lune, et ξ', η', ζ' celles du Soleil rapportées aux mêmes axes; M la masse de la Terre, m celle de la Lune, et m' celle du Soleil.

Le Soleil, la Lune et la Terre étant supposés s'attirer mutuellement d'après la loi de Newton, les équations différentielles du mouvement de la Terre sont

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = \frac{m'(\xi - X)}{[(\xi - X)^2 + (\eta - Y)^2 + (\zeta - Z)^2]^{3/2}} + \frac{m(\xi' - X)}{[(\xi' - X)^2 + (\eta' - Y)^2 + (\zeta' - Z)^2]^{3/2}}$$

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} = \frac{m'(\eta - Y)}{[(\xi - X)^2 + (\eta - Y)^2 + (\zeta - Z)^2]^{3/2}} + \frac{m'(\eta' - Y)}{[(\xi' - X)^2 + (\eta' - Y)^2 + (\zeta' - Z)^2]^{3/2}}$$

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} = \frac{m'(\zeta - Z)}{[(\xi - X)^2 + (\eta - Y)^2 + (\zeta - Z)^2]^{3/2}} + \frac{m'(\zeta' - Z)}{[(\xi' - X)^2 + (\eta' - Y)^2 + (\zeta' - Z)^2]^{3/2}}$$

T. XXVIII.

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \cos(x - \nu') &= \left(1 + 2e^2 + \frac{239}{144} e^4\right) \cos(x - g' - f) \\ &+ \left(3e' + \frac{11}{4} e'^2\right) \cos(x - g' - 3f) \\ &+ \left(e' + \frac{5}{2} e'^2\right) \cos(x - g') \\ &+ \left(\frac{53}{8} e'^3 + \frac{39}{16} e'^4\right) \cos(x - g' - 3f) \\ &+ \left(\frac{11}{8} e'^3 + \frac{49}{16} e'^4\right) \cos(x - g' + f) \\ &+ \frac{77}{8} e'^2 \cos(x - g' - 4f) \\ &+ \frac{23}{12} e'^2 \cos(x - g' + 2f) \\ &+ \frac{2655}{128} e'^2 \cos(x - g' - 5f) \\ &+ \frac{343}{128} e'^2 \cos(x - g' + 3f); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \cos(x - 3\nu') &= \left(1 - 6e^2 + \frac{423}{32} e^4\right) \cos(x - 3g' - 3f) \\ &+ (5e' - 22e'^2) \cos(x - 3g' - 4f) \\ &- \left(e' - \frac{5}{4} e'^2\right) \cos(x - 3g' - 2f) \\ &+ \left(\frac{127}{8} e'^3 - \frac{3665}{48} e'^4\right) \cos(x - 3g' - 5f) \\ &+ \left(\frac{1}{8} e'^3 + \frac{1}{48} e'^4\right) \cos(x - 3g' - f) \\ &+ \frac{163}{4} e'^2 \cos(x - 3g' - 6f) \\ &+ \frac{35413}{384} e'^2 \cos(x - 3g' - 7f) \dots \\ &+ \frac{1}{384} e'^2 \cos(x - 3g' + f); \end{aligned}$$

(*) La valeur de $\frac{d^2}{dt^2} \cos(x - 3\nu')$, calculée jusqu'aux quantités du quatrième ordre par rapport à e', ne renferme aucun terme en $\cos(x - 3g')$.

**“Theorie du Mouvement de la Lune”
C. Delaunay**

Calcoli preliminari

auquel on aurait dû s'arrêter, d'après ce qui vient d'être dit, et cela pour des raisons spéciales qui seront indiquées plus tard (chapitre IV).

Ajoutons encore que, e' étant environ trois fois plus petit que γ et e , dans le rejet des termes d'un ordre supérieur à celui auquel on voulait s'arrêter, on a regardé e'' , e''' , $e^{(4)}$, comme des quantités des quatrième, cinquième, sixième ordres; $e^{(4)}$ comme une quantité du huitième ordre, etc.

En opérant conformément aux explications qui précèdent, on a trouvé pour R la valeur suivante :

$$\begin{aligned}
 R = & \frac{c}{2a} \\
 & + \frac{m^2 a^2}{2a^2} \left[\frac{1}{4} - \frac{3}{2} \gamma + \frac{3}{8} e^2 + \frac{1}{8} e^4 + \frac{1}{2} \gamma^2 - \frac{9}{4} \gamma^2 e^2 - \frac{9}{16} \gamma^2 e^4 + \frac{9}{16} e^2 e^4 + \frac{15}{32} e^6 \right. \\
 & + \frac{9}{2} \gamma^2 e^2 + \frac{9}{2} \gamma^2 e^4 - \frac{27}{8} \gamma^2 e^2 e^2 - \frac{45}{16} \gamma^2 e^2 e^4 - \frac{45}{64} e^2 e^4 \\
 & + \left(\frac{9}{64} - \frac{45}{16} \gamma^2 + \frac{45}{64} e^2 + \frac{45}{64} e^4 \right) \frac{a^2}{a^2} \\
 & + \left[\frac{3}{4} - \frac{3}{2} \gamma - \frac{15}{8} e^2 - \frac{15}{8} e^4 + \frac{3}{2} \gamma^2 + \frac{15}{2} \gamma^2 e^2 + \frac{15}{4} \gamma^2 e^4 + \frac{69}{64} e^2 e^2 + \frac{75}{32} e^2 e^4 \right. \\
 & + \frac{39}{64} e^2 e^2 - \frac{15}{8} \gamma^2 e^2 - \frac{15}{8} \gamma^2 e^4 - \frac{69}{32} \gamma^2 e^2 e^2 - \frac{75}{8} \gamma^2 e^2 e^4 - \frac{65}{384} e^2 e^2 - \frac{145}{128} e^2 e^4 \\
 & - \left(\frac{5}{16} - 5\gamma + \frac{5}{16} e^2 + \frac{5}{16} e^4 \right) \frac{a^2}{a^2} \cos(2h+2g+2l-2h'-2g'-2l') \\
 & + \left[-\frac{1}{2} e + 3\gamma e + \frac{1}{16} e^3 - \frac{3}{4} e^5 - 3\gamma e^2 - \frac{3}{8} \gamma^2 e^2 + \frac{9}{4} \gamma^2 e^4 - \frac{1}{384} e^2 e^2 \right. \\
 & \quad \left. + \frac{3}{32} e^2 e^2 - \frac{15}{16} e^2 e^4 - \frac{9}{16} e^2 e^4 \right] \cos l \\
 & + \left[\frac{3}{4} e - \frac{9}{2} \gamma e^2 - \frac{9}{8} e^2 e^2 + \frac{27}{32} e^2 e^2 - \frac{9}{2} \gamma e^2 - \frac{27}{4} \gamma^2 e^2 e^2 - \frac{81}{16} \gamma^2 e^2 e^4 + \frac{81}{64} e^2 e^2 e^2 \right. \\
 & \quad \left. + \frac{161}{256} e^2 e^2 + \frac{27}{4} \gamma^2 e^2 e^2 + \left(\frac{45}{64} e^2 - \frac{225}{16} \gamma^2 e^2 + \frac{225}{64} e^2 e^2 \right) \frac{a^2}{a^2} \right] \cos l
 \end{aligned}$$

T. XXVIII.

$$\begin{aligned}
 & + \left[\frac{51}{8} e^2 e^2 - \frac{21}{4} \gamma e^2 e^2 - \frac{969}{64} e^2 e^2 e^2 - \frac{115}{8} e^2 e^2 e^2 \right] \cos(2h+2g+2l-2h'-2g'-2l') \\
 & + \left[-\frac{153}{8} e^2 e^2 + \frac{153}{4} \gamma e^2 e^2 + \frac{663}{64} e^2 e^2 e^2 + \frac{345}{8} e^2 e^2 e^2 \right] \cos(2h+2g+2l-2h'-2g'-2l') \\
 & + \left[\frac{845}{64} e^2 e^2 - \frac{845}{32} \gamma e^2 e^2 - \frac{4325}{128} e^2 e^2 e^2 - \frac{32525}{1024} e^2 e^2 e^2 \right] \cos(2h+2g+2l-2h'-2g'-2l') \\
 & + \left[\frac{1}{64} e^2 e^2 - \frac{1}{32} \gamma e^2 e^2 - \frac{5}{128} e^2 e^2 e^2 + \frac{11}{1024} e^2 e^2 e^2 \right] \cos(2h+2g+2l-2h'-2g'-2l') \\
 & + \left[\frac{3}{2} \gamma e^2 - \frac{3}{2} \gamma^2 e^2 - \frac{57}{16} \gamma^2 e^2 + \frac{9}{4} \gamma^2 e^4 \right] \cos(2g+2l) \\
 & + \left[-\frac{9}{2} \gamma^2 e^2 + \frac{9}{2} \gamma^2 e^4 + \frac{27}{16} \gamma^2 e^2 e^2 - \frac{27}{4} \gamma^2 e^2 e^2 - \frac{27}{16} \gamma^2 e^4 \right. \\
 & \quad \left. + \frac{5}{128} \gamma^2 e^2 e^2 + \frac{112}{32} \gamma^2 e^2 e^2 \right] \cos(2g+2l) \\
 & + \left[\frac{3}{2} \gamma^2 e^2 - \frac{9}{4} \gamma^2 e^4 - \frac{45}{8} \gamma^2 e^2 e^2 + \frac{81}{32} \gamma^2 e^2 e^2 \right] \cos(2g+2l+l') \\
 & + \left[\frac{3}{2} \gamma^2 e^2 - \frac{9}{4} \gamma^2 e^4 - \frac{45}{8} \gamma^2 e^2 e^2 + \frac{81}{32} \gamma^2 e^2 e^2 \right] \cos(2g+2l-l') \\
 & + \left[-\frac{3}{2} \gamma^2 e^2 + \frac{3}{4} \gamma^2 e^4 + \frac{3}{16} \gamma^2 e^2 e^2 + \frac{15}{4} \gamma^2 e^2 e^2 - \frac{3}{16} \gamma^2 e^4 \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{128} \gamma^2 e^2 e^2 - \frac{15}{32} \gamma^2 e^2 e^2 \right] \cos(2h+l-2h'-2g'-2l') \\
 & + \left[-\frac{3}{2} \gamma^2 e^2 + \frac{3}{4} \gamma^2 e^4 + \frac{3}{16} \gamma^2 e^2 e^2 + \frac{15}{4} \gamma^2 e^2 e^2 \right] \cos(2h-l-2h'-2g'-2l') \\
 & + \left[\frac{81}{4} \gamma^2 e^2 - \frac{81}{4} \gamma^2 e^4 + \frac{63}{8} \gamma^2 e^2 e^2 - \frac{269}{32} \gamma^2 e^2 e^2 - \frac{63}{8} \gamma^2 e^2 e^4 \right] \cos(2h-2h'-2g'-2l') \\
 & + \left[-\frac{3}{4} \gamma^2 e^2 + \frac{3}{4} \gamma^2 e^4 - \frac{9}{8} \gamma^2 e^2 e^2 + \frac{3}{32} \gamma^2 e^2 e^2 - \frac{9}{8} \gamma^2 e^2 e^4 \right] \cos(2h-2h'-2g'-2l') \\
 & + \left[-\frac{1}{24} e^2 + \frac{1}{4} \gamma^2 e^2 + \frac{1}{36} e^2 - \frac{1}{16} e^2 e^2 \right] \cos 4l
 \end{aligned}$$

(4, 0)

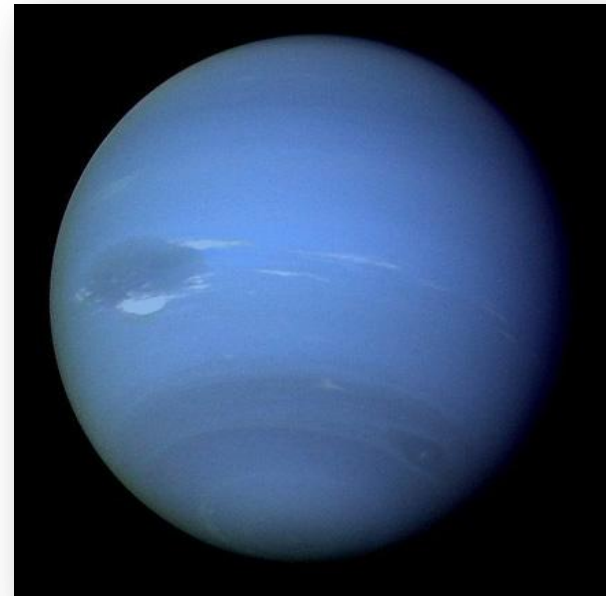
$$\begin{aligned}
 & - \frac{169}{64} e^2 \cos \gamma h + \alpha g + 6l - \gamma h' - \alpha g' - 3l' \\
 & - \frac{37}{64} e^2 \cos \gamma h + \alpha g + 6l - \gamma h' - \alpha g' - l' \\
 & - \frac{31}{128} e^2 \cos \gamma h + \alpha g - 2l - \gamma h' - \alpha g' - 3l' \\
 & + \frac{1}{128} e^2 \cos \gamma h + \alpha g - 2l - \gamma h' - \alpha g' - l' \\
 & + \frac{165}{64} e^2 \cos (\gamma h + \alpha g + 5l - \gamma h' - \alpha g' - 4l') \\
 & - \frac{119}{64} e^2 \cos (\gamma h + \alpha g - l - \gamma h' - \alpha g' - 4l') \\
 & + \frac{815}{16} e^2 \cos (\gamma h + \alpha g - 4l - \gamma h' - \alpha g' - 5l') \\
 & + \frac{1}{64} e^2 \cos (\gamma h + \alpha g + 4l - \gamma h' - \alpha g' - l') \\
 & - \frac{1225}{128} e^2 \cos (\gamma h + \alpha g - \gamma h' - \alpha g' - 5l') \\
 & + \frac{5}{128} e^2 \cos \gamma h + \alpha g - \gamma h' - \alpha g' + l' \\
 & - \frac{159}{64} e^2 \cos \gamma h + \alpha g + 3l - \gamma h' - \alpha g' - 6l' \\
 & - \frac{1}{35} e^2 \cos \gamma h + \alpha g + 3l - \gamma h' - \alpha g' + 2l' \\
 & - \frac{4797}{64} e^2 \cos \gamma h + \alpha g + l - \gamma h' - \alpha g' - 6l' \\
 & - \frac{1}{35} e^2 \cos \gamma h + \alpha g + l - \gamma h' - \alpha g' + 2l' \\
 & + \frac{12517}{5120} e^2 \cos (\gamma h + \alpha g + 2l - \gamma h' - \alpha g' - 7l') \\
 & - \frac{113}{5120} e^2 \cos (\gamma h + \alpha g + 2l - \gamma h' - \alpha g' + 3l') \\
 & + \frac{25}{16} e^2 \cos \alpha g + 5l
 \end{aligned}$$

T XXVIII.

$$\begin{aligned}
 & - \frac{35}{12} e^2 \cos \gamma h - \alpha g - 1g + 5l - 4h' - 1g' - 2l' \\
 & - \frac{105}{32} e^2 \cos \gamma h + 4g + 3l - 4h' - 4g' - 1l' \\
 & - \frac{155}{128} e^2 \cos \gamma h + 4g - 4l - 4h' - 4g' - 5l' \\
 & - \frac{105}{128} e^2 \cos \gamma h + 4g - 4l - 4h' - 4g' - 3l' \\
 & + \frac{105}{64} e^2 \cos \gamma h + 4g + 6l - 4h' - 4g' - 4l' \\
 & + \frac{117}{32} e^2 \cos \gamma h + 4g + 3l - 4h' - 4g' - 4l' \\
 & + \frac{155}{64} e^2 \cos \gamma h + 4g + 5l - 4h' - 4g' - 5l' \\
 & - \frac{105}{64} e^2 \cos \gamma h + 4g + 5l - 4h' - 4g' - 3l' \\
 & - \frac{1305}{64} e^2 \cos \gamma h + 4g + 3l - 4h' - 4g' - 5l' \\
 & - \frac{115}{64} e^2 \cos \gamma h + 4g + 3l - 4h' - 4g' - 3l' \\
 & + \frac{185}{128} e^2 \cos \gamma h + 4g + 4l - 4h' - 4g' - 6l' \\
 & - \frac{35}{128} e^2 \cos \gamma h + 4g + 4l - 4h' - 4g' - 3l' \\
 & - \frac{35}{16} e^2 \cos \gamma h + 4g + 4l - 2h' - \alpha g' - 2l' \\
 & - \frac{35}{16} e^2 \cos (\gamma h + \alpha g - 2l - 4h' - 4g' - 1l') \\
 & - m \frac{e^2}{a^3} \left[\frac{63}{128} \cos \gamma h + 3g + 5l - 5h' - 5g' - 5l' \right]
 \end{aligned}$$

45. Au moyen du développement de R qui vient d'être donné, on pourra déterminer les valeurs de I, G, H, l, g, h, en fonction du temps, en se servant des équations (9). Les valeurs de ces six quantités devront ensuite être substituées dans les expressions des coordonnées de la Lune, ce qui donnera définitivement ces coordonnées en fonction du temps.

- **Nettuno** venne scoperto *a tavolino* da **Leverrier** (1811-1877) e **Adams** (1819-1892) sulla base di perturbazioni anomale della traiettoria di Urano.
- Leverrier, tramite la teoria delle perturbazioni, calcolò la posizione di Nettuno con un'approssimazione di solo 4 gradi!



- E' la conferma del **determinismo assoluto di Laplace!**

- Da una lettera di Johann Encke a Leverrier, 28 Settembre 1846:

“Il vostro nome sarà per sempre legato alla dimostrazione più brillante che si possa immaginare della validità dell’attrazione universale; e credo che queste poche parole riassumano tutto ciò che l’ambizione di un saggio possa desiderare”

- DOMANDA: I pianeti rimarranno vicini alle loro orbite attuali oppure gli effetti cumulativi di piccole perturbazioni cambieranno le orbite su tempi lunghi, fino a farli collidere con il Sole o ad essere espulsi dal sistema solare?

8. Caos

- Caos: moto irregolare di un sistema che mostra una *estrema sensibilità alla scelta delle condizioni iniziali*.
- **Poincaré**: scopre il caos studiando il problema dei 3-corpi
- Traiettorie di due palline inizialmente molto vicine
- Se la loro distanza aumenta (esponenzialmente) nel tempo si ha un moto *caotico*.
- In questo caso è impossibile eseguire una predizione a lungo termine: piccole incertezze sulla posizione iniziale vengono amplificate in un tempo breve.
- *Dire che un sistema è caotico NON vuole dire che sia instabile, ma piuttosto imprevedibile*

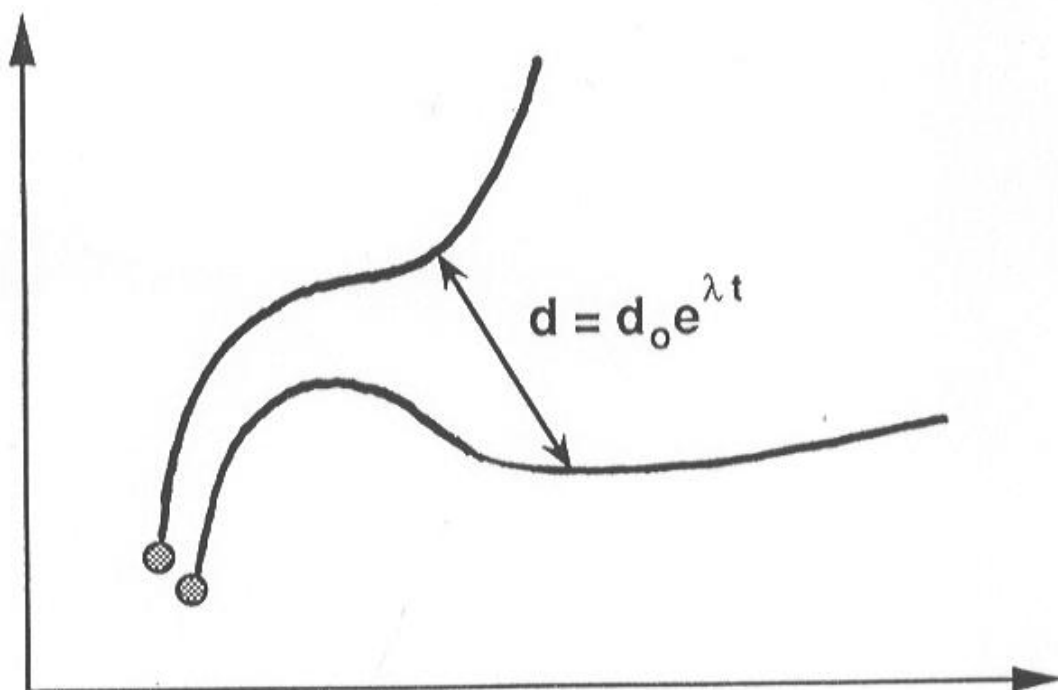


- Henri Poincaré: è la *fine* del determinismo assoluto!

- Un sistema caotico è caratterizzato da:

- (i) due sistemi con condizioni molto vicine possono avere un futuro radicalmente diverso;

- (ii) l'evoluzione su tempi lunghi, maggiori del *tempo di Lyapunov*, è imprevedibile.



- d_0 è la distanza iniziale
- d è la distanza al tempo t
- l'esponente di Lyapunov λ stima la distanza

- L'effetto Butterfly

- Nel 1962 il meteorologo Edward Lorenz mostrò che un semplice sistema meteorologico (descritto da semplici equazioni matematiche) passava rapidamente dal sereno alla tempesta e viceversa. Ad innescare questi “salti” bastavano delle minime perturbazioni.

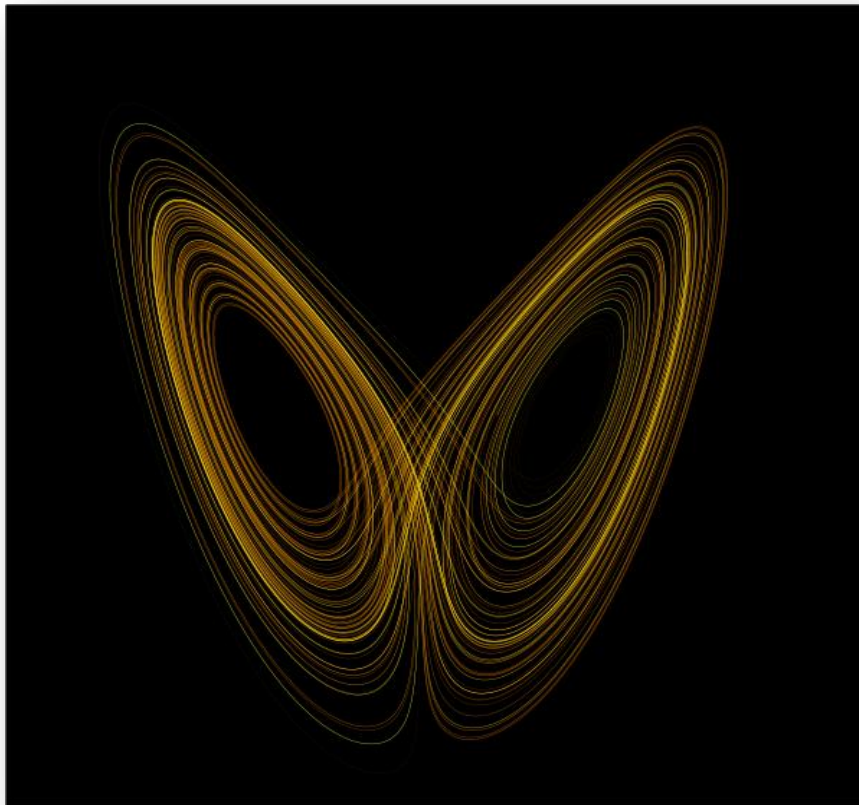


Immagine: Wikipedia

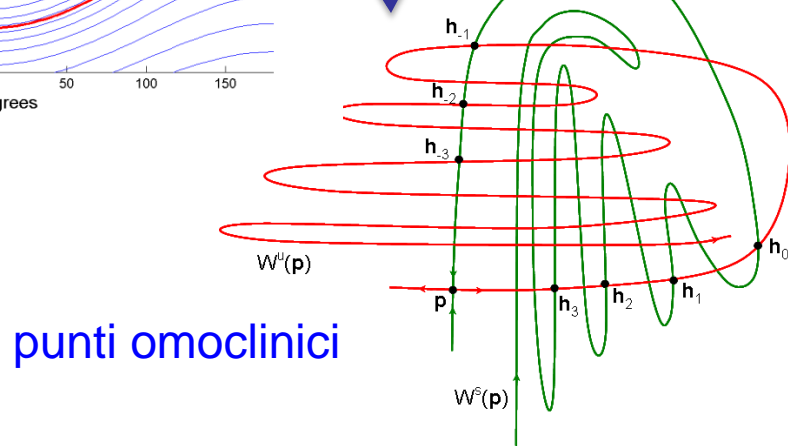
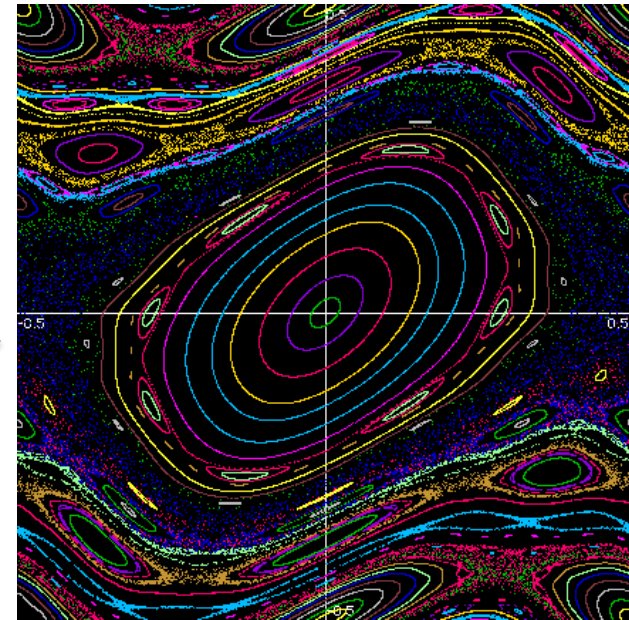
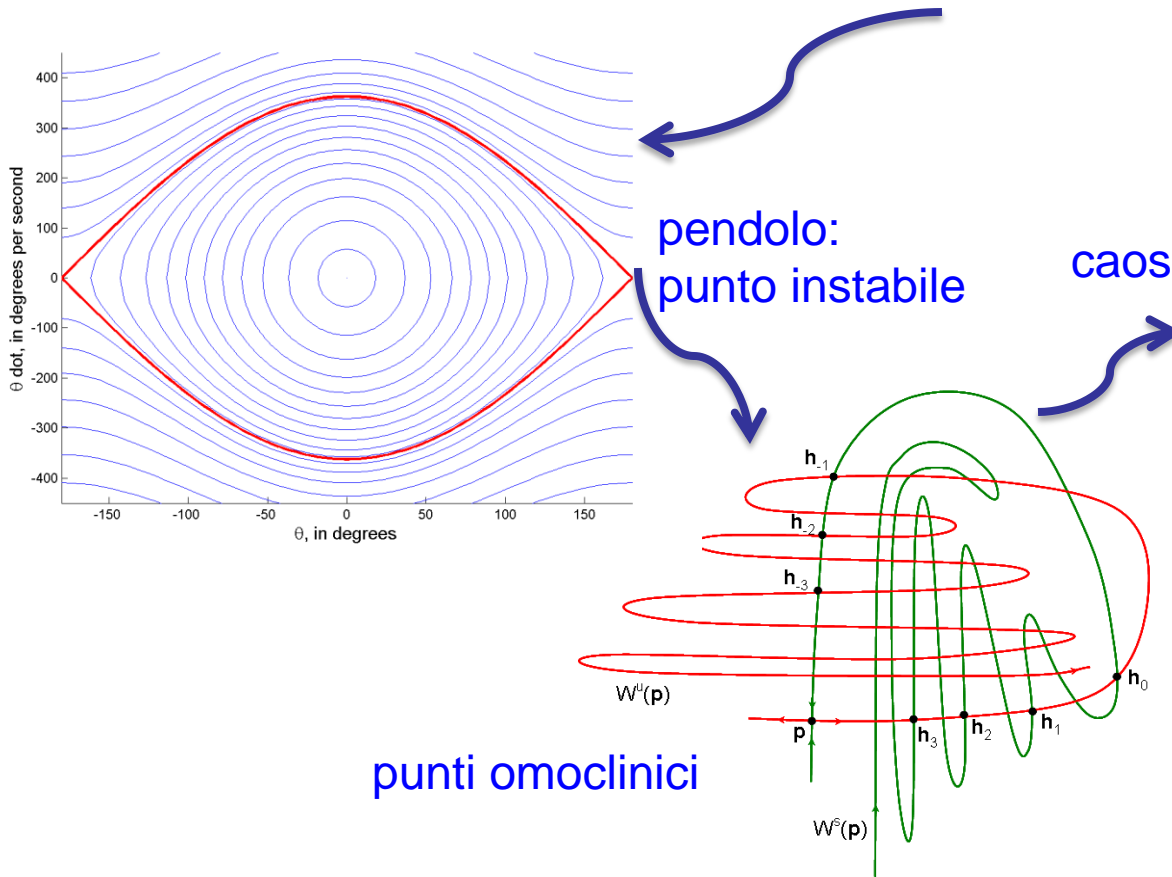
- Nel 1972 Lorenz intitola una conferenza:

“Predicibilità: può il battito d’ali di una farfalla in Brasile scatenare un tornado in Texas?”,

Nasce l’**effetto farfalla**, sinonimo di sensibilità alle condizioni iniziali e quindi di caos.



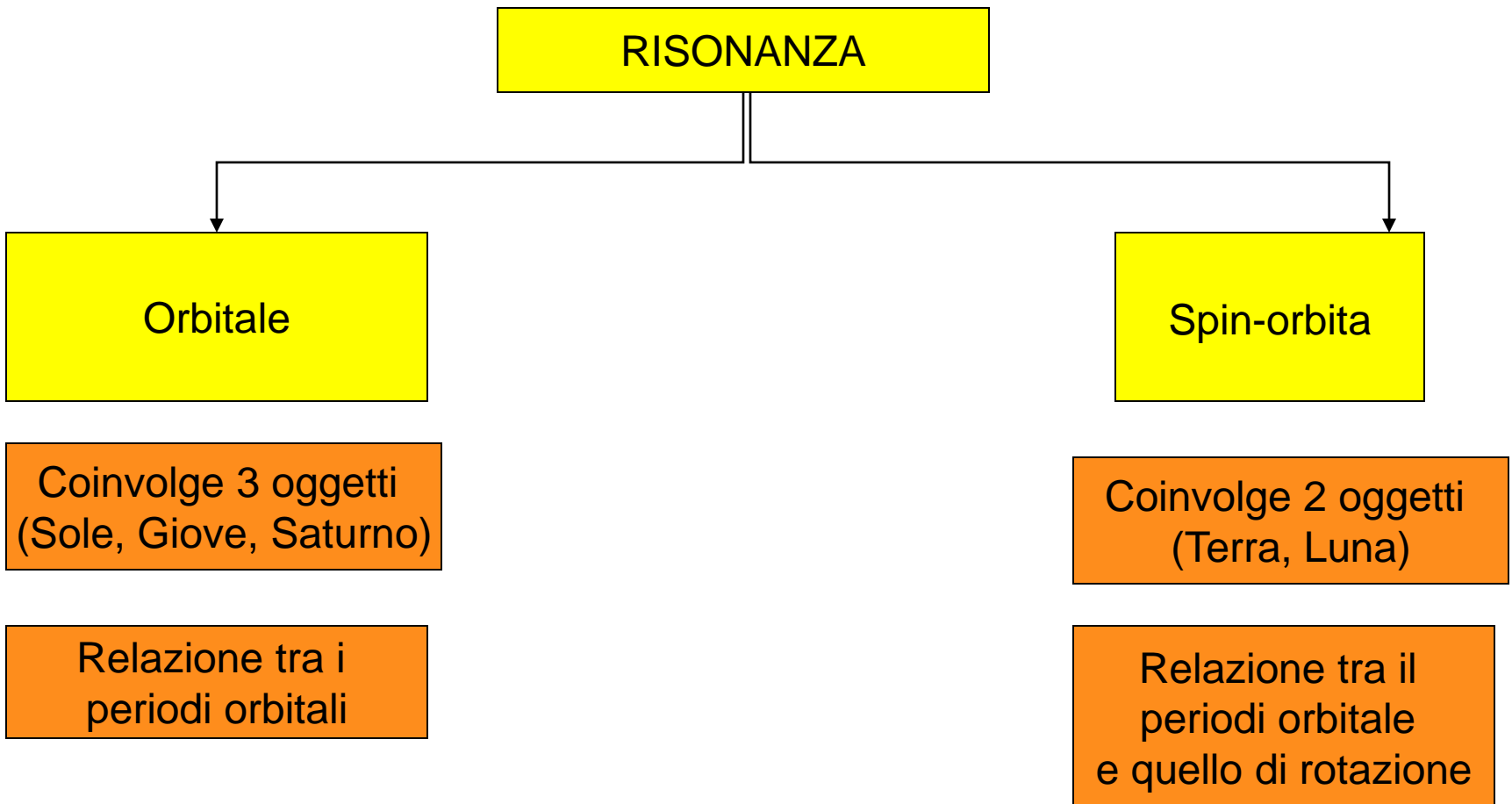
- Terra-Luna-sonda= problema 3-corpi, no leggi di Keplero
- Poincaré: problema 3-corpi, punti omoclinici, caos
- Kolmogorov: teoria KAM orbite regolari



8. Risonanze

Cosa e' una risonanza?

- Relazione tra i periodi di rivoluzione o di rotazione



9. Risonanze orbitali

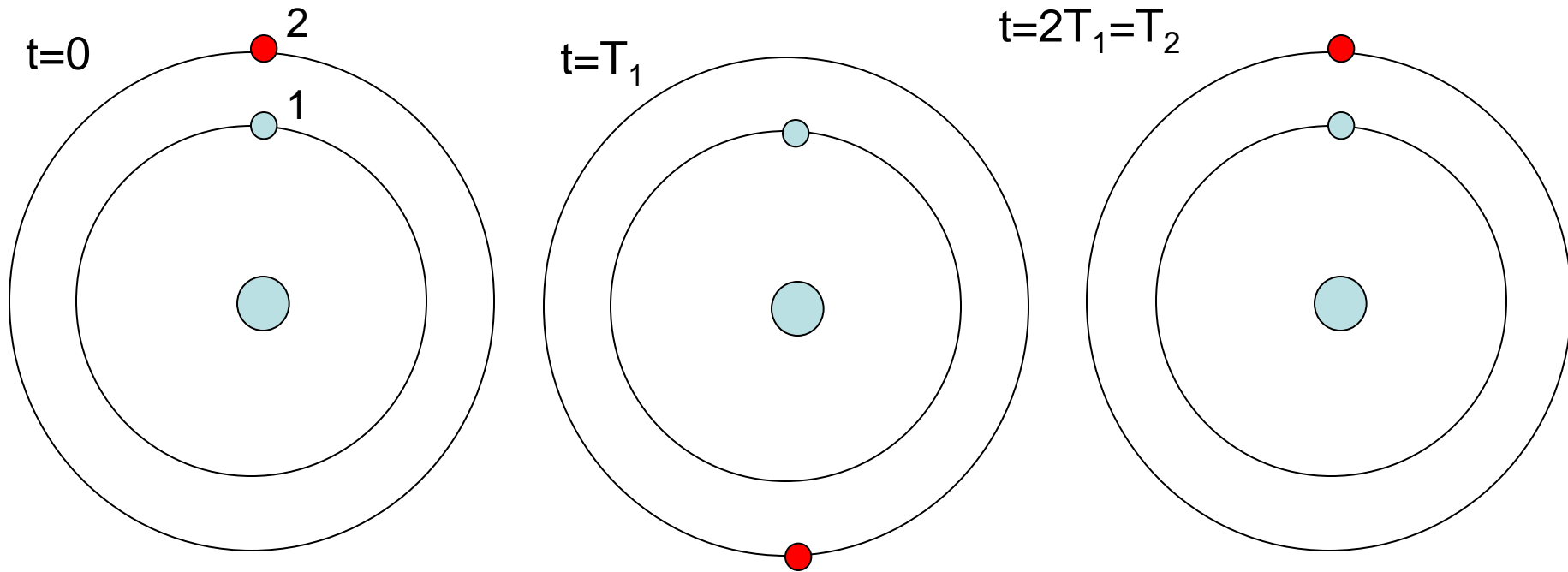
- Consideriamo tre corpi: S (Sole), A (asteroide), G (Giove)
- Siano T_A e T_G i periodi di rivoluzione di A e G attorno ad S.
- **Definizione:** Si dice che si ha una *risonanza orbitale* tra A e G, quando il rapporto tra i due periodi è un numero razionale:

$$T_A / T_G = p/q \quad \text{con } p, q \text{ interi non nulli.}$$

- **Esempi:**
- Giove e Saturno: $T_G / T_S = 2/5$ ovvero 2 rivoluzioni di Saturno corrispondono a 5 rivoluzioni di Giove;
- Io, Europa, Ganimede e Callisto: $T_{IO}/T_{EUR} = 1/2$,
 $T_{IO}/T_{GAN} = 1/4$, $T_{EUR}/T_{GAN} = 1/2$;
- satelliti di Saturno: $T_{Titano}/T_{Iperione} = 3/4$, $T_{Titano}/T_{Giapeto} = 1/5$;
- asteroidi Greci e Troiani 1/1.

- Le risonanze orbitali **proteggono i corpi celesti da pericolosi incontri ravvicinati**, a causa dell'esatto ripetersi delle stesse configurazioni orbitali. Ad esempio, consideriamo Nettuno e Plutone con $T_N=164.8$ anni e $T_P=247.9$ anni $\rightarrow T_P/T_N=1.5042 \approx 3/2$ ovvero in 2 giri di Plutone, Nettuno ne compie 3.
- Supponiamo che Nettuno si muova su un'orbita circolare e che la posizione iniziale di Plutone sia all'afelio. Allora gli allineamenti successivi tra Sole, Nettuno e Plutone avverranno sempre all'afelio, cioè al punto di massima distanza da Nettuno e quindi laddove risente meno dell'attrazione di Nettuno.

ESEMPIO DI RISONANZA 2:1

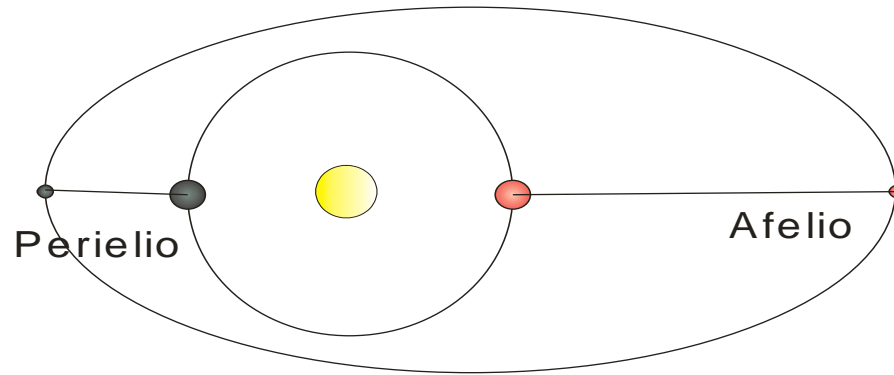


1 ROTAZIONE DEL CORPO 2 = 2 ROTAZIONI DEL CORPO 1

Esempi nel sistema solare

- **Nettuno e Plutone:** sono in risonanza 2:3, ovvero 2 rivoluzioni di Plutone corrispondono a 3 di Nettuno
- **Giove e Saturno:** 2:5
- **Satelliti di Giove:**
 - * Io e Europa: 1:2
 - * Ganimede e Callisto: 1:4
 - * Europa e Ganimede: 1:2
- **Satelliti di Saturno:**
 - * Teti e Mima: 4:2
 - * Titano e Giapeto: 1:5
 - * Titano e Iperione: 3:4
- **Asteroidi Greci e Troiani con Giove:** 1:1

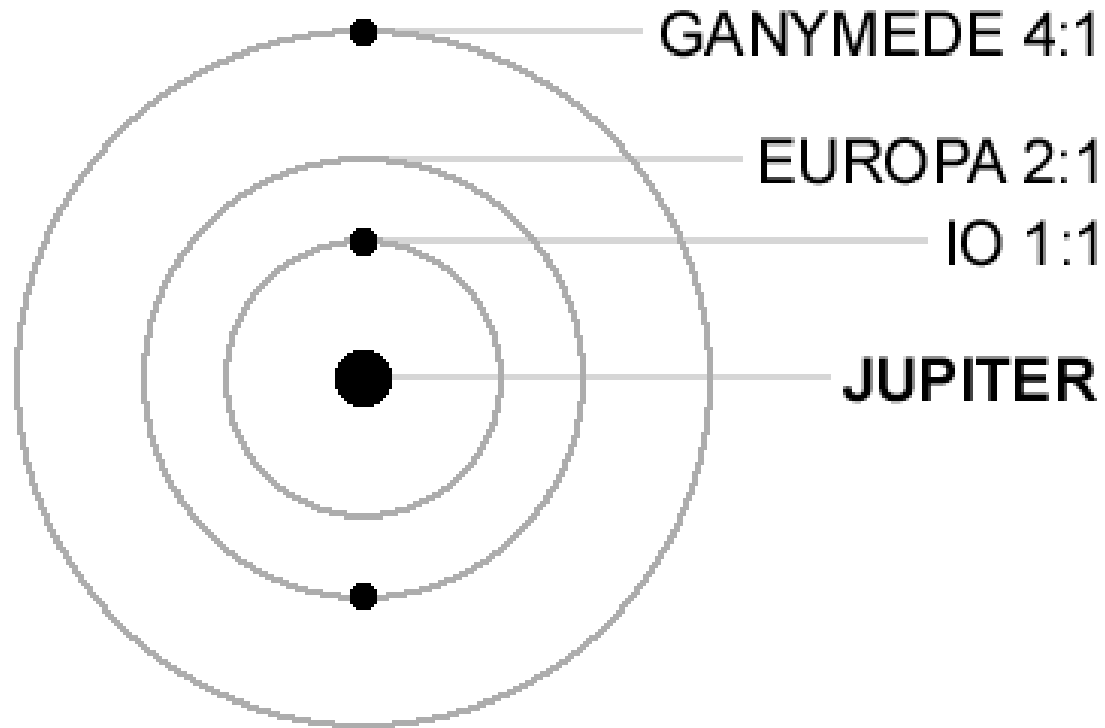
L'attrazione tra due corpi aumenta quando i pianeti si avvicinano e diminuisce quando si allontanano.
Attrazione maggiore al perielio e minore all'afelio.



Per la risonanza si crea un meccanismo di protezione tra i due corpi: a causa dell'esatto ripetersi delle stesse configurazioni orbitali, si evitano pericolosi incontri ravvicinati.

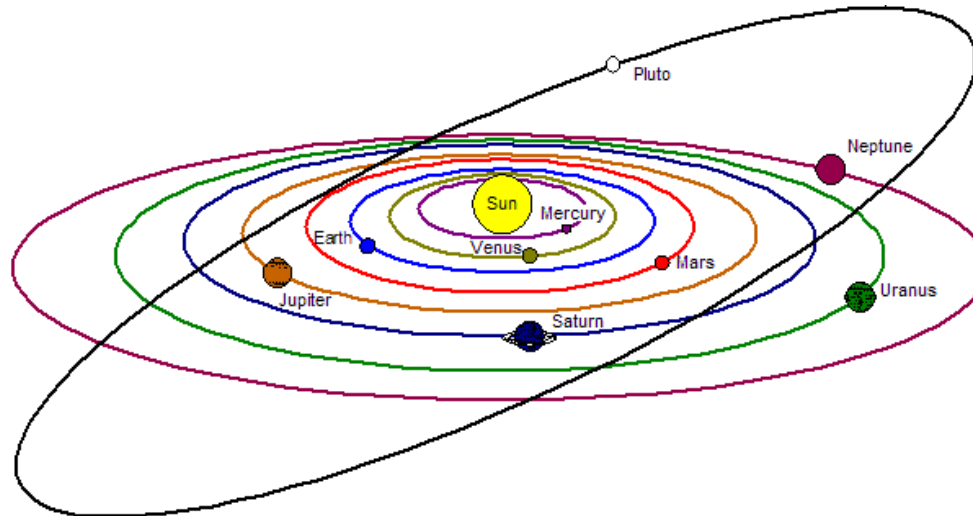
Per la risonanza gli incontri troppo ravvicinati si ripetono periodicamente; gli effetti si accumulano e possono portare all'espulsione del corpi minore.

Risonanza di Laplace tra Io, Europa e Ganimede:



Nettuno e Plutone

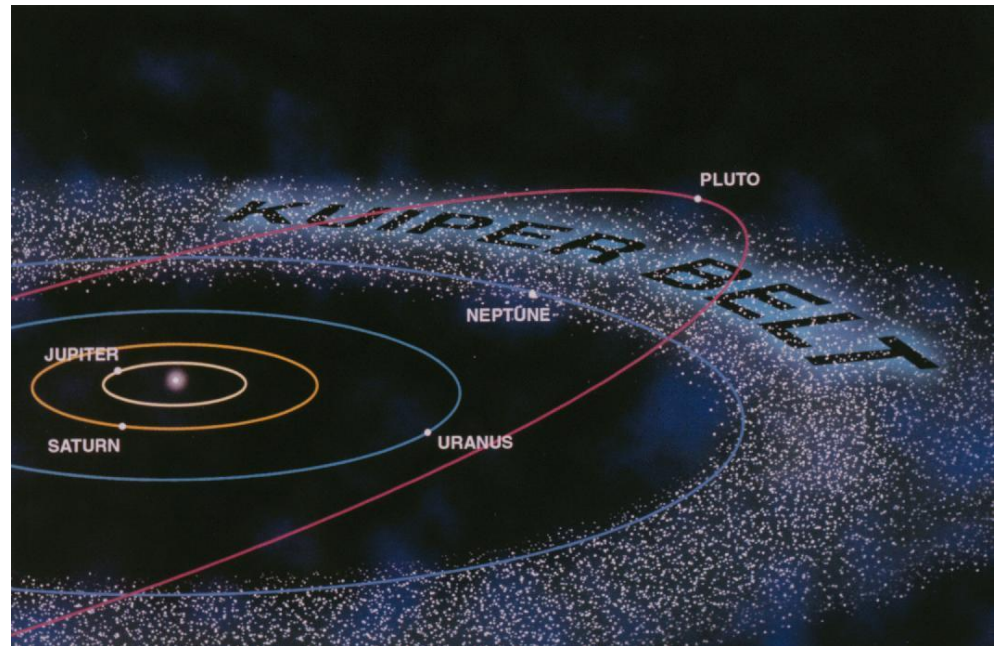
- Nettuno e Plutone sono in risonanza orbitale 2:3, ovvero in 2 giri di Plutone intorno al Sole, Nettuno ne compie 3.
- Grazie a questa risonanza, che comporta la ripetizione della configurazione dinamica di Nettuno e Plutone, non si hanno collisioni, sebbene le due orbite si intersechino!



Plutone e i Plutini

- Esistono altri oggetti chiamati Plutini, vicini a Plutone, che orbitano nella fascia di Kuiper; essi sono in risonanza 2:3 con Nettuno e 1:1 con Plutone. La risonanza previene le collisioni.

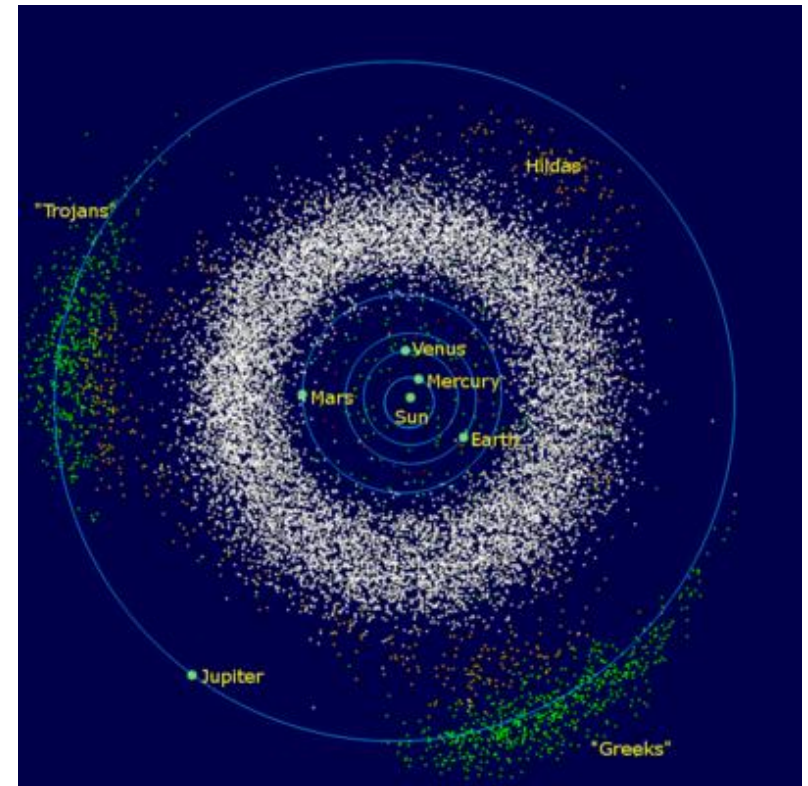
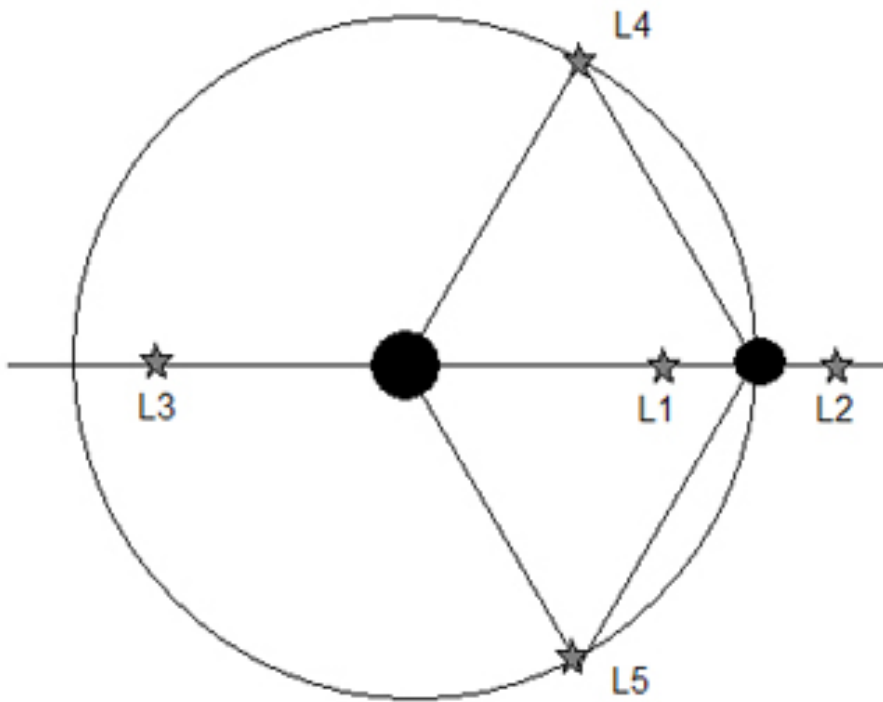
- I Plutini hanno contribuito a declassare Plutone a pianeta nano (IAU, 2006) in quanto non è stato in grado di ripulire lo spazio che lo circonda da tutti i corpi minori.



10. Giove, Greci e Troiani

- I Greci e i Troiani sono due gruppi di asteroidi in risonanza 1:1 con Giove. Il loro periodo di rivoluzione è uguale a quello di Giove e quindi si trovano ad una distanza media dal Sole simile a quella di Giove.
- Il loro nome viene dai personaggi dell'Iliade di Omero: i Greci vittoriosi precedono il dio Giove, mentre i Troiani lo seguono.
- [J.-L. Lagrange](#) trovò delle soluzioni particolari del problema dei 3 corpi; si tratta di punti di equilibrio nel sistema ruotante con la stessa velocità angolare dei primari (Sole e Giove).

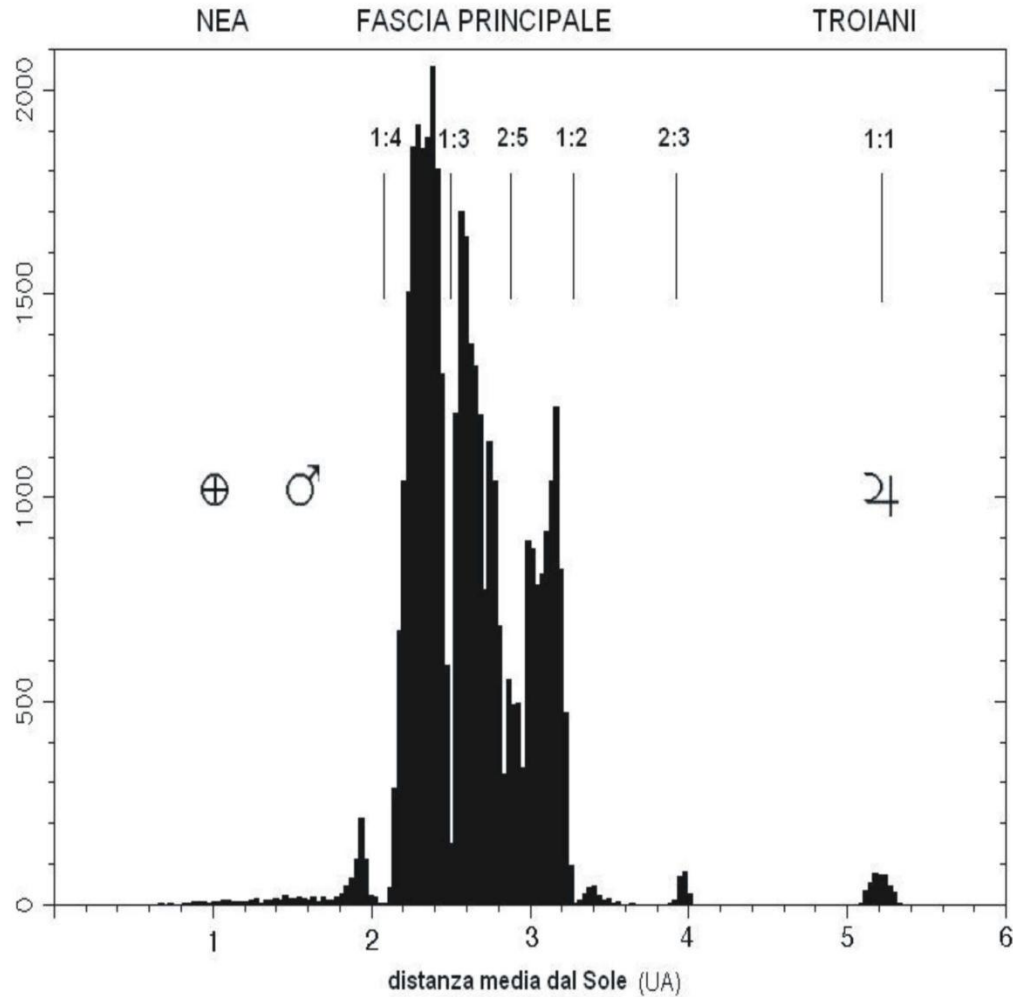
- Punti collineari L1, L2, L3
- Punti triangolari L4, L5.
- Gli asteroidi *Greci e Troiani* sono disposti attorno ai punti di equilibrio *Lagrangiani triangolari* L4 e L5 .



11. Risonanze piene e vuote

- Alcune risonanze sono piene di oggetti, mentre altre risultano svuotate.
- Nella fascia degli asteroidi tra Marte e Giove ci sono delle zone vuote chiamate *Lacune di Kirkwood*, ad esempio 1:2, 1:3, 1:4.
- L'influenza combinata di Marte e Giove causa l'espulsione dei corpi in queste lacune.
- Invece le risonanze 2:3 e 1:1 sono stabilizzanti e in loro corrispondenza troviamo alcuni asteroidi.

- Distribuzione degli asteroidi al variare della loro distanza dal Sole.



Anelli di Saturno

- Le lacune, come Cassini e Encke, che corrispondono a risonanze con Mima, satellite di Saturno.

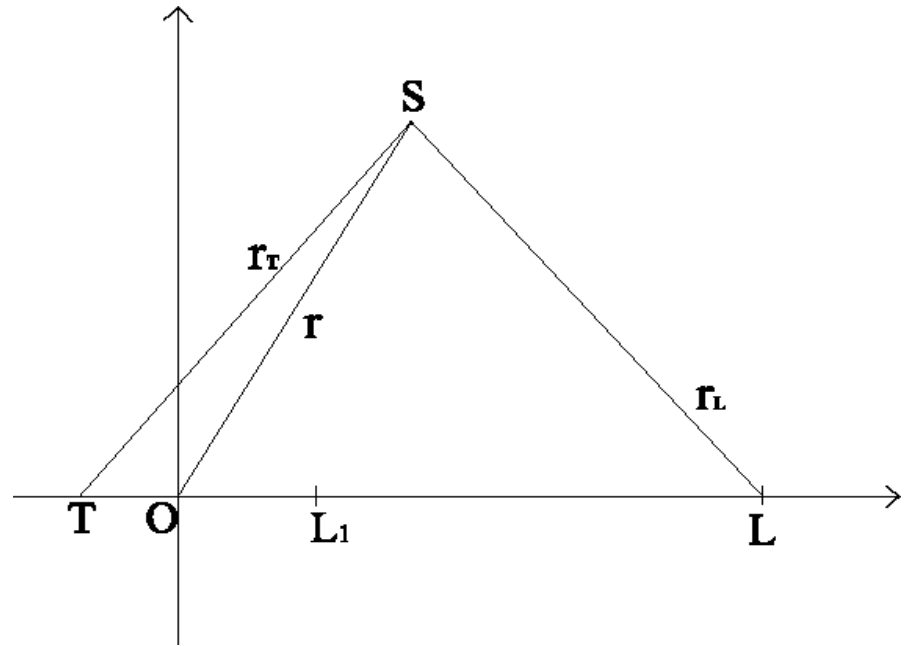


12. MAI: J.-L. Lagrange

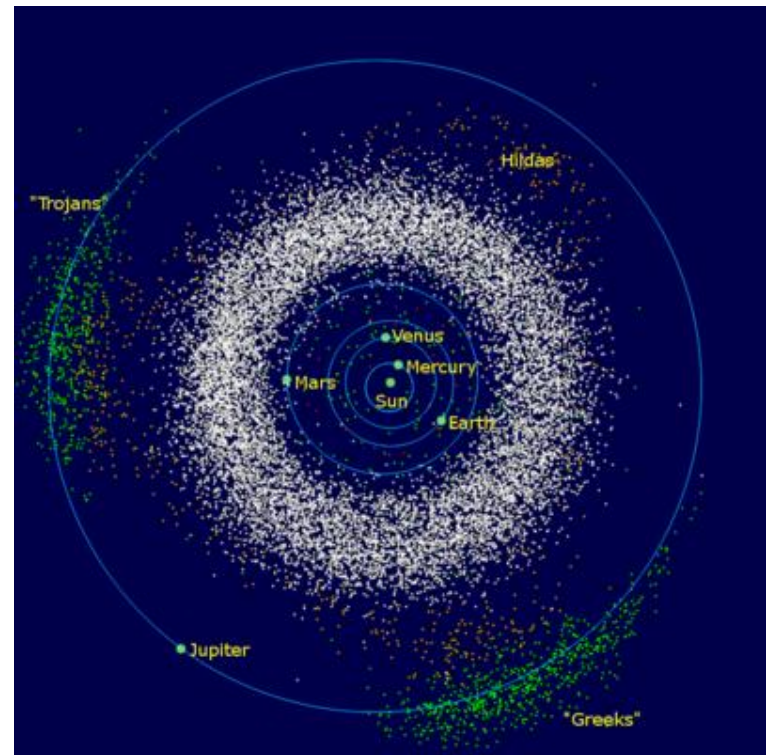
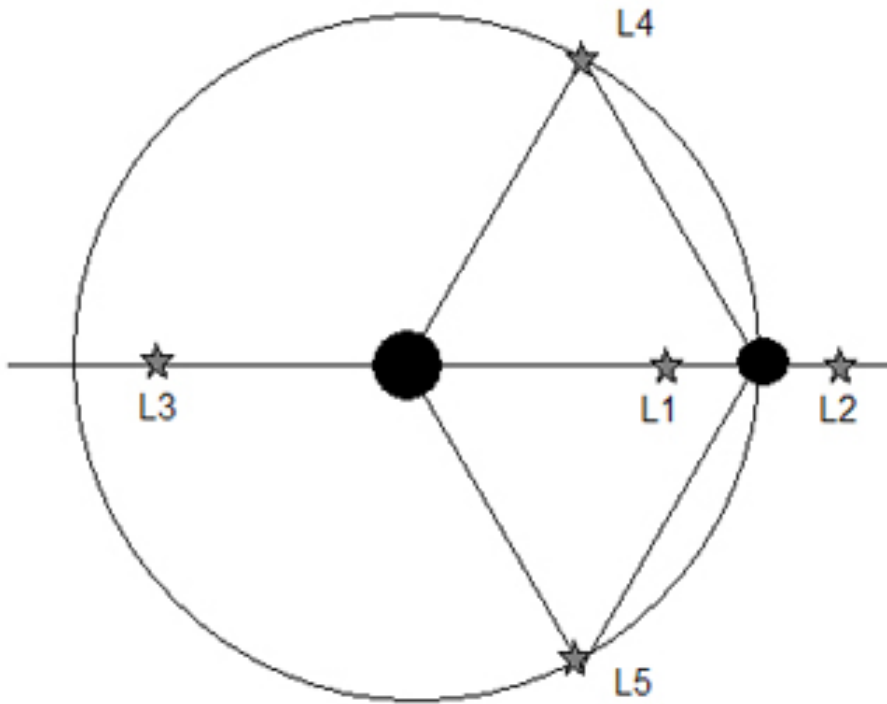
- J.-L. Lagrange trovò le soluzioni di equilibrio del P3C nel riferimento sinodico (ruotante con la velocità angolare di Sole e Giove): punti **collineari** (instabili) L1, L2, L3, punti **triangolari** (stabili) L4, L5 (*Greci e Troiani*)
- **Caos** attorno ai punti **collineari** (anche Terra-Luna, Terra-Sole) → *missioni low-cost*.

Curve di velocità nulla
(C_J = costante di Jacobi):

$$v^2 = r^2 + 2m_T/r_T + 2m_L/r_L - C_J$$



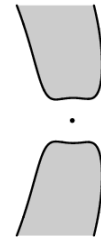
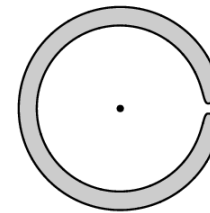
- **Lagrange:** *queste posizioni di equilibrio sono una mera curiosità matematica!*



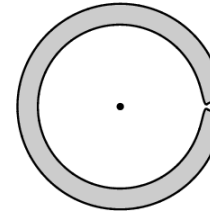
13. FORSE: C. Conley

- Il matematico C. Conley dimostra nel 1968 l'esistenza di orbite a bassa energia attraverso il punto collineare L1
- Nel caso più in basso non c'è transito. Aumentando di poco si apre il collo di bottiglia e si possono avere orbite di transito

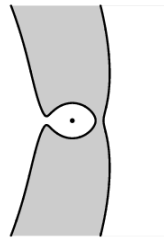
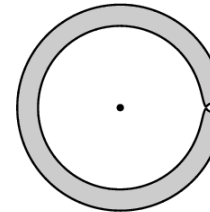
$$C_J = 3.03$$



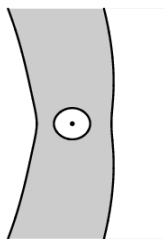
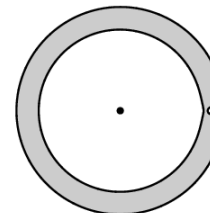
$$C_J = 3.038$$



$$C_J = 3.0395$$

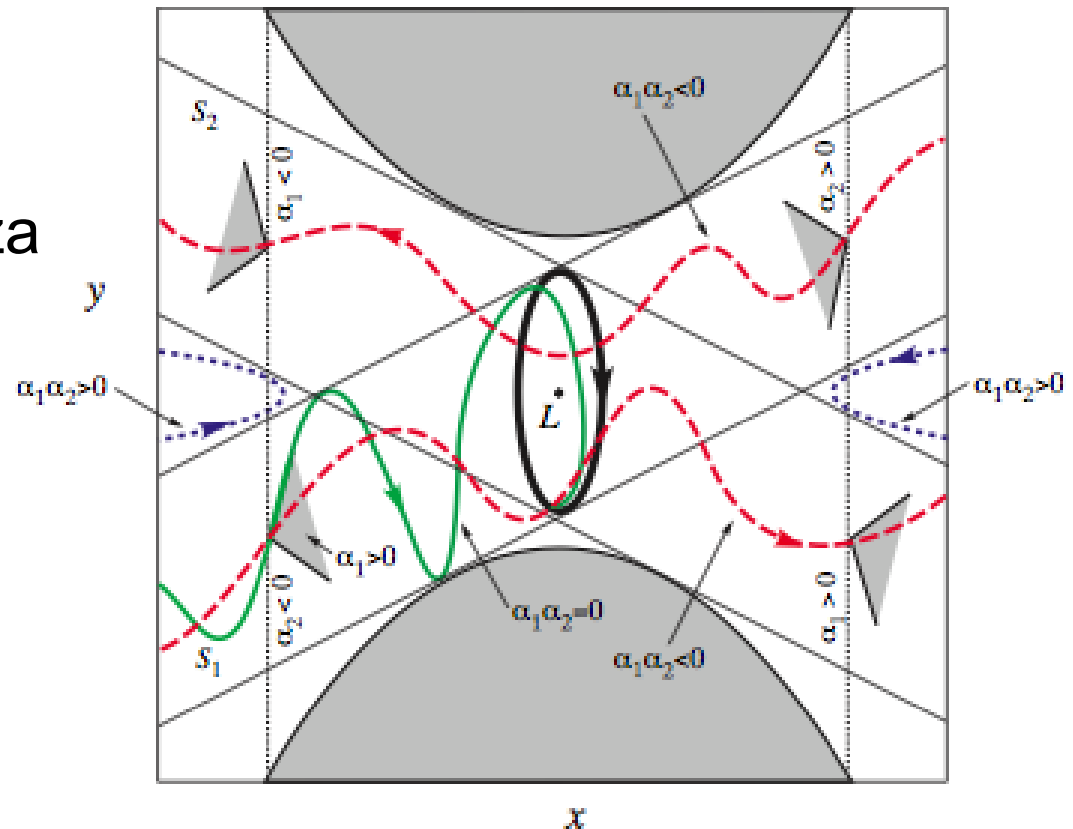


$$C_J = 3.045$$

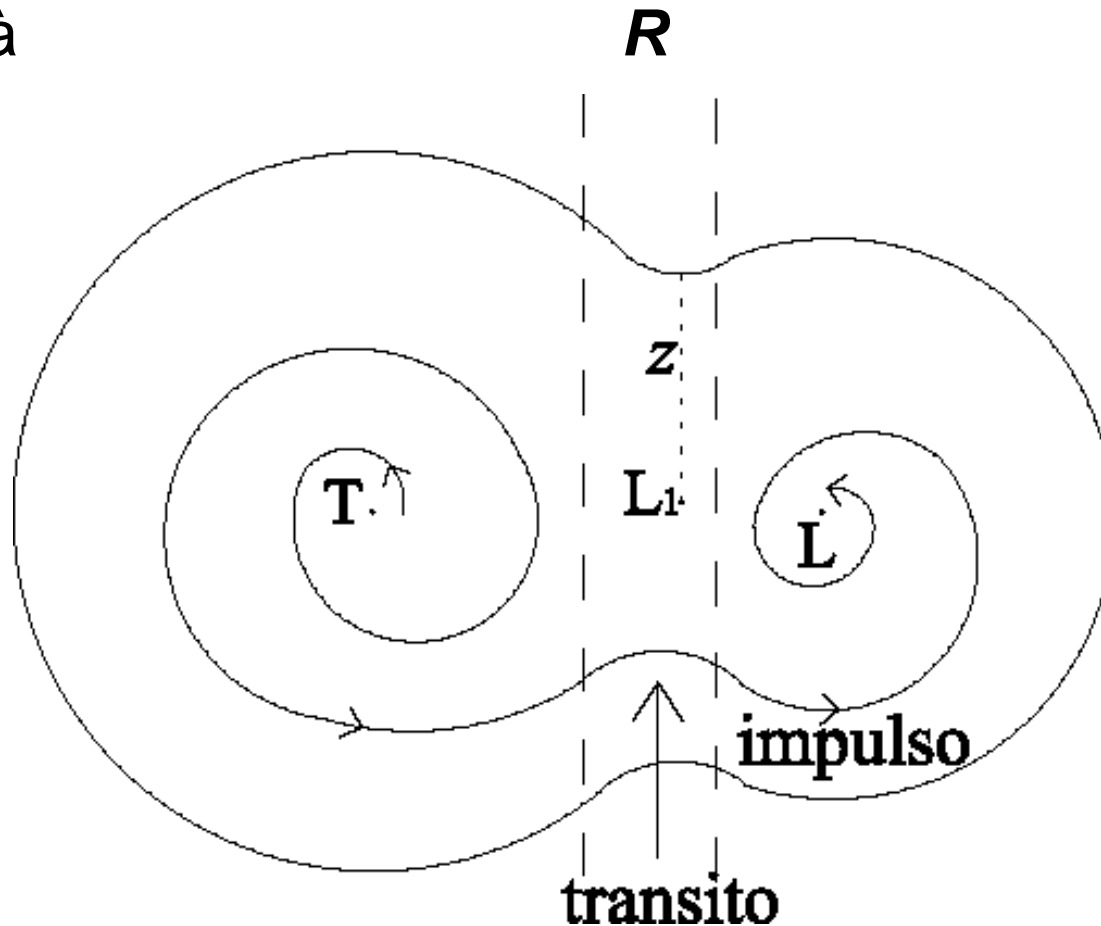


- Dimostra l'esistenza di orbite di transito nel collo di bottiglia:
 - linearizzando le equazioni attorno a L_1
 - usando la versione di J. Moser del teorema di Lyapunov, cosicché i risultati del sistema linearizzato sono validi per le equazioni non-lineari

- dimostrando l'esistenza di orbite di transito via le varietà stabili e instabili associate a L_1




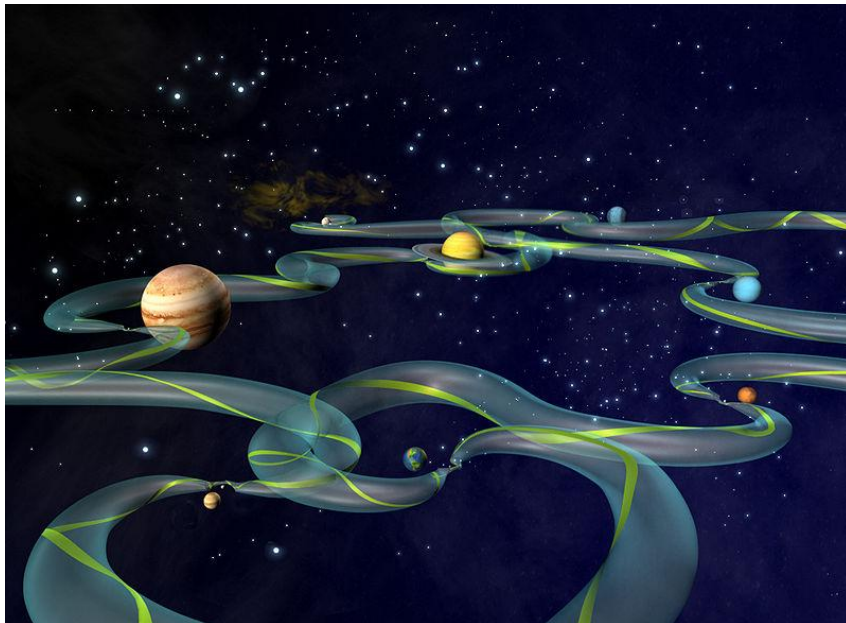
- Disegno di orbite Terra-Luna low-energy con i seguenti requisiti:
 - i. Minimo costo di carburante
 - ii. Facilità di controllo e stabilità
 - iii. Flessibilità



- i. Traiettorie a bassa energia $\geq E(L1)$; obiezioni: tempo lungo, sensibilità alle condizioni iniziali (\rightarrow ii., iii.)
 - ii. Semplice controllo: la sonda è trasferita dall'orbita di transito a quella circumlunare, tramite un impulso vicino a R (r piccolo \rightarrow impulso piccolo); stabilità: il tempo di transito è breve.
 - iii. Fuori R approssimare con pb. 2 corpi \rightarrow *patched conics* e non è richiesta grande accuratezza nella messa in orbita attorno alla Luna.
-
- **Conley:** “*Unfortunately, orbits such as these require a long time to complete a cycle (e.g., 6 months, though a modification of the notion might improve that). On the other hand, one cannot predict how knowledge will be applied – only that it often is*”.

14. CERTAMENTE: le autostrade interplanetarie

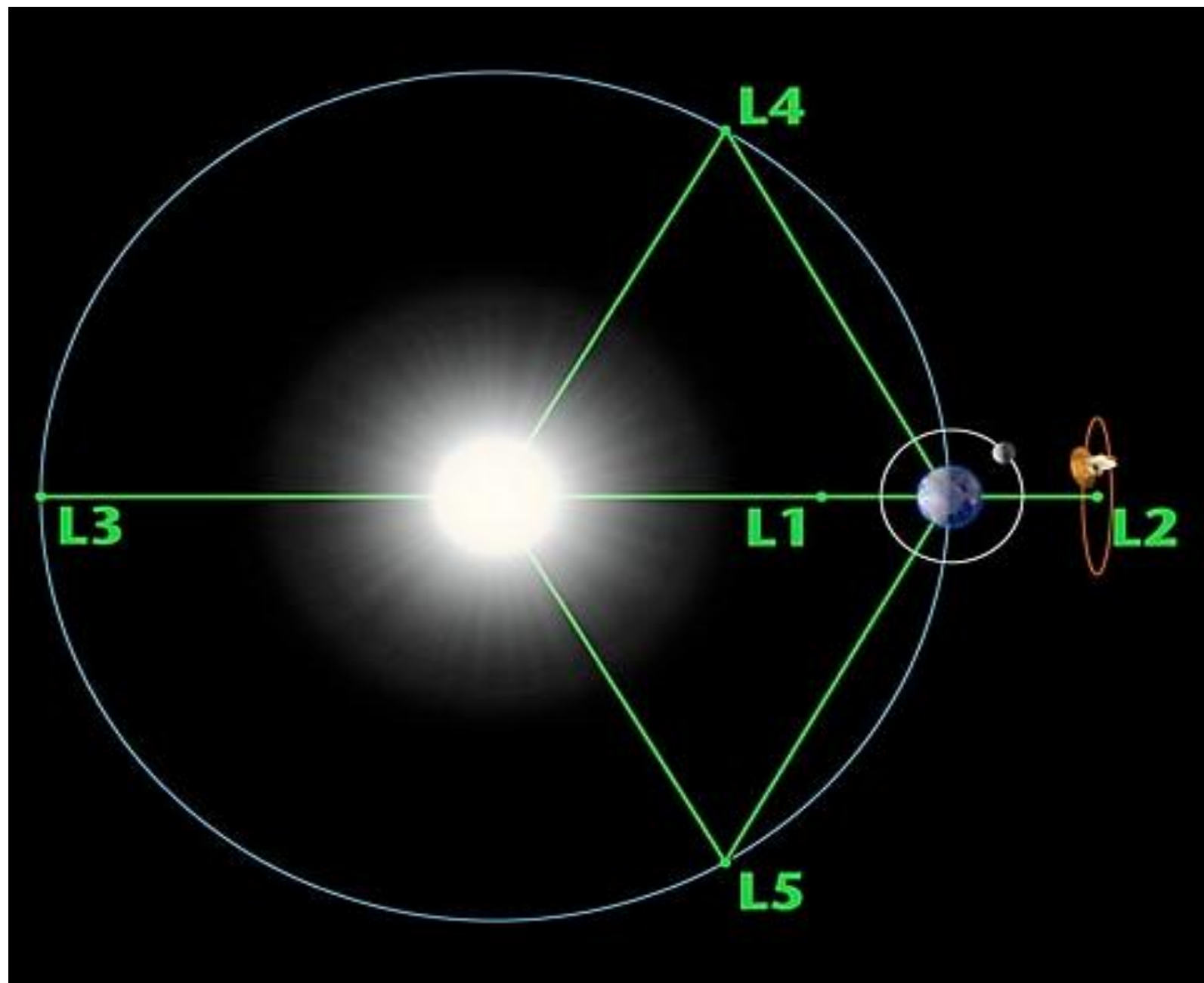
- Strade naturali **caotiche**: asteroidi nella risonanza 1:3 con Giove (~2.5 UA) vengono trasportati su orbite caotiche e diventano Mars-crossing  lacuna 1:3
- Usare caos, orbite KAM regolari e punti Lagrangiani



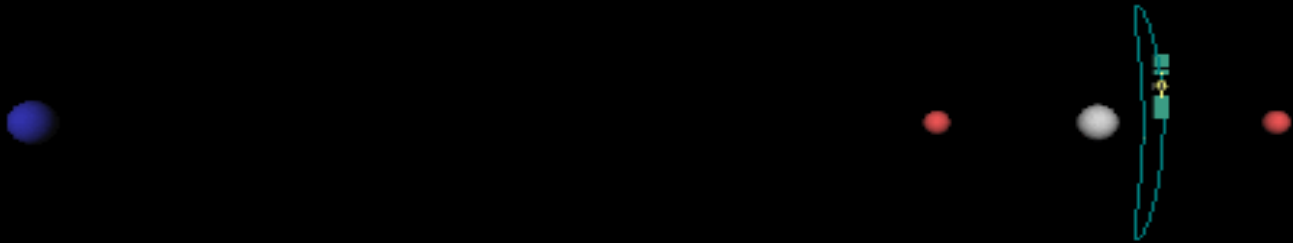
- Applicato ai satelliti: nuove strade attraverso traiettorie **caotiche**
- **Risultato**: tempi più lunghi, ma meno carburante

- I punti **collineari** sono molto utili:
 - Terra-Luna L1 e L2 sono *vicini* alla Terra (1.5 milioni km)
 - sono un buon punto di osservazione del Sole (**halo orbits**)
 - Terra-Luna L2 può essere usato per stabilire comunicazioni tra la Terra e la faccia nascosta della Luna
 - punti di librazione forniscono trasporto interplanetario, essendo canali dinamici naturali ➡ minimo carburante

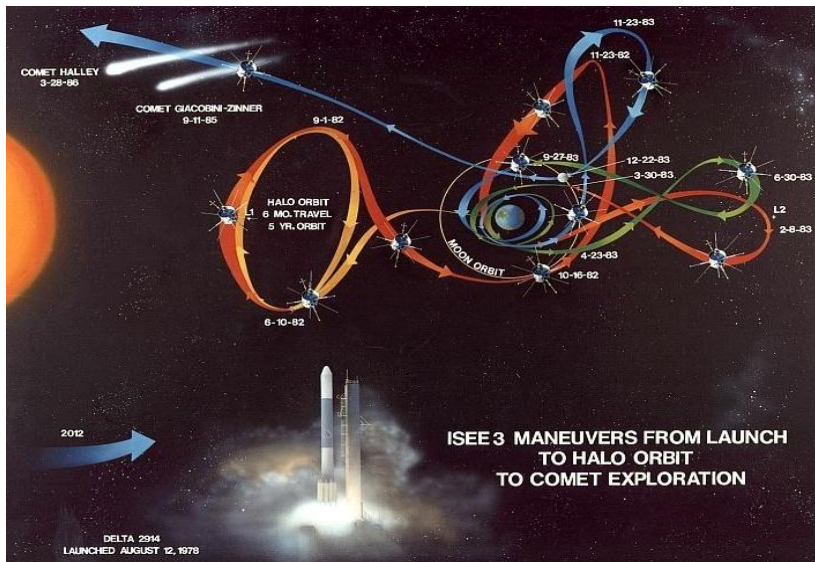




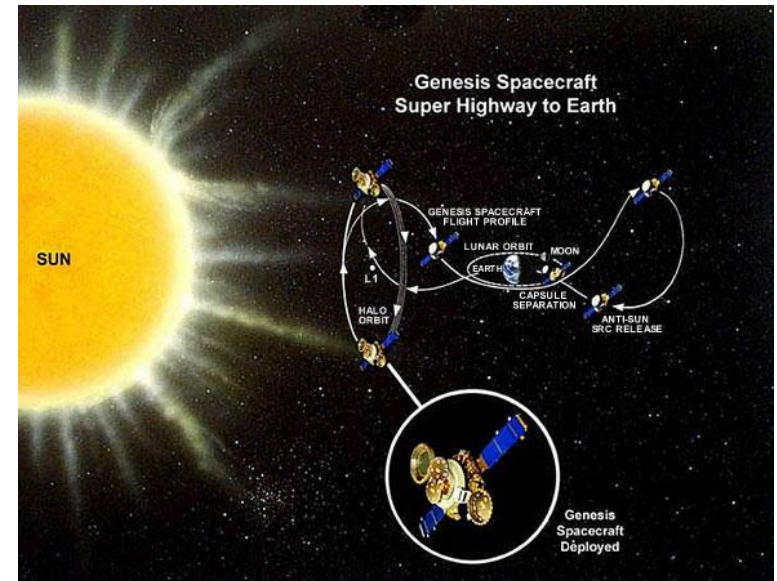
Halo orbit



- International Sun/Earth Explorer 3 (**ISEE-3**): lanciato 12/8/1978 per studiare il campo magnetico terrestre e il vento solare
- Usando i punti **Lagrangiani** l'orbita è stata deviata verso la cometa Giacobini-Zinner
- Fly-by con la Luna per entrare in una **halo orbit** nel 2014



ISEE-3



Genesis

- Da ISEE a Genesis si moltiplicano le missioni che sfruttano la geografia attorno ai punti collineari.
- SOHO (1995) = Solar and heliospheric observatory mission
- MAP (2001) = Wilkinson Microwave Anisotropy Probe
- GENESIS (2001) = alla ricerca delle origini, prima missione interamente basata sulla teoria dei sistemi dinamici
- HERSCHEL-PLANCK (2009) = formazione di galassie, creazione di stelle, ecc.

SPACE MANIFOLD DYNAMICS

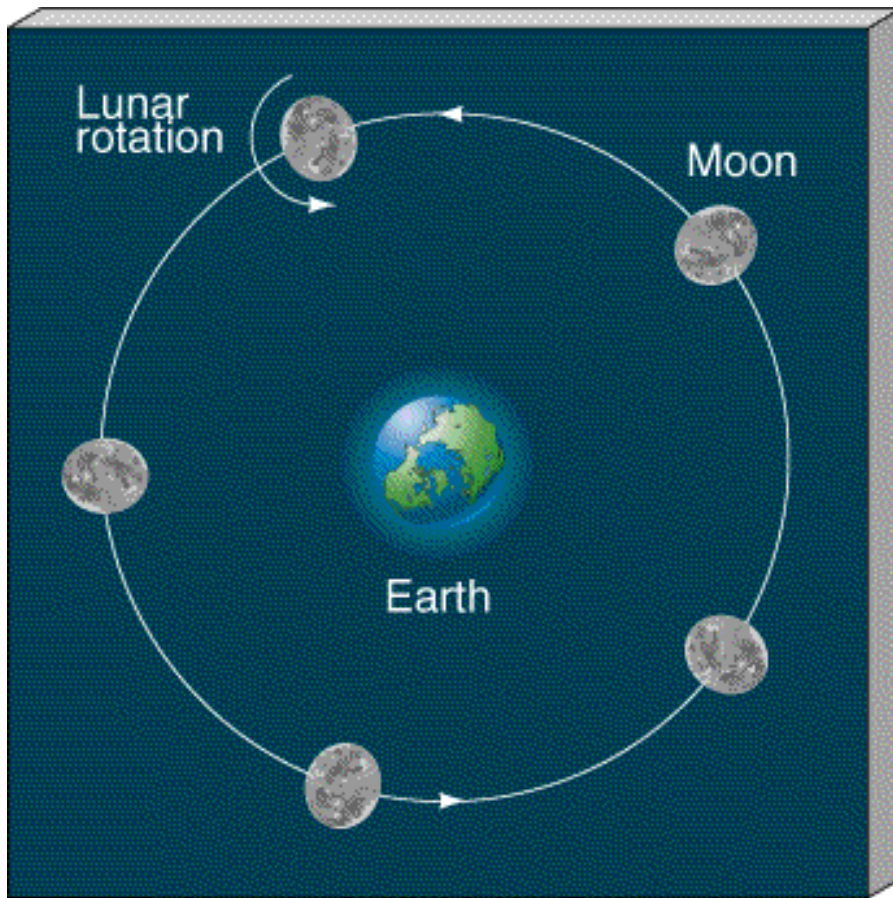
15. Risonanze spin-orbita

- Consideriamo due corpi T e L (ad esempio, Terra e Luna) di masse m_T e m_L ; denotiamo con T_{riv} il periodo di rivoluzione di L attorno a T e con T_{rot} il periodo di rotazione di L attorno ad un proprio asse interno (quindi L non è considerato puntiforme, ma è un corpo rigido).
- **Definizione**: Si ha una *risonanza spin-orbita* di ordine p/q , se

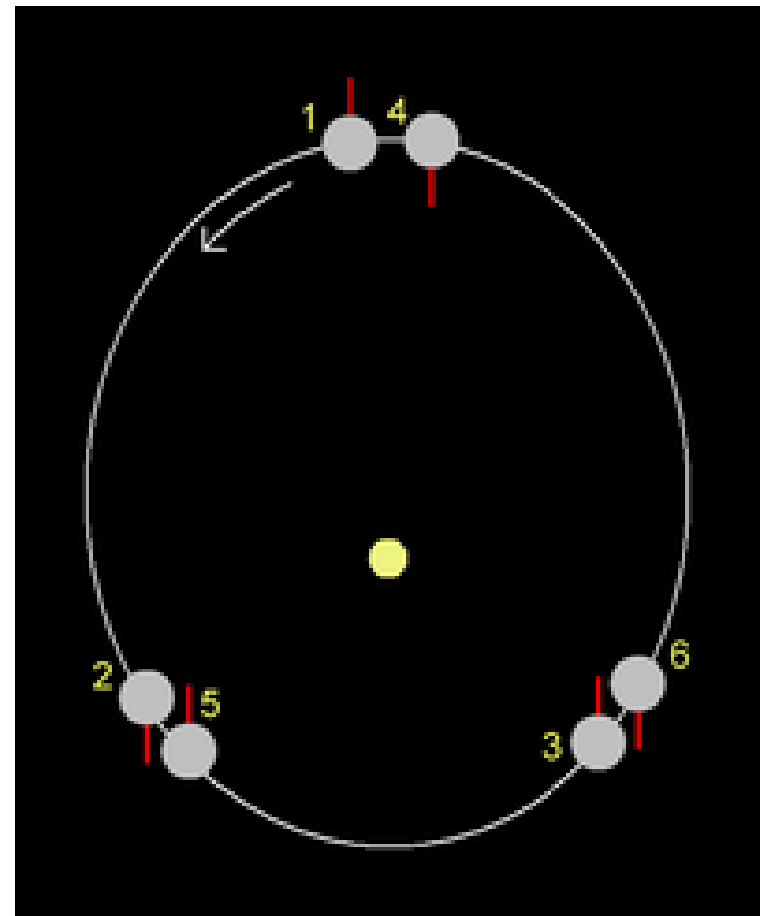
$$T_{riv} / T_{rot} = p/q \text{ con } p, q \text{ interi non nulli.}$$

- L'esempio più famoso di risonanza 1/1 è il sistema Terra-Luna: la Luna rivolge sempre la stessa faccia verso la Terra, i periodi di rivoluzione e di rotazione sono uguali.

- Numerosi satelliti si muovono in risonanza sincrona 1/1. Esempi: i satelliti di Marte (Phobos e Deimos), i satelliti galileiani (Io, Europa, Ganimede e Callisto), molti dei satelliti di Saturno (tra cui Mimas, Encelado, Dione, Rea, Titano, Giapeto), i principali satelliti di Urano (Miranda, Ariel, Umbriel, Titania, Oberon).
- L'unica eccezione a questa "regola" è rappresentata da Mercurio, poiché il rapporto tra il periodo di rivoluzione di Mercurio attorno al Sole e il periodo di rotazione di Mercurio attorno a se stesso è pari a circa 3/2.
- Quindi, durante 2 rivoluzioni attorno al Sole, Mercurio compie 3 rotazioni attorno a se stesso.
- Plutone e Caronte sono in risonanze sincrona completa: i periodi di rotazione e rivoluzione di Caronte coincidono con il periodo di rotazione di Plutone; pertanto i due oggetti non si volgono mai le spalle, mostrando reciprocamente sempre lo stesso emisfero.



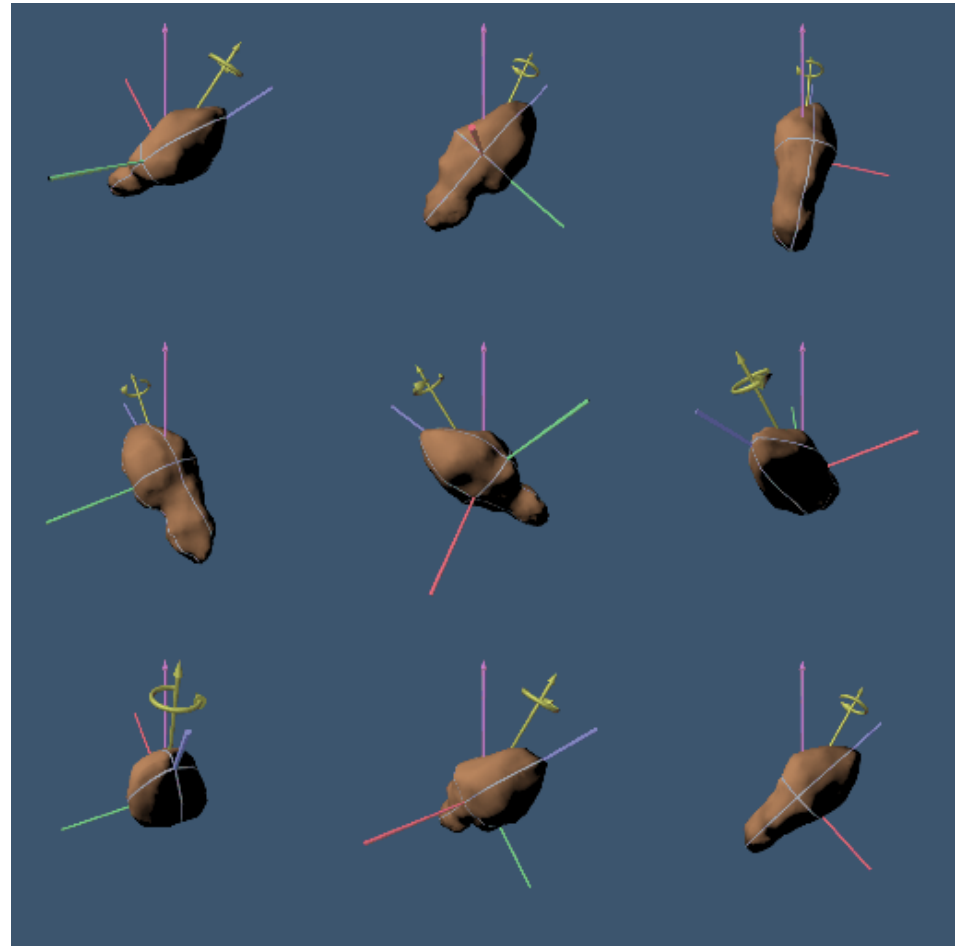
Risonanza 1/1



Risonanza 3/2

Satelliti non sferici

- Iperione
- Toutatis
- Rotazione in 9 giorni



<http://www.solarviews.com/cap/ast/toutat9.htm>

Iperione

Also known as: SVII

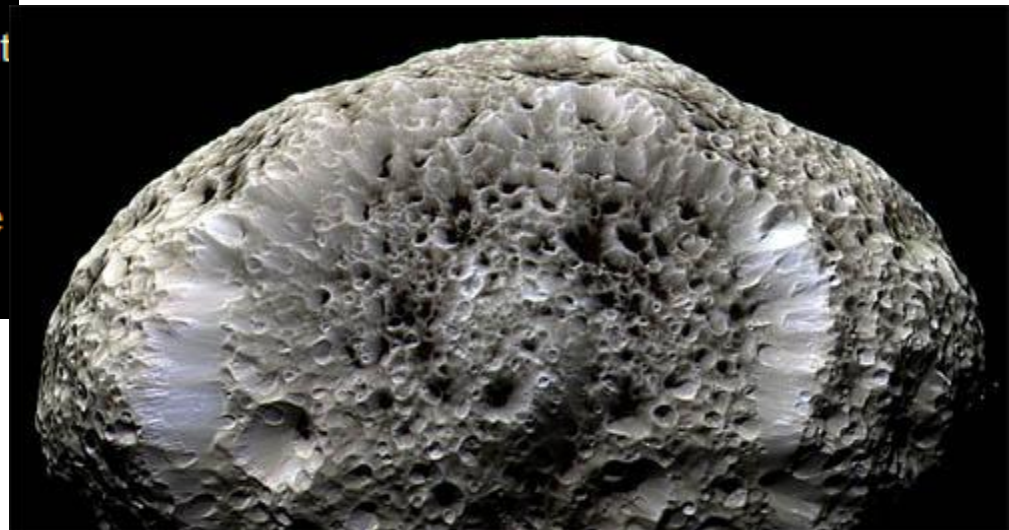
Size: 410 x 260 x 220 km

Orbital radius: 1 480 000 km
24.6 Saturn radii
outside Saturn's ring system

Orbital Period: 21 days, 7 hours

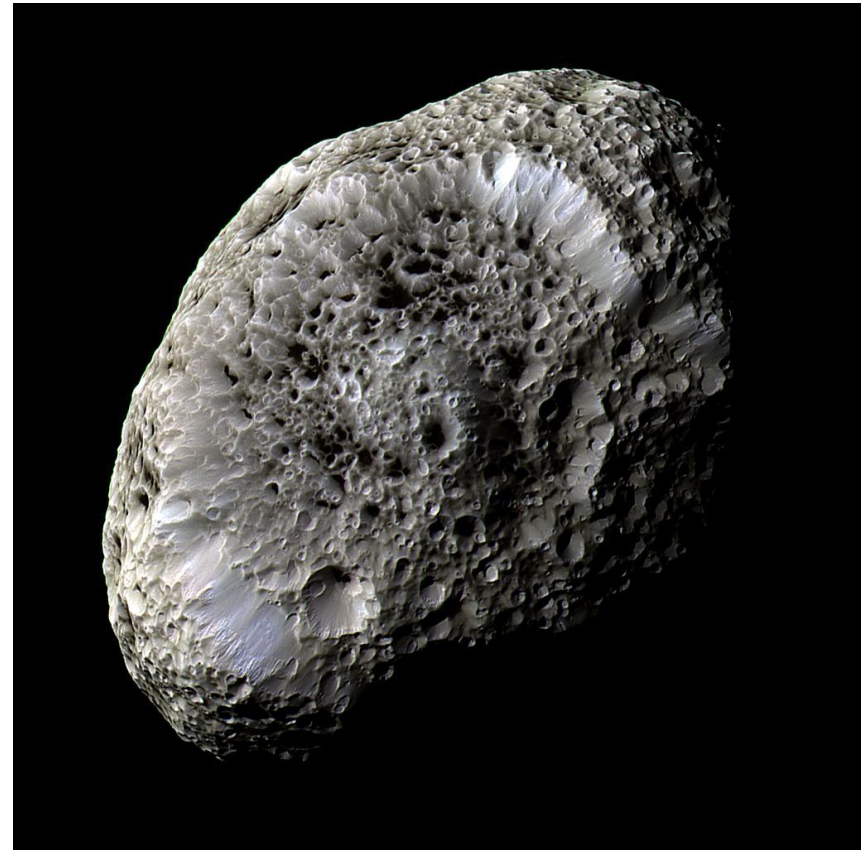
Discovery: 1848 by
George Phillips Bond and
William Lassell

Hyperion is the largest highly irregularly shaped body in the solar system. It has no fixed spin axis but instead tumbles and rotates chaotically. Close-up views of Hyperion have revealed it to have an odd, spongy appearance. Hyperion's self-gravity is not enough to crush its materials together and eliminate gaps in its interior.



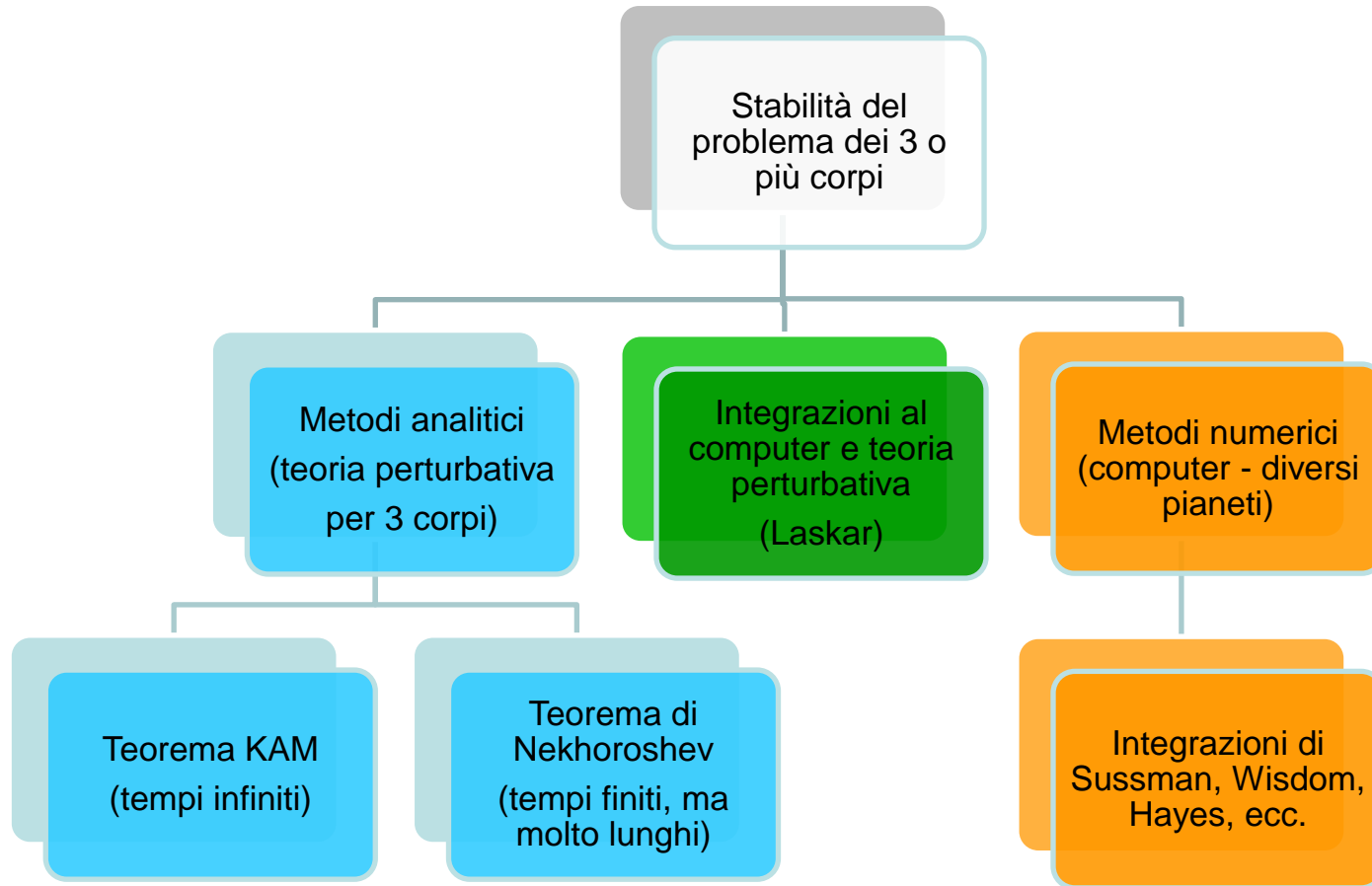
- Rotazione caotica:
- Iperione è un satellite di Saturno, che si riteneva ruotasse in maniera regolare attorno al suo asse di rotazione.

Le osservazioni del Voyager 2 hanno mostrato un oggetto di forma molto irregolare.



J. Wisdom, S. Peale e F. Mignard hanno mostrato che a causa della sua struttura irregolare, Iperione è soggetto ad una rotazione caotica con un asse di spin non fisso, che si muove in maniera disordinata nello spazio.

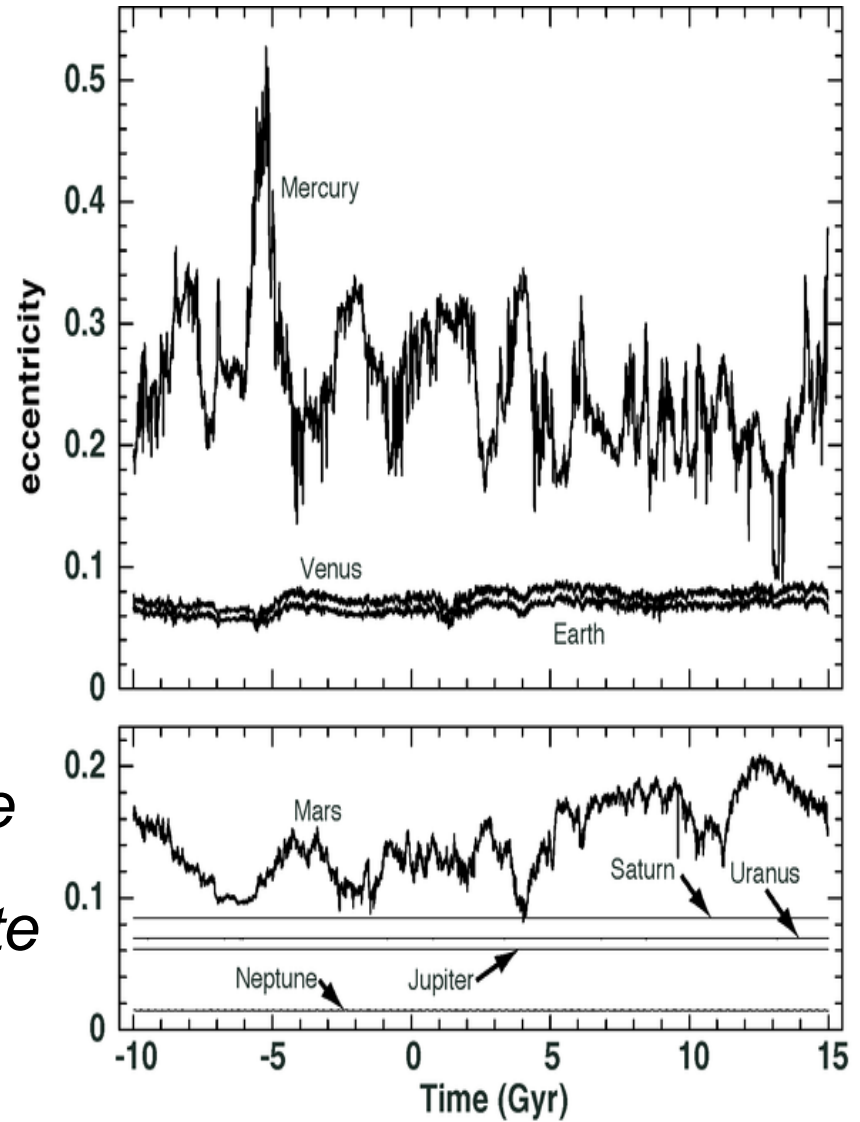
16. La caotica armonia dei pianeti



- Laskar: il sistema solare INTERNO è **CAOTICO**.
- Da un errore di **15 metri** sulla posizione iniziale della Terra:
errore **150 m** dopo 10 milioni di anni
errore **150 milioni di km** dopo 100 milioni di anni,
impedendo ulteriori predizioni!

□ **Risultato:**

- **Mercurio** e **Marte** decisamente caotici
- **Venere** e **Terra** moderatamente caotici
- I pianeti **esterni** sono regolari
- **Plutone** è molto caotico



- ***E gli altri oggetti del sistema solare?***
- Pianeti nani, asteroidi, comete, oggetti di Kuiper possono essere regolari (come Cerere) o caotici, con il pericolo che si scontrino con la Terra.
- ***Apophis*** (il distruttore): 350 metri, 46 miliardi di kg.
- Avvicinamento alla Terra: 13 Aprile 2029
- Possibile collisione con la Terra: 13 Aprile 2036
(fortunatamente la probabilità è molto bassa,
da 1/6000 nel 2005 a 1/250.000 nel 2009)

FINE