Le formule del cielo: la caotica armonia dei pianeti

Alessandra Celletti

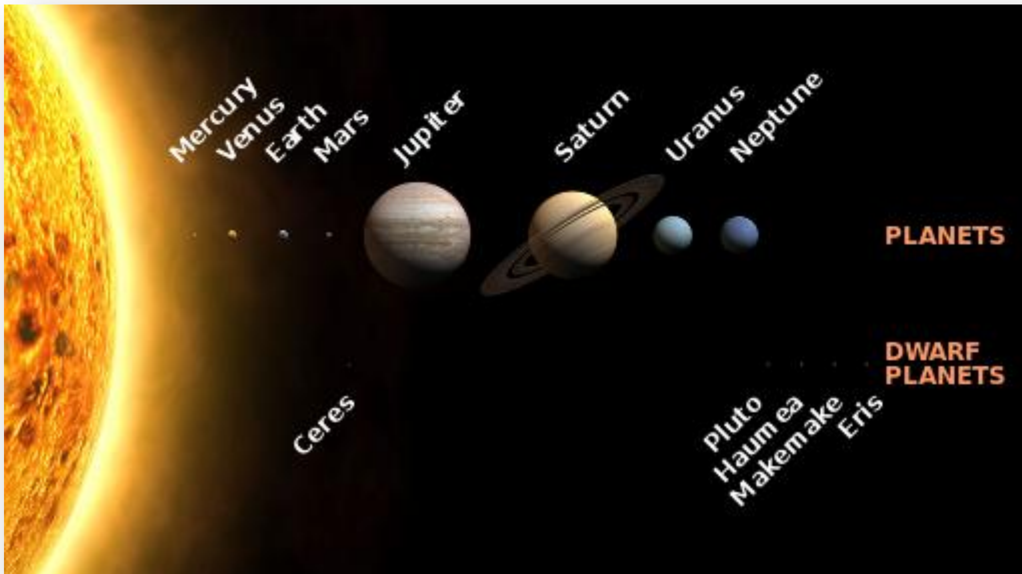
Dipartimento di Matematica
Università di Roma Tor Vergata
celletti@mat.uniroma2.it

Immagine: CICLOPS, JPL, ESA, NASA

SOMMARIO

Immagine: S. Beckwith & the HUDF Working Group (STScI), HST, ESA, NASA

1. Il sistema solare



- Sole
- Pianeti rocciosi
- Pianeti gassosi
- Pianeti nani
- Satelliti
- Asteroidi e comete

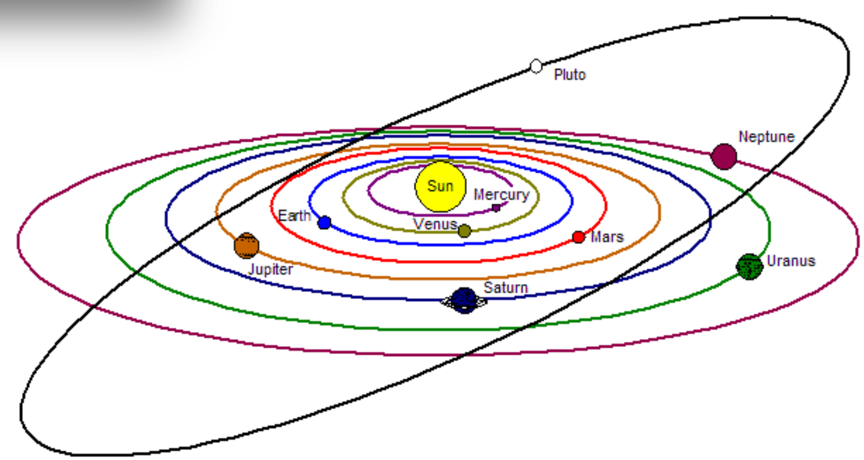
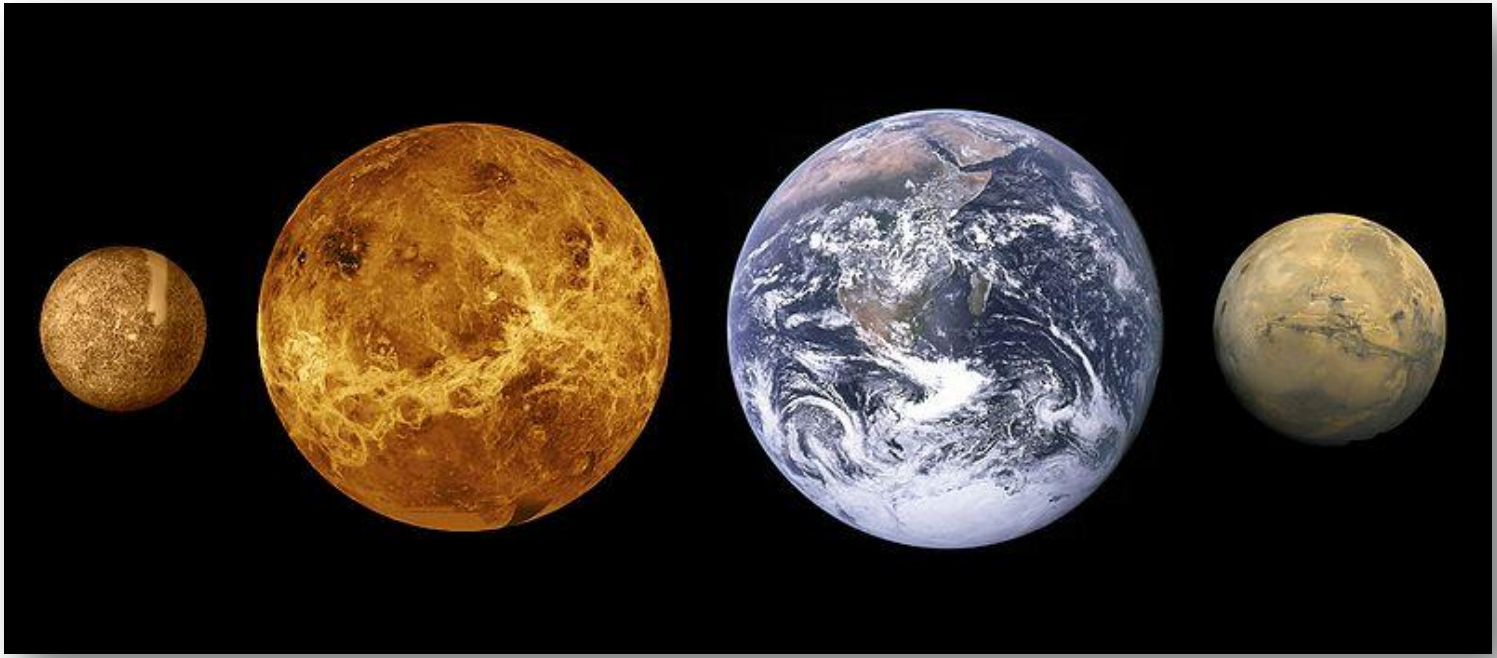


Immagine: NASA

Pianeti rocciosi o interni

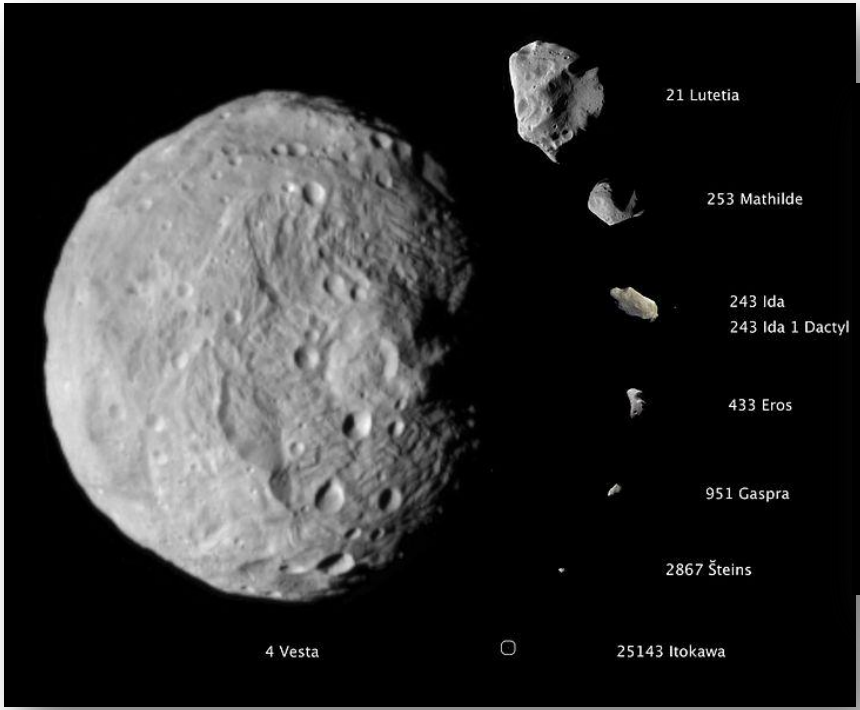


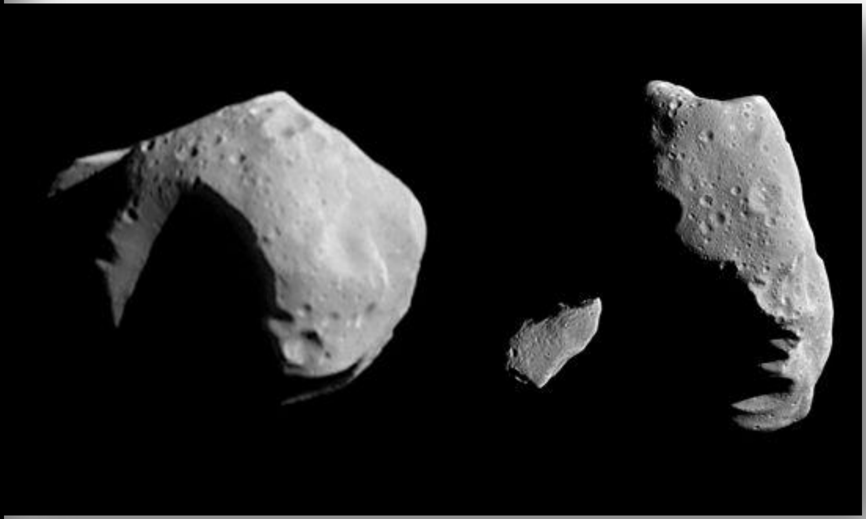
Mercurio, Venere, Terra, Marte

Piccoli, rocciosi, nessuno o pochi satelliti

Immagine: NASA

Asteroidi: 580.000 oggetti catalogati



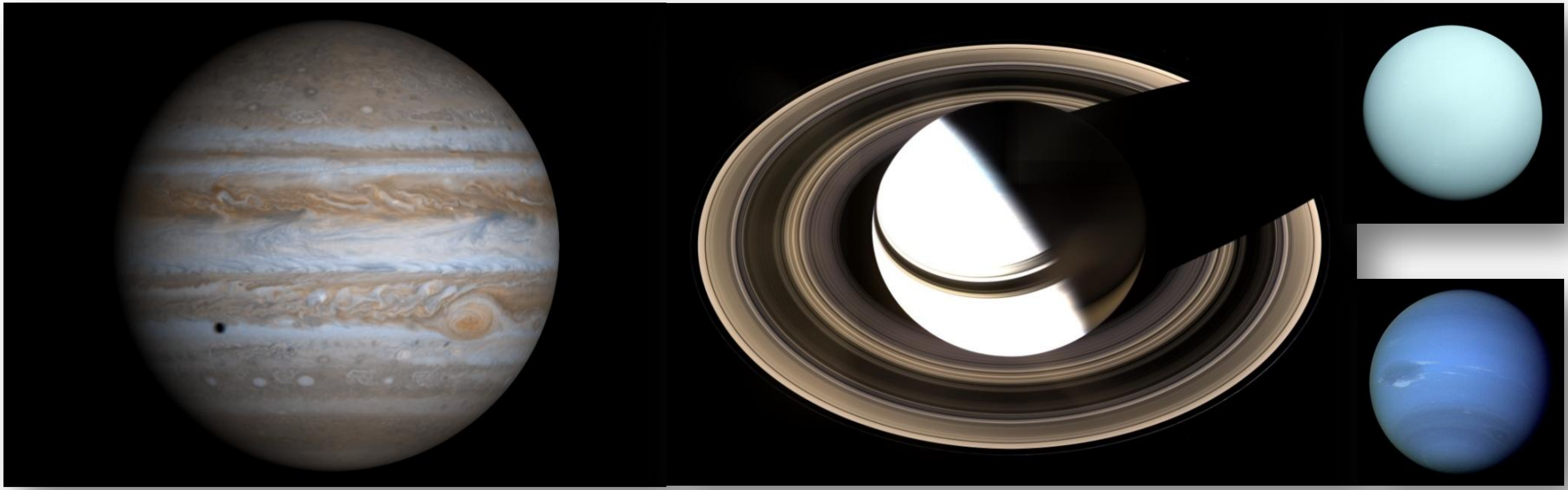


Hanno dimensioni e forme irregolare, qualcuno ha satelliti, formano una fascia tra Marte e Giove

http://www.youtube.com/watch?v=ONUSP23cmAE&annotation_id=annotation_79355&src_vid=S_d-gs0WoUw&feature=iv

Immagini: NASA, NEAR Project, Galileo Project

Pianeti gassosi o esterni

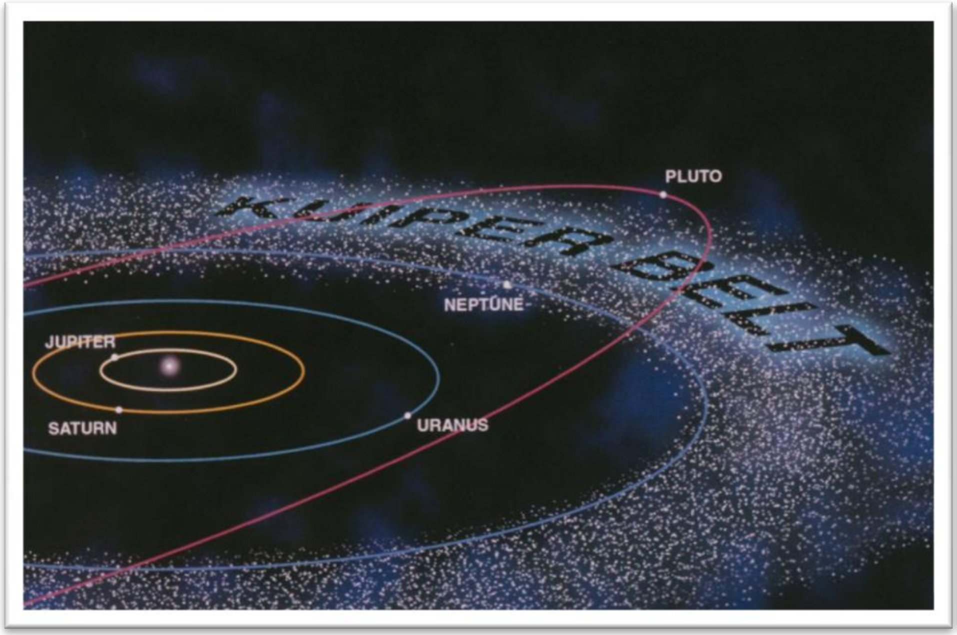


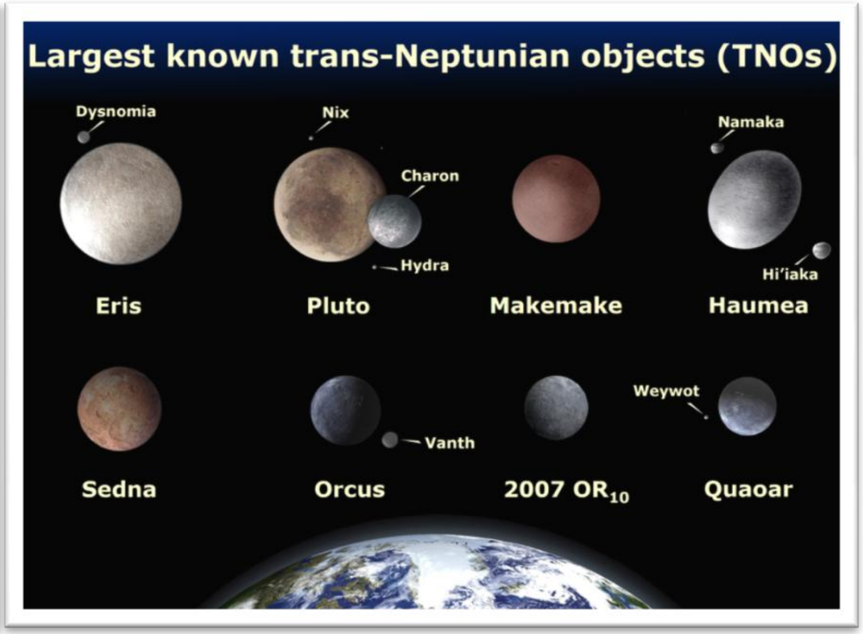
Giove, Saturno, Urano, Nettuno

Grandi, gassosi, con tanti satelliti e con anelli

Immagini: NASA/JPL/University of Arizona, NASA/JPL/Space Science Institute, PD-USGOV-NASA, NASA

Fascia di Kuiper

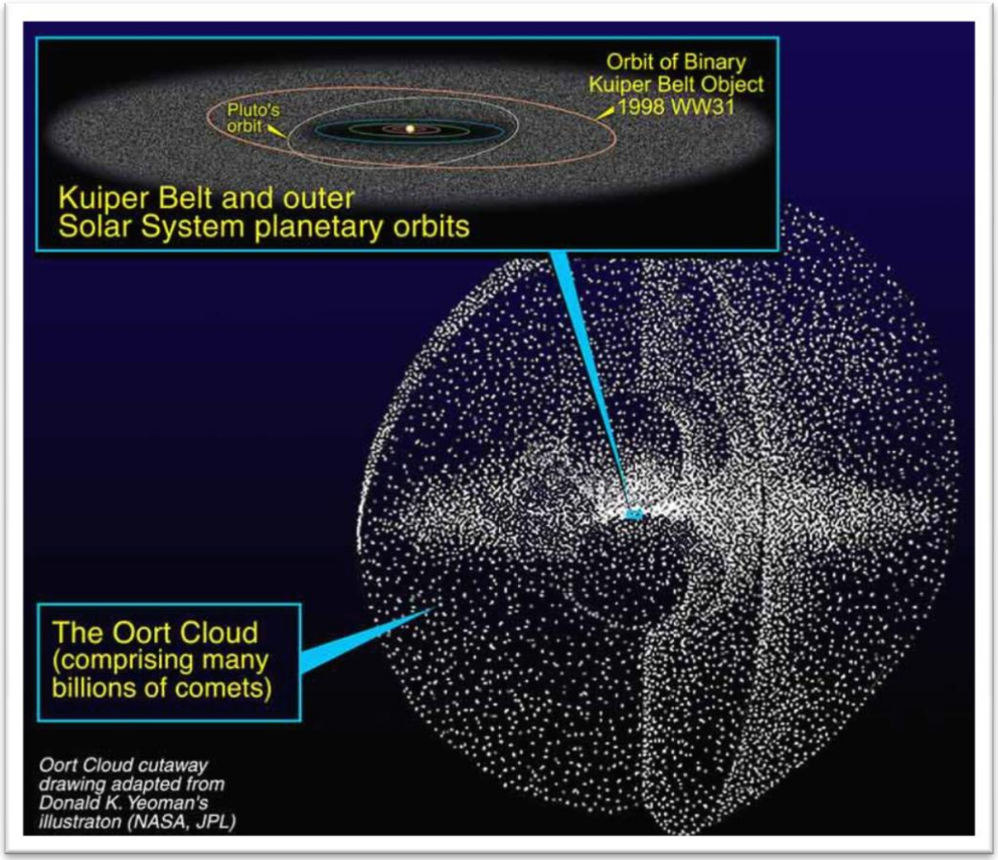




Centinaia (migliaia?) di oggetti rocciosi e ghiacciati (tra cui Plutone), ai confini del sistema solare esterno

Immagini: NASA

Nube di Oort



- Tra 30,000 e 100,000 UA
- Miliardi di oggetti ghiacciati
- Serbatoio di comete a *lungo periodo*, lanciate nel sistema solare da forti perturbazioni (avvicinamento ad una stella o passaggio del Sole attraverso una nube molecolare gigante.

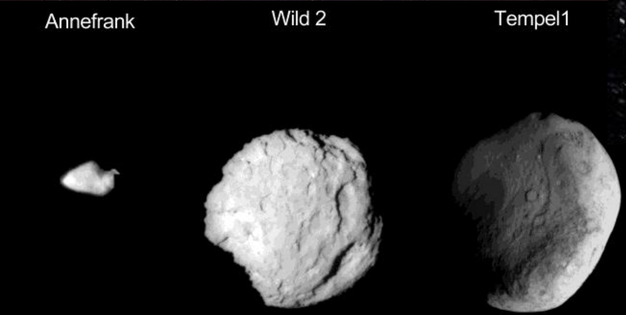
1 UA = distanza Sole-Terra = 150 milioni km.

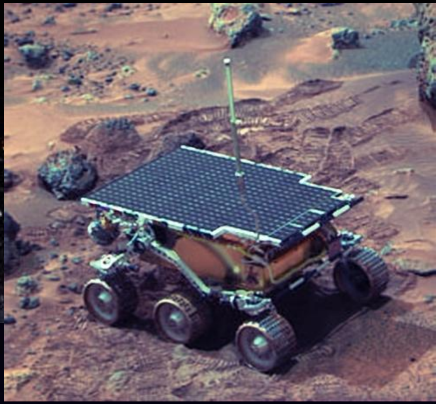
2. La Meccanica Celeste

- La **MECCANICA CELESTE** studia la dinamica degli oggetti del sistema solare: pianeti, satelliti, asteroidi, ecc.

- La **MECCANICA CELESTE** studia anche la dinamica dei pianeti **extrasolari** (n. 726 al 20/1/2012)

- La **DINAMICA DEL VOLO SPAZIALE** studia il moto dei satelliti artificiali e delle sonde interplanetarie (prima **missione spaziale**: Sputnik 1 il 4 Ottobre 1957)





Immagini: NASA/JPL-Caltech/University of Maryland/Cornell, NASA and The Hubble Heritage Team (STScI/AURA), ESA-Hubble Collaboration, E. L. Wright (UCLA), The COBE Project, DIRBE, NASA , GALILEO/NASA/JPL

Aristotele
384-322 AC

il sistema del mondo

Ipparco
190-120 AC

epicicli

Tolomeo
85-165

epicicli e deferenti

Copernico
1473-1543

sistema eliocentrico

Tycho Brahe
1546-1601

osservazioni

Galileo
1564-1642

metodo scientifico

Keplero
1571-1630

Problema dei 2 corpi

Newton
1642-1727

gravitazione

Laplace
1749-1827

determinismo

Lagrange,
Gauss,
Delaunay,
XIX secolo

Teoria delle perturbazioni

Poincarè
1854-1912

Problema dei 3 corpi

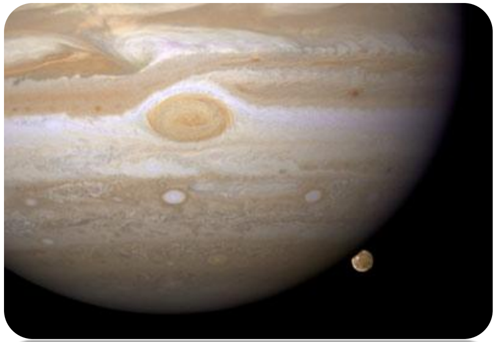
Kolmogorov,
Arnold, Moser,
Nekhoroshev
XX secolo

Teoremi di stabilità

3. Il problema dei 2 corpi

- Modello *semplificato* in cui si considera solo l'interazione gravitazionale tra **2** oggetti (Sole-Terra, Terra-Luna, ecc.)
- Legge di Newton:

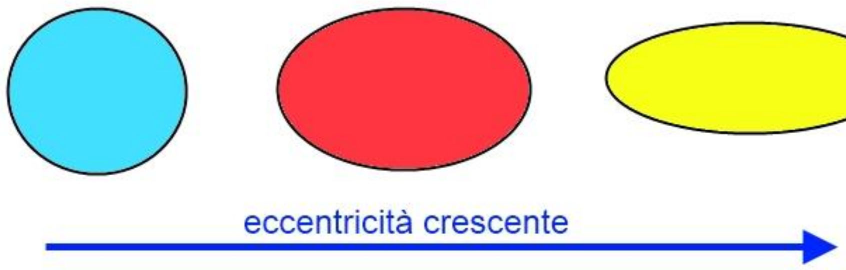
$$F = -\frac{G\,M\,m}{d^2}$$



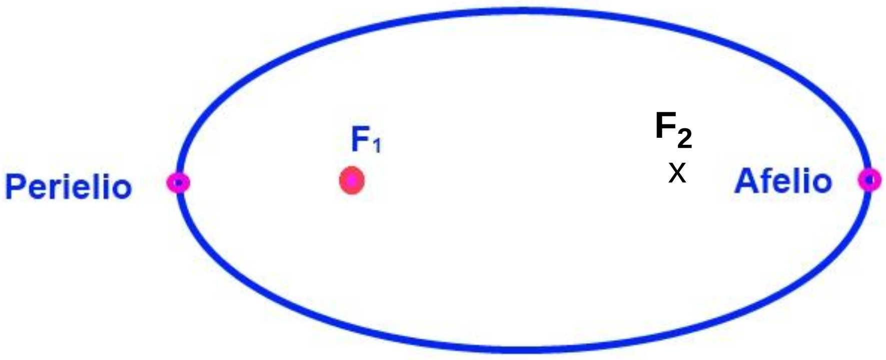
Immagini: NASA, NASA/NEAR

- Keplero (1571-1630) studiò i dati astronomici raccolti da Tycho Brahe (1546-1601) e concluse che il moto dei 2 corpi è regolato da tre leggi: i pianeti si muovo su ELLISSI, sono più VELOCI vicino al Sole, il PERIODO cresce all'aumentare della distanza

Le leggi di Keplero



- Diverse eccentricità:
- e=0 cerchio
- 0<e<1 ellisse



- Il Sole in F1,
  il fuoco F2 è vuoto
- Perielio: vicino al Sole
- Afelio: lontano dal Sole

Eccentricità nel sistema solare:
Terra: 0.017, *Giove*: 0.048, *Mercurio*: 0.206, *Nettuno*: 0.008, *Plutone*: 0.249, *Luna*: 0.055, *Europa*: 0.0094, *Tarvos*: 0.5309

I legge di Keplero:

i pianeti si muovono su ellissi di cui il Sole occupa uno dei due fuochi

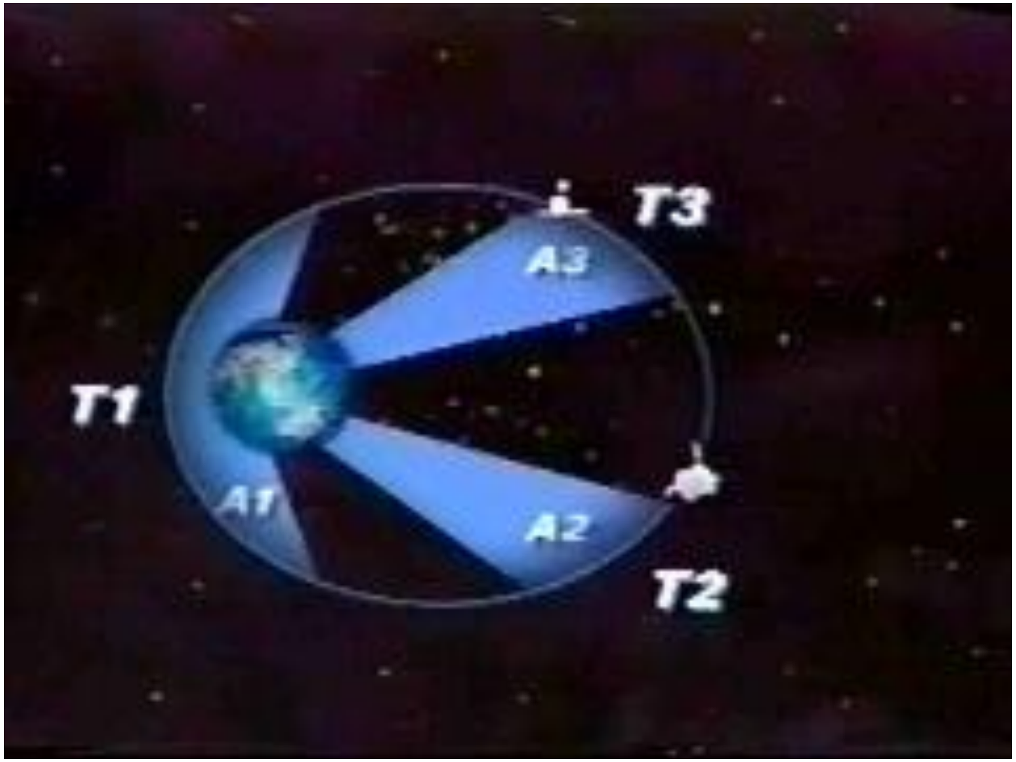
Video: http://heasarc.nasa.gov/docs/heasarc/videos/education.html

II legge di Keplero:
i pianeti spazzano aree uguali in tempi uguali

Video: http://heasarc.nasa.gov/docs/heasarc/videos/education.html

III legge di Keplero:

il quadrato del periodo di rivoluzione è proporzionale al cubo del semiasse maggiore



Video: http://heasarc.nasa.gov/docs/heasarc/videos/education.html

4. Il problema dei 3 corpi

• Cosa succede quando si considerano 3 corpi, ad esempio Sole-Terra-Giove ?

• Le leggi di Keplero sono solo un'approssimazione del moto dei pianeti, ma il problema dei 3 corpi non si riesce a risolvere esattamente!

• Teoria matematica delle perturbazioni: consente di calcolare *approssimazioni successive* della soluzione del problema dei tre corpi

• Sole-Terra-Giove: massa(*Giove*) = massa(*Sole*) / 1000 ➔

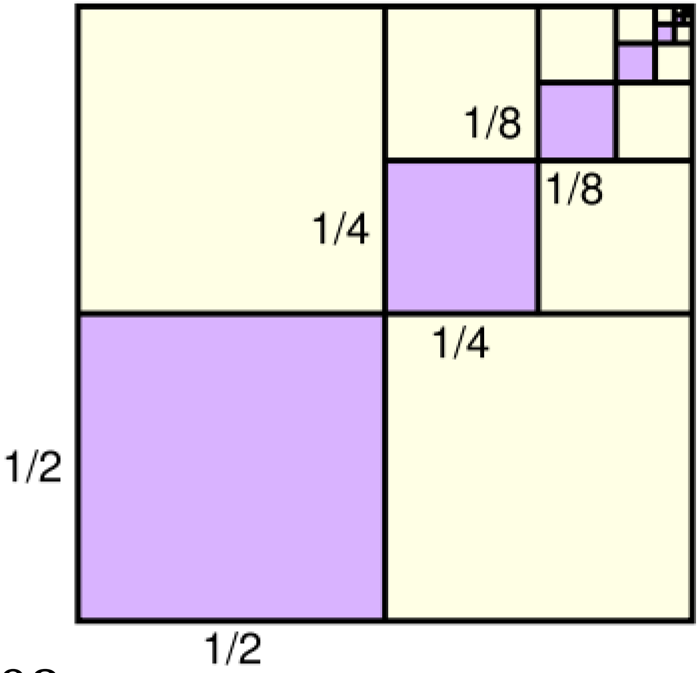
2-corpi Sole-Terra

+

piccola **perturbazione di Giove**

- La serie geometrica:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k = x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$$



Esempio: $x=1/4$

$1/4 = 0.25$

$1/4+1/16 = 0.3125$

$1/4+1/16+1/64 = 0.328125$

$1/4+1/16+1/64+1/256 = 0.332031$

$1/4+1/16+1/64+1/256+1/1024 = 0.333008$

$1/4+1/16+1/64+1/256+1/1024+\ldots = 1/3$

Esempio: $x=1.2$

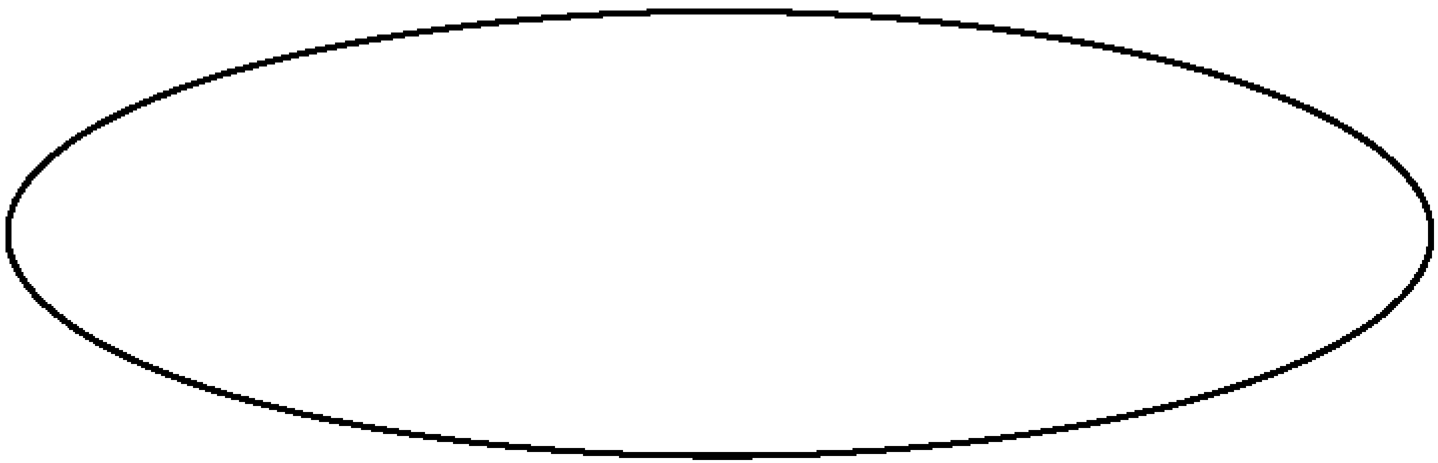
1.2

$1.2+1.2^2 = 2.64$

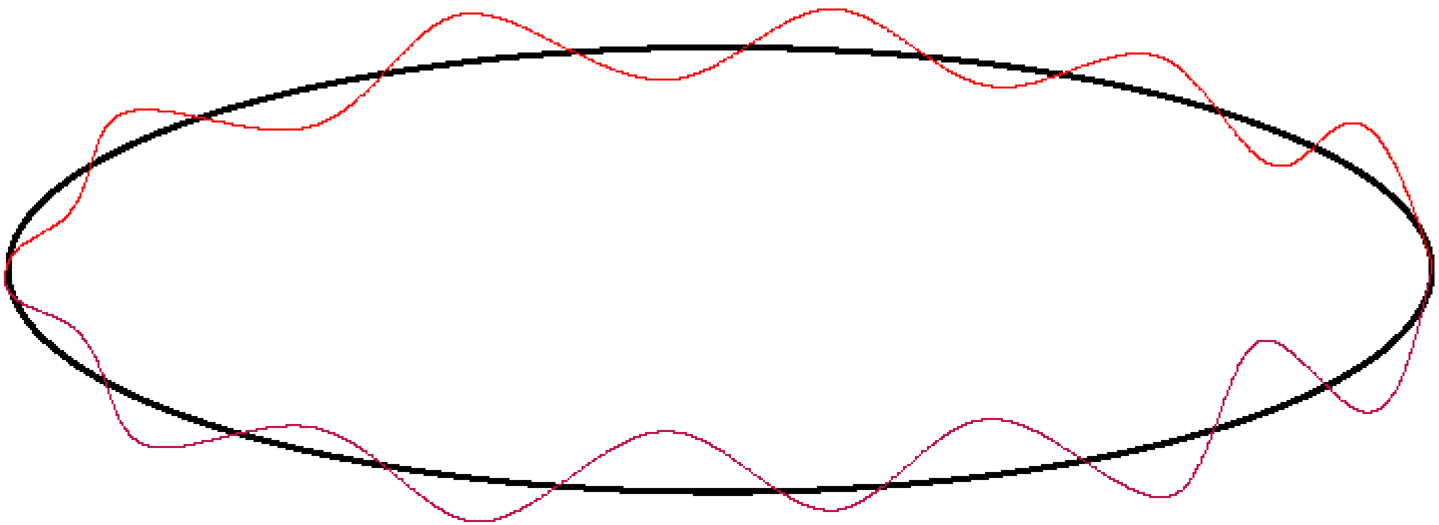
$1.2+1.2^2+1.2^3 = 4.368$

$1.2+1.2^2+1.2^3+1.2^4 = 6.4416$

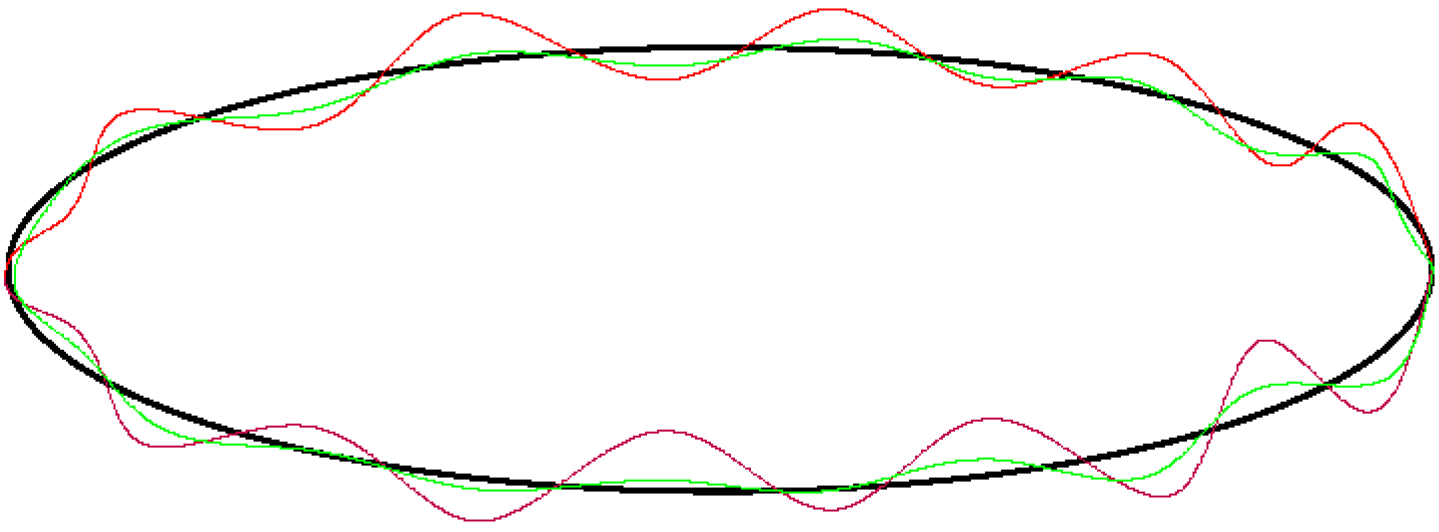
Immagine: Wikipedia



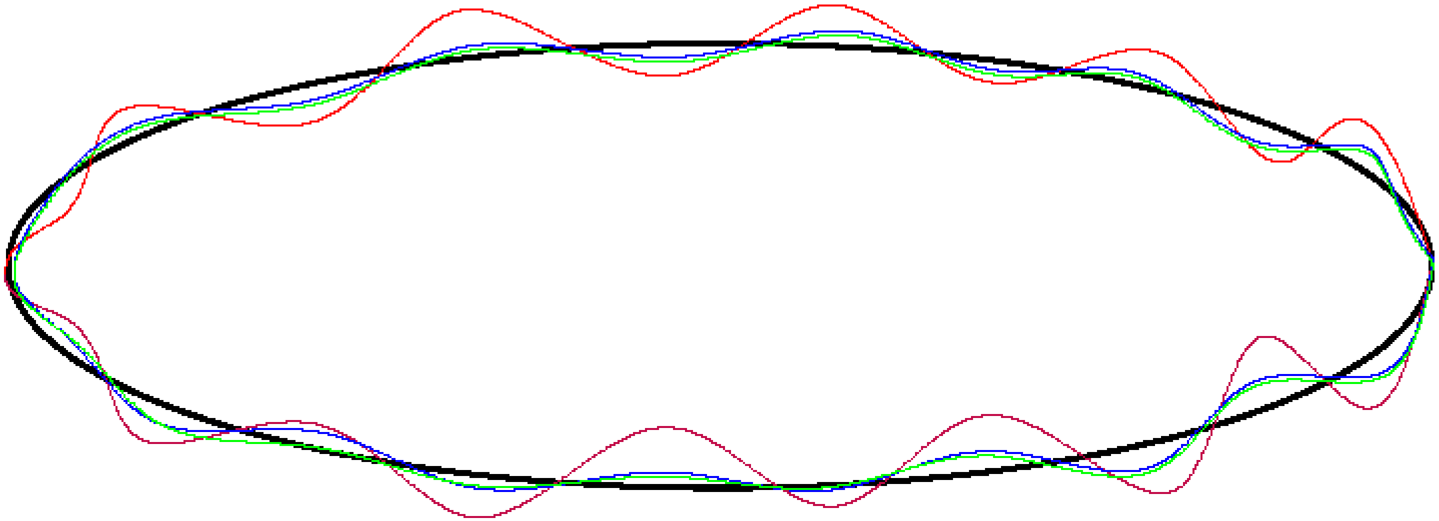
Ellisse Kepleriana: approssimazione base



Prima approssimazione (curva rossa)



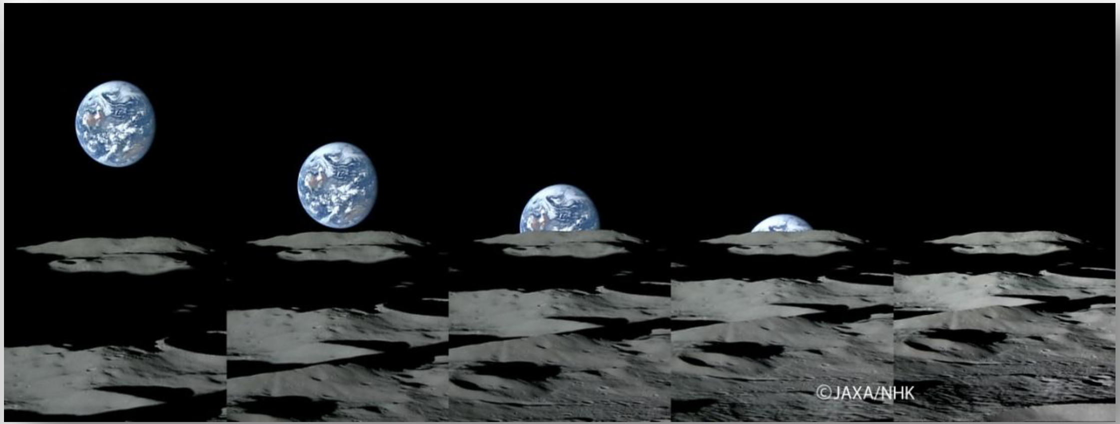
Seconda approssimazione (curva verde)

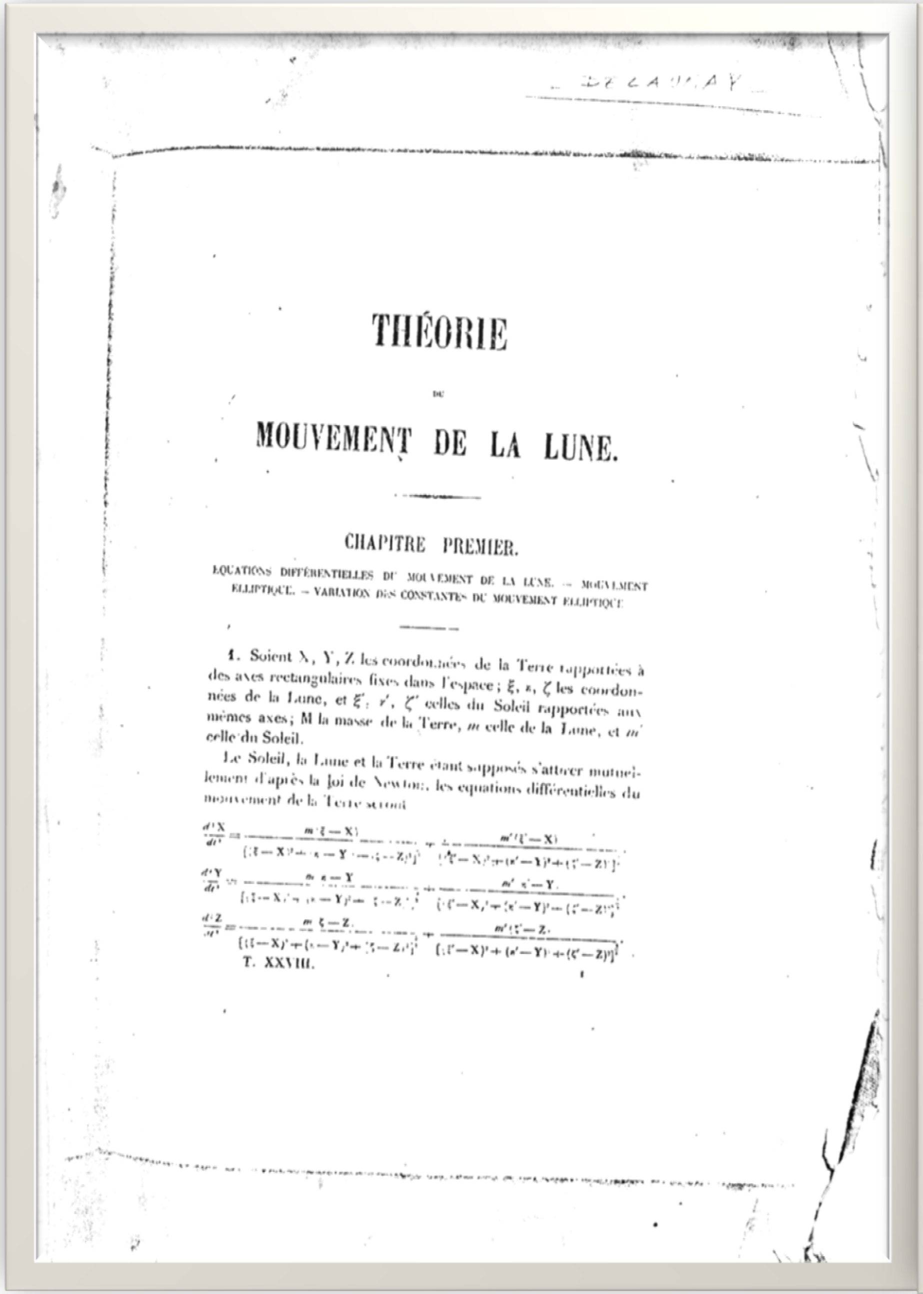


Terza approssimazione (curva blu)

- La teoria delle perturbazioni consente di determinare una soluzione approssimata delle equazioni del moto (Laplace, Lagrange, Delaunay, Leverrier, ecc., XVIII-XIX secolo).

- Charles Delaunay (1816-1872) sviluppò una teoria della Luna molto precisa, basata sulla teoria delle perturbazioni.





DELAUNAY

THÉORIE

DU

MOUVEMENT DE LA LUNE.

CHAPITRE PREMIER.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU MOUVEMENT DE LA LUNE. — MOUVEMENT ELLIPTIQUE. — VARIATION DES CONSTANTES DU MOUVEMENT ELLIPTIQUE.

1. Soient X, Y, Z les coordonnées de la Terre rapportées à des axes rectangulaires fixes dans l'espace; ξ, η, ζ les coordonnées de la Lune, et ξ', η', ζ' celles du Soleil rapportées aux mêmes axes; M la masse de la Terre, m celle de la Lune, et m' celle du Soleil.

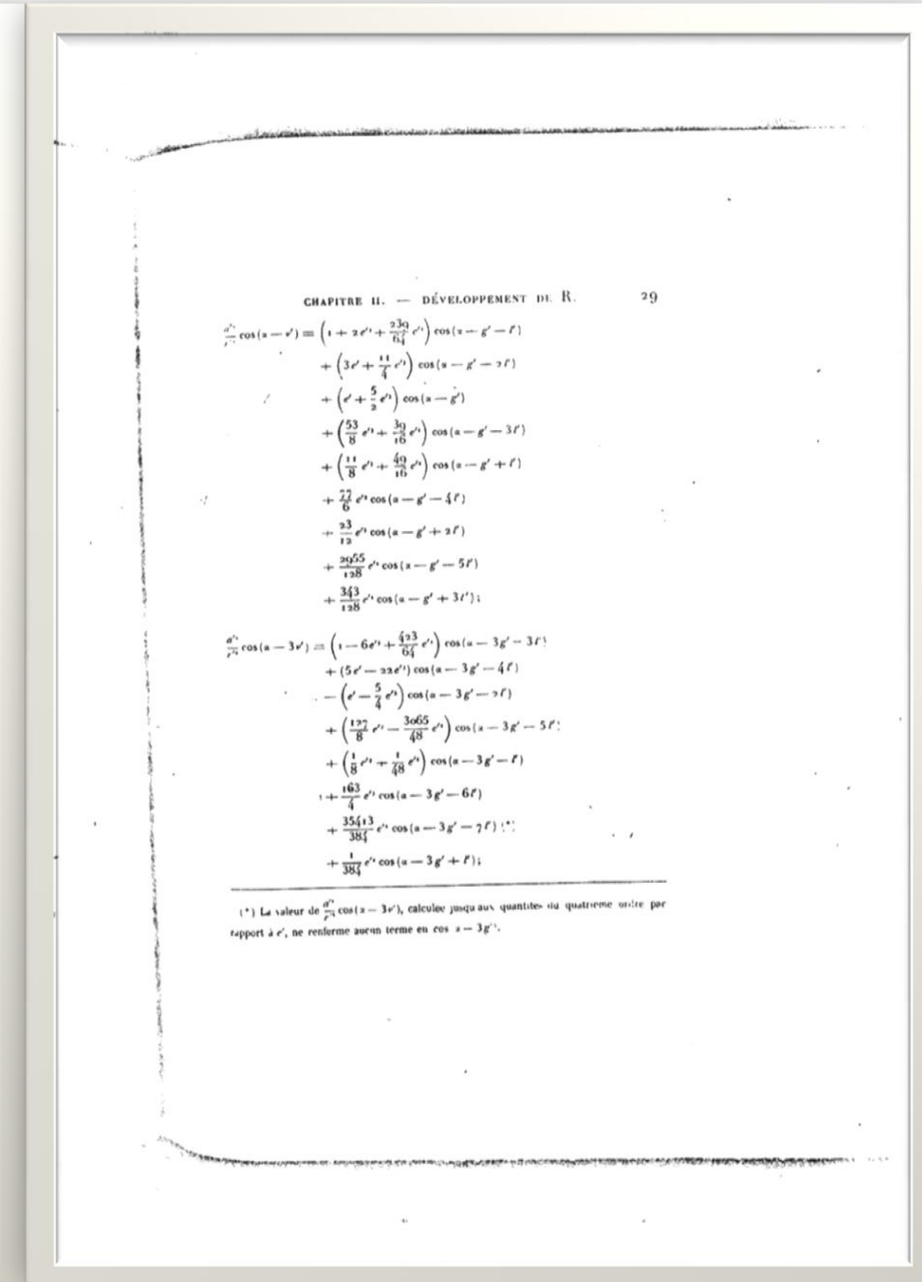
Le Soleil, la Lune et la Terre étant supposés s'attirer mutuellement d'après la loi de Newton, les équations différentielles du mouvement de la Terre seront

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{m(\xi - X)}{[(\xi - X)^2 + (\eta - Y)^2 + (\zeta - Z)^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{m'(\xi' - X)}{[(\xi' - X)^2 + (\eta' - Y)^2 + (\zeta' - Z)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = \frac{m(\eta - Y)}{[(\xi - X)^2 + (\eta - Y)^2 + (\zeta - Z)^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{m'(\eta' - Y)}{[(\xi' - X)^2 + (\eta' - Y)^2 + (\zeta' - Z)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{d^2Z}{dt^2} = \frac{m(\zeta - Z)}{[(\xi - X)^2 + (\eta - Y)^2 + (\zeta - Z)^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{m'(\zeta' - Z)}{[(\xi' - X)^2 + (\eta' - Y)^2 + (\zeta' - Z)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

T. XXVIII. 1



CHAPITRE II. — DÉVELOPPEMENT DE R. 29

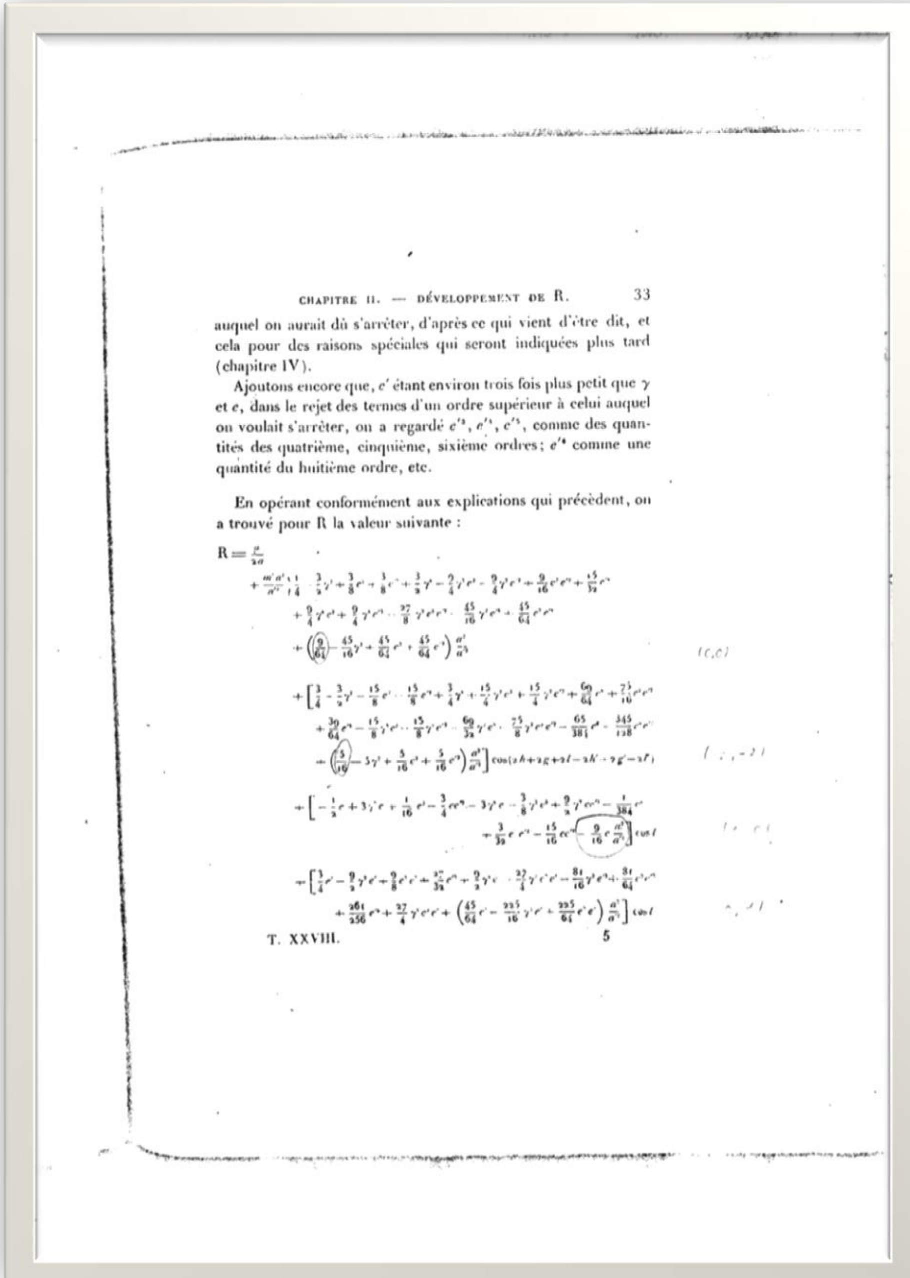
$$\begin{aligned}
\frac{a'^3}{r'^3}\cos(\alpha - v') = {} & \left(1 + 2e'^2 + \frac{239}{64}e'^4\right)\cos(\alpha - g' - l') \\
& + \left(3e' + \frac{11}{4}e'^3\right)\cos(\alpha - g' - 2l') \\
& + \left(e' + \frac{5}{2}e'^3\right)\cos(\alpha - g') \\
& + \left(\frac{53}{8}e'^2 + \frac{39}{16}e'^4\right)\cos(\alpha - g' - 3l') \\
& + \left(\frac{11}{8}e'^2 + \frac{49}{16}e'^4\right)\cos(\alpha - g' + l') \\
& + \frac{77}{6}e'^3\cos(\alpha - g' - 4l') \\
& + \frac{23}{12}e'^3\cos(\alpha - g' + 2l') \\
& + \frac{2955}{128}e'^4\cos(\alpha - g' - 5l') \\
& + \frac{343}{128}e'^4\cos(\alpha - g' + 3l');
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{a'^3}{r'^3}\cos(\alpha - 3v') = {} & \left(1 - 6e'^2 + \frac{423}{64}e'^4\right)\cos(\alpha - 3g' - 3l') \\
& + (5e' - 22e'^3)\cos(\alpha - 3g' - 4l') \\
& - \left(e' - \frac{5}{4}e'^3\right)\cos(\alpha - 3g' - 2l') \\
& + \left(\frac{127}{8}e'^2 - \frac{3065}{48}e'^4\right)\cos(\alpha - 3g' - 5l') \\
& + \left(\frac{1}{8}e'^2 + \frac{1}{48}e'^4\right)\cos(\alpha - 3g' - l') \\
& + \frac{163}{4}e'^3\cos(\alpha - 3g' - 6l') \\
& + \frac{35413}{384}e'^4\cos(\alpha - 3g' - 7l')\ (^*) \\
& + \frac{1}{384}e'^4\cos(\alpha - 3g' + l');
\end{aligned}$$

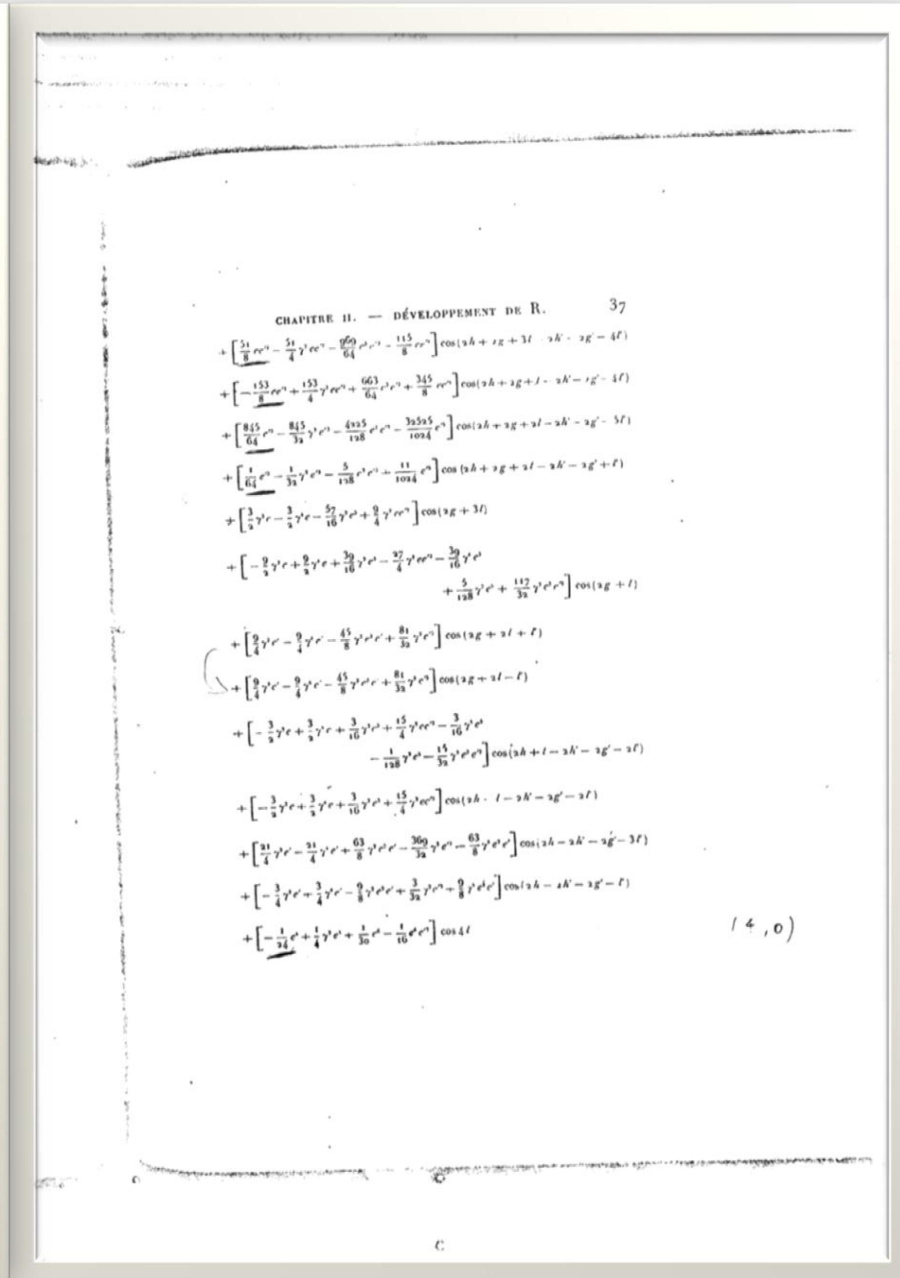
(*) La valeur de $\frac{a'^3}{r'^3}\cos(\alpha - 3v')$, calculée jusqu'aux quantités du quatrième ordre par rapport à e', ne renferme aucun terme en $\cos(\alpha - 3g')$.

“Theorie du Mouvement de la Lune”
C. Delaunay

Calcoli preliminari



La funzione da studiare inizia a pagina 33



… prosegue a pagina 34, 35, 36, 37 ….

$$-\frac{189}{64}e^4e'\cos(2h+2g+6l-2h'-2g'-3l')$$
$$-\frac{27}{64}e^4e'\cos(2h+2g+6l-2h'-2g'-l')$$
$$+\frac{21}{128}e^4e'\cos(2h+2g-2l-2h'-2g'-3l')$$
$$+\frac{3}{128}e^4e'\cos(2h+2g-2l-2h'-2g'-l')$$
$$+\frac{425}{64}e^3e'^2\cos(2h+2g+5l-2h'-2g'-4l')$$
$$-\frac{119}{64}e^3e'^2\cos(2h+2g-l-2h'-2g'-4l')$$
$$+\frac{845}{64}e^2e'^3\cos(2h+2g+4l-2h'-2g'-5l')$$
$$+\frac{1}{64}e^2e'^3\cos(2h+2g+4l-2h'-2g'+l')$$
$$+\frac{4225}{128}e^2e'^3\cos(2h+2g-2h'-2g'-5l')$$
$$+\frac{5}{128}e^2e'^3\cos(2h+2g-2h'-2g'+l')$$
$$+\frac{1599}{64}ee'^4\cos(2h+2g+3l-2h'-2g'-6l')$$
$$+\frac{1}{32}ee'^4\cos(2h+2g+3l-2h'-2g'+2l')$$
$$-\frac{4797}{64}ee'^4\cos(2h+2g+l-2h'-2g'-6l')$$
$$-\frac{3}{32}ee'^4\cos(2h+2g+l-2h'-2g'+2l')$$
$$+\frac{228347}{5120}e'^5\cos(2h+2g+2l-2h'-2g'-7l')$$
$$+\frac{243}{5120}e'^5\cos(2h+2g+2l-2h'-2g'+3l')$$
$$+\frac{25}{16}\gamma^2e^3\cos(2g+5l)$$

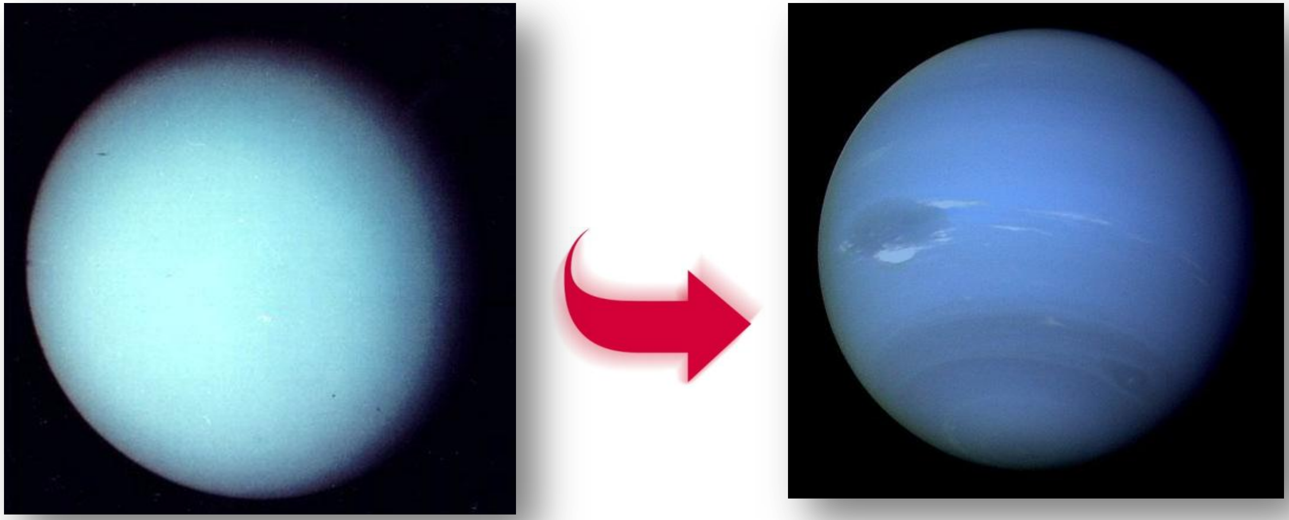
… prosegue a pagina 38, 39, 40, 41 …

$$-\frac{35}{32}ee'\cos(4h+4g+5l-4h'-4g'-4l')$$
$$-\frac{105}{32}e\cos(4h+4g+3l-4h'-4g'-4l')$$
$$+\frac{455}{128}e'\cos(4h+4g+4l-4h'-4g'-5l')$$
$$-\frac{105}{128}e'\cos(4h+4g+4l-4h'-4g'-3l')$$
$$+\frac{105}{64}e^2\cos(4h+4g+6l-4h'-4g'-4l')$$
$$+\frac{245}{32}e^2\cos(4h+4g+2l-4h'-4g'-4l')$$
$$+\frac{455}{64}ee'\cos(4h+4g+5l-4h'-4g'-5l')$$
$$-\frac{105}{64}ee'\cos(4h+4g+5l-4h'-4g'-3l')$$
$$-\frac{1365}{64}ee'\cos(4h+4g+3l-4h'-4g'-5l')$$
$$+\frac{315}{64}ee'\cos(4h+4g+3l-4h'-4g'-3l')$$
$$+\frac{1785}{128}e'^2\cos(4h+4g+4l-4h'-4g'-6l')$$
$$-\frac{35}{128}e'^2\cos(4h+4g+4l-4h'-4g'-2l')$$
$$+\frac{35}{16}\gamma^2\cos(2h+4g+4l-2h'-2g'-4l')$$
$$+\frac{35}{16}\gamma^2\cos(4h+2g+2l-4h'-4g'-4l')\Big\}$$
$$+m'\frac{a^5}{a'^6}\cdot\frac{63}{128}\cos(5h+5g+5l-5h'-5g'-5l').$$

15. Au moyen du développement de R qui vient d'être donné, on pourra déterminer les valeurs de L, G, H, l, g, h, en fonction du temps, en se servant des équations (9). Les valeurs de ces six quantités devront ensuite être substituées dans les expressions des coordonnées de la Lune, ce qui donnera définitivement ces coordonnées en fonction du temps.

… termina a pagina 54!

- Nettuno venne scoperto *a tavolino* da Leverrier (1811-1877) e Adams (1819-1892) sulla base di perturbazioni anomale della traiettoria di Urano.



<u>DOMANDA</u>: I pianeti rimarranno vicini alle loro orbite attuali oppure gli effetti cumulativi di piccole perturbazioni cambieranno le orbite su tempi lunghi, fino a farli collidere con il Sole o ad essere espulsi dal sistema solare?

Immagini: PD-USGOV-NASA, NASA

5. Caos

- Caos: moto irregolare di un sistema che mostra una *estrema sensibilità alla scelta delle condizioni iniziali*.
- Poincaré: scopre il caos studiando il problema dei 3-corpi

- Traiettorie di due palline inizialmente molto vicine
- Se la loro distanza aumenta (esponenzialmente) nel tempo si ha un moto *caotico*.
- In questo caso è impossibile eseguire una predizione a lungo termine: piccole incertezze sulla posizione iniziale vengono amplificate in un tempo breve.
- *Dire che un sistema è caotico NON vuole dire che sia* ***instabile****, ma piuttosto* ***impredicibile***

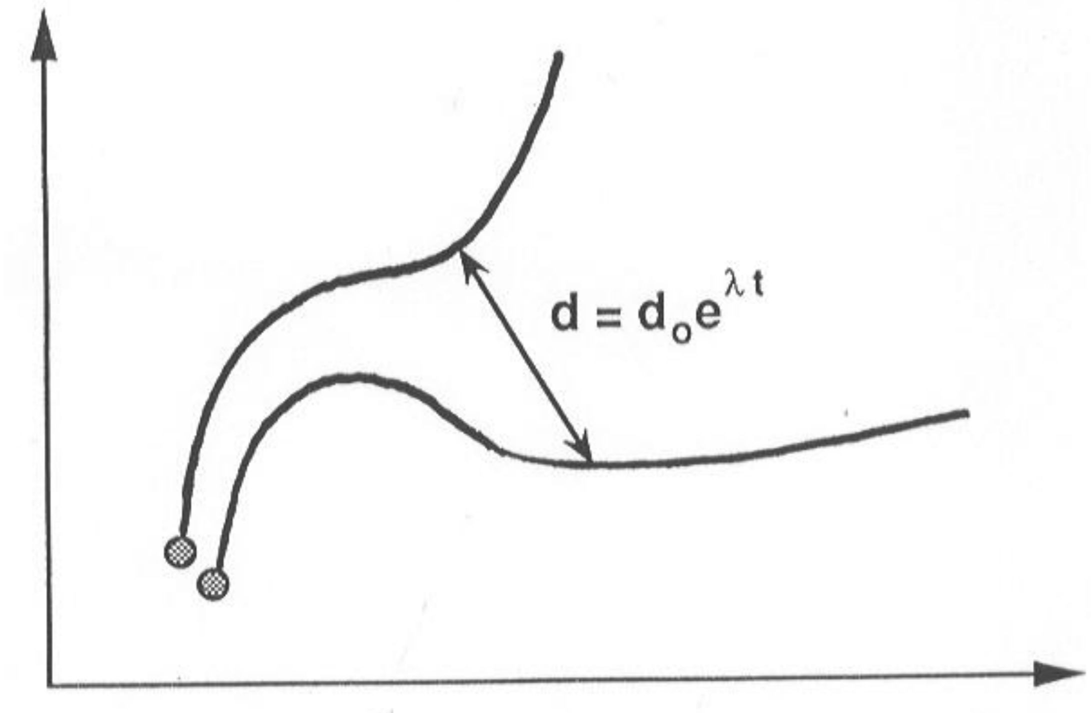
Video interessante: http://www.youtube.com/watch?v=QsQuNu4NBmQ

- Henri Poincarè: è la *fine* del determinismo assoluto!

- Un sistema caotico è caratterizzato da:

(i) due sistemi con condizioni molto vicine possono avere un futuro radicalmente diverso;

(ii) l'evoluzione su tempi lunghi, maggiori del *tempo di Lyapunov*, è impredicibile.



- ❑ d_0 è la distanza iniziale
- ❑ d è la distanza al tempo t
- ❑ l'esponente di Lyapunov λ stima la distanza

• L’effetto Butterfly

- Nel 1962 il metereologo Edward Lorenz mostrò che un semplice sistema meteorologico (descritto da semplici equazioni matematiche) passava rapidamente dal sereno alla tempesta e viceversa. Ad innescare questi “salti” bastavano delle minime perturbazioni.

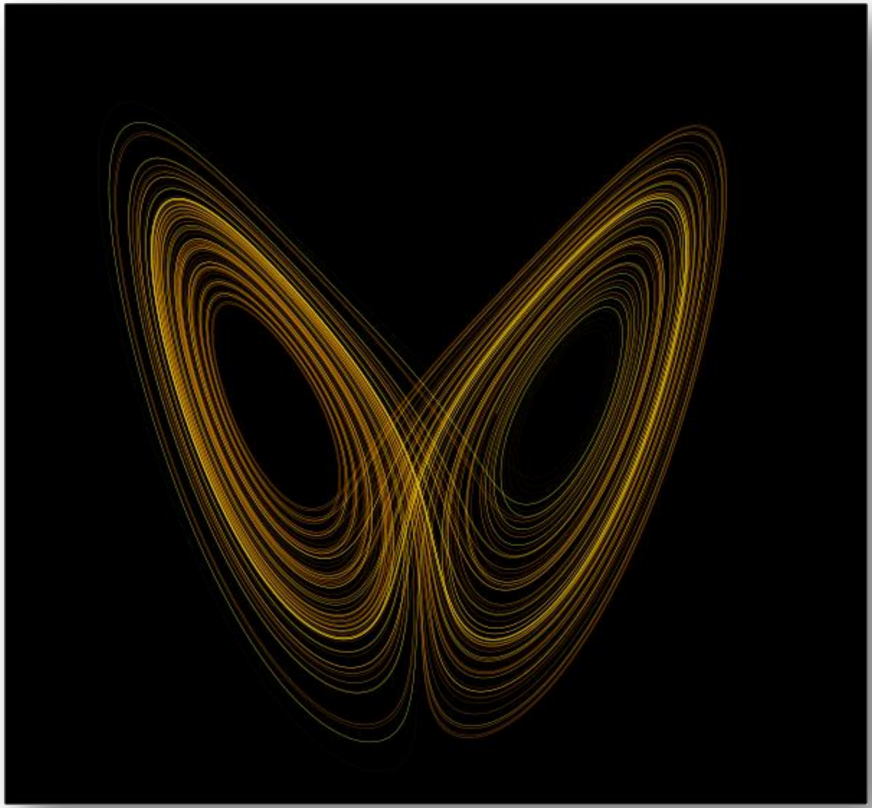


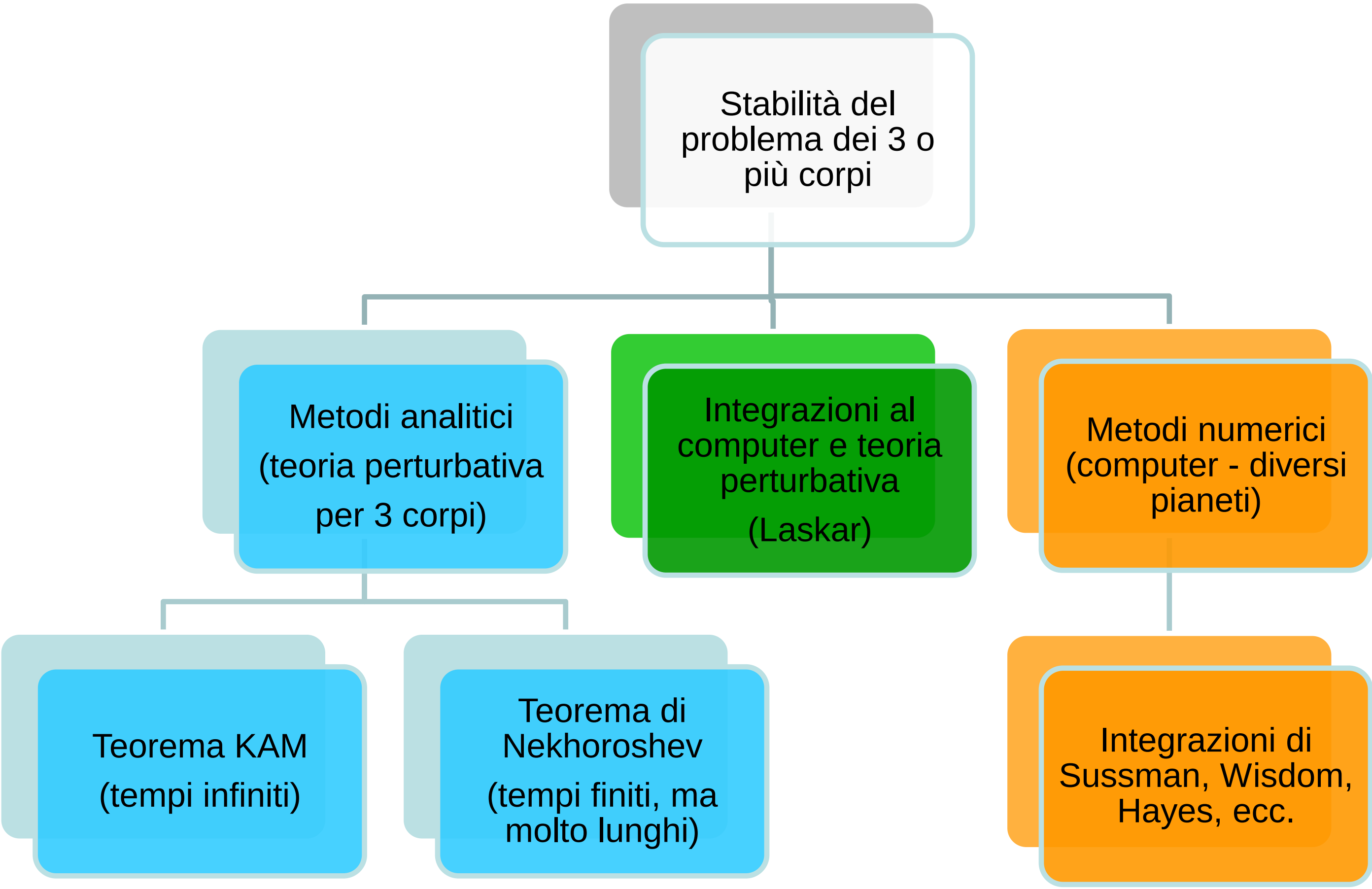
Immagine: Wikipedia

- Nel 1972 Lorenz intitola una conferenza:

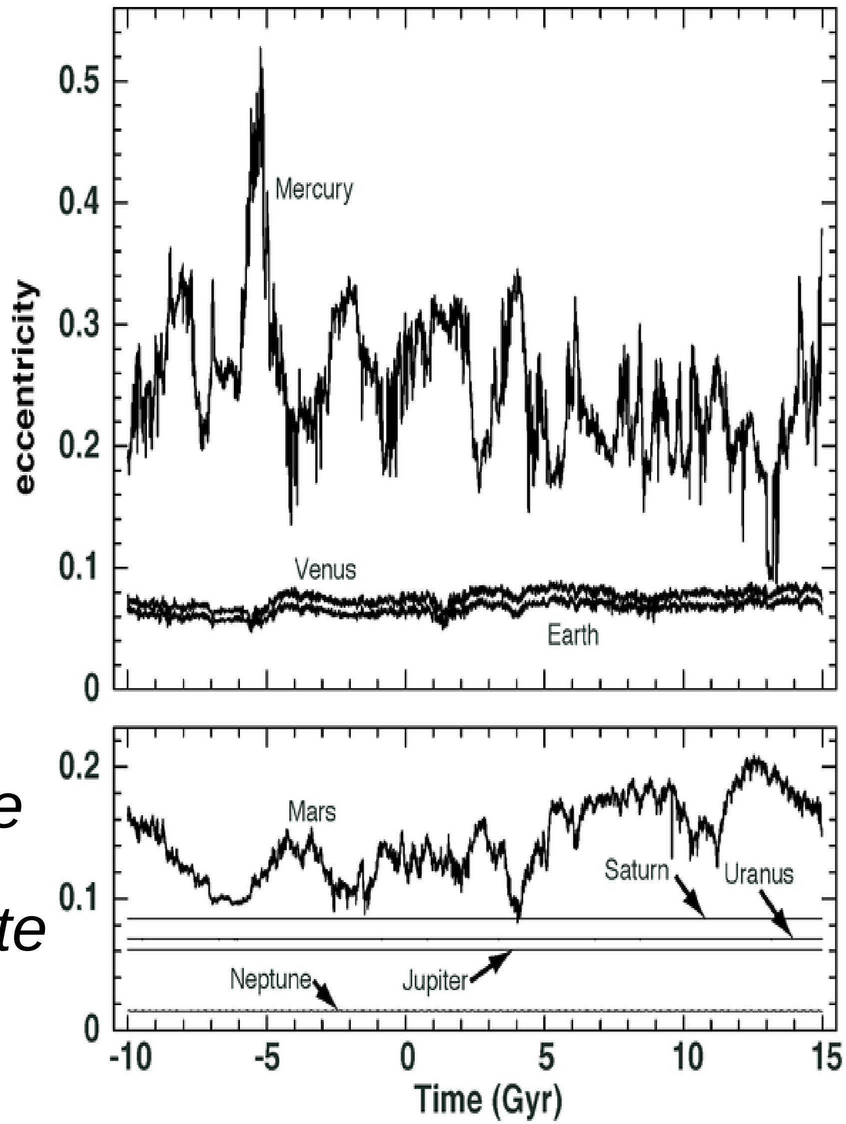
“Predicibilità: può il battito d’ali di una farfalla in Brasile scatenare un tornado in Texas?”,

Nasce l’“effetto farfalla”, sinonimo di sensibilità alle condizioni iniziali e quindi di caos.

6. La caotica armonia dei pianeti



- Laskar: il sistema solare INTERNO è CAOTICO.
- Da un errore di 15 metri sulla posizione iniziale della **Terra**:
errore 150 m dopo 10 milioni di anni
errore 150 milioni di km dopo 100 milioni di anni, impendendo ulteriori predizioni!



Risultato:

- *Mercurio e Marte decisamente caotici*
- *Venere e Terra moderatamente caotici*
- *I pianeti esterni sono regolari*
- *Plutone è molto caotico*

Immagine: J. Laskar, 1994

- Video interessante: http://www.imcce.fr/Equipes/ASD/person/Laskar/jxl_collision.html

- ***E gli altri oggetti del sistema solare?***

- Pianeti nani, asteroidi, comete, oggetti di Kuiper possono essere regolari (come Cerere) o caotici, con il pericolo che si scontrino con la Terra.

- ***Apophis*** (il distruttore): 350 metri, 46 miliardi di kg.

- Avvicinamento alla Terra: 13 Aprile 2029

- Possibile collisione con la Terra: 13 Aprile 2036

(fortunatamente la probabilità è molto bassa,
da 1/6000 nel 2005 a 1/250.000 nel 2009)

8. Conclusione

- L’umanità ha sempre osservato un cielo immobile, ma non dimentichiamo che il Sole diventerà una gigante rossa…
- Teoria perturbativa + computer: i pianeti interni sono caotici e non si possono fare previsioni su tempi lunghi (oltre 100 milioni anni).
- Asteroidi, comete, oggetti di Kuiper: possono avere un destino REGOLARE o CAOTICO.

- **OSSIMORO**, dal greco ὀξύμωρον: è una figura retorica che consiste nell'accostamento di due termini in forte antitesi.

Un urlo pacato

Un silenzio assordante

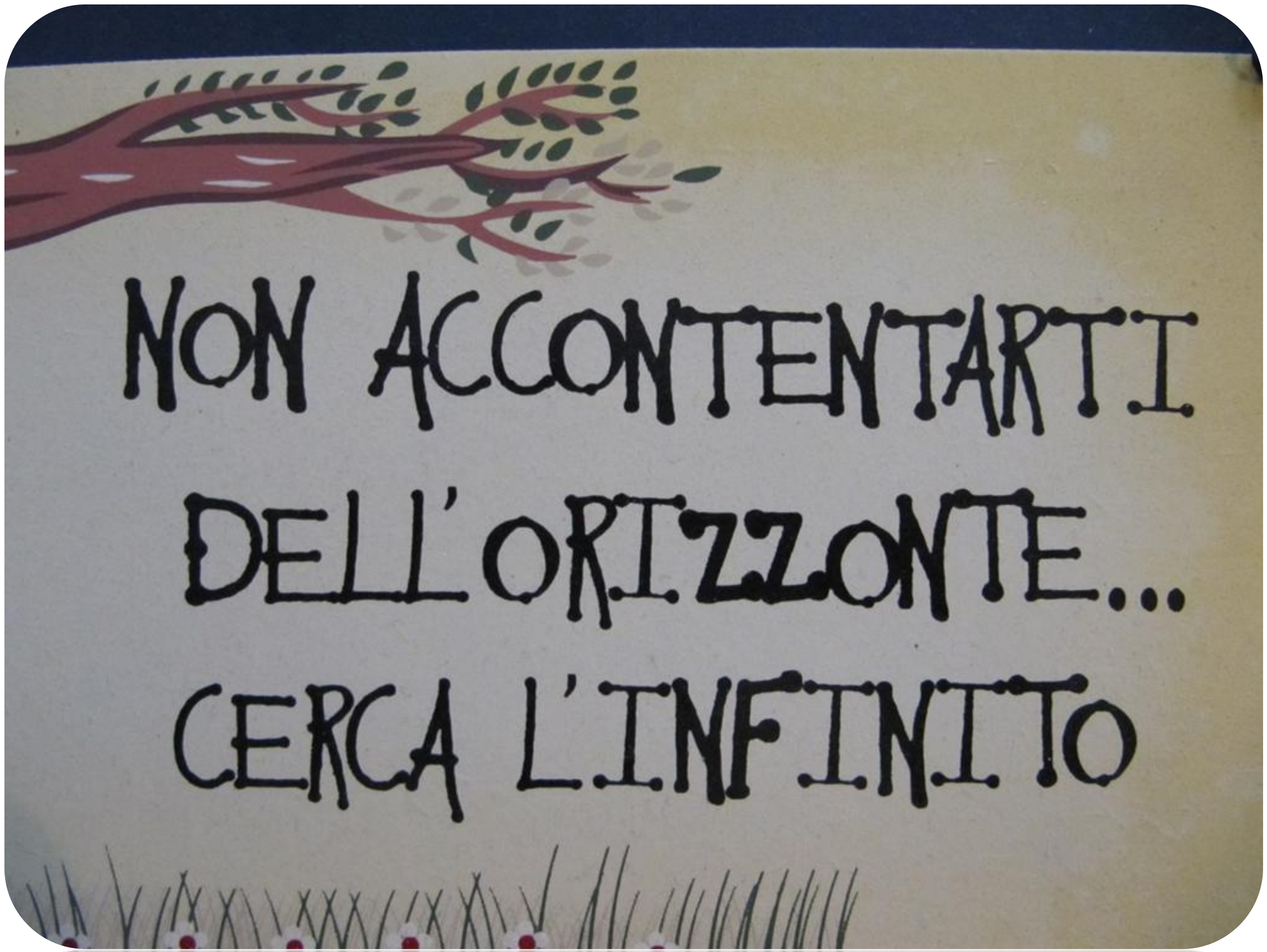
Affrettati lentamente

OSSIMORO PLANETARIO:

LA CAOTICA ARMONIA DEI PIANETI

oppure

IL REGOLARE DISORDINE DEI PIANETI !



Jim Morrison

FINE