e quindi la somma parziale s_N è uguale a

$$\begin{aligned} s_N &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{N+1}. \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si sono annullati tutti i termini opposti tranne il primo della prima somma e l'ultimo della seconda. Ora che conosciamo una formula esplicita per la somma parziale s_N possiamo passare al limite per $N \to \infty$ ottenendo così che la somma della serie data vale 1.

— ◇ —

Vediamo altri due criteri di convergenza la cui dimostrazione è basata sul confronto con una serie geometrica.

Criterio del rapporto

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie tale che $a_n > 0$ per $n \geq n_0$ e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in [0, +\infty]$$

Allora

(1) Se $L < 1$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

(2) Se $L > 1$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$.

Se $L = 1$ il criterio non dà una risposta e la serie potrebbe sia convergere che divergere.

— ◇ —

Esempio 3.5 Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}.$$

Applichiamo il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}/(n+1)!}{3^n/n!} = \frac{3^{n+1} \cdot n!}{3^n \cdot (n+1)!} = \frac{3}{n+1} \to 0.$$

Quindi il limite è minore di 1 e la serie converge.

— ◇ —

Esempio 3.6 Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

Applichiamo il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)! \cdot n^n}{n! \cdot (n+1)^{n+1}} = \frac{(n+1) \cdot n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e}.$$

Dato che $\frac{1}{e} < 1$, la serie converge.

— ◇ —

Criterio della radice

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie tale che $a_n \geq 0$ per $n \geq n_0$ e

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \in [0, +\infty]$$

Allora

(1) Se $L < 1$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

(2) Se $L > 1$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$.

Se $L = 1$ il criterio non dà una risposta e la serie potrebbe sia convergere che divergere.

— ◇ —

Esempio 3.7 Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}}.$$

Applichiamo il criterio della radice:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2^{n^2}}} = \frac{1}{(2^{n^2})^{1/n}} = \frac{1}{2^n} \to 0.$$

Il limite è minore di 1 e quindi la serie converge.

— ◇ —

Notiamo che l'applicazione del criterio del rapporto o della radice alla serie armonica generalizzata è inefficace perché in entrambi i casi il limite è 1 qualunque sia il valore dell'esponente α:

$$\frac{1/(n+1)^\alpha}{1/n^\alpha} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \to 1 \quad \text{e} \quad \sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^\alpha \to 1.$$

(si ricorda che $\sqrt[n]{n} \to 1$). Concludiamo con un esempio dove si utilizza una tecnica "mista".

— ◇ —

Esempio 3.8 Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{n^3 - \cos n}.$$

Dopo aver osservato che la serie è a termini positivi ($n^3 > \cos n$ per $n \geq 1$) facciamo un'analisi asintotica

$$\frac{2^n + 5^n}{n^3 - \cos n} \sim \frac{5^n}{n^3}.$$

Quindi studiare la serie data è equivalente a studiare la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^3}.$$

Questa diverge perché applicando il criterio della radice troviamo che

$$\sqrt[n]{\frac{5^n}{n^3}} = \frac{5}{(\sqrt[n]{n})^3} \to 5 > 1.$$

4. Serie a termini di segno variabile

Qui discuteremo due criteri che possono aiutare lo studio della convergenza quando i termini della serie non hanno segno costante. Il primo prevede di studiare la serie a termini non negativi ottenuta prendendo i valori assoluti dei termini della serie data.

Criterio della convergenza assoluta

Se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge allora anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

Anche se non ne diamo una dimostrazione, possiamo dire che se avessimo la libertà di modificare a piacere il segno di ogni termine, la serie dei valori assoluti rappresenterebbe il caso "peggiore" per avere la convergenza: in questo caso infatti le somme crescono andando in un'unica direzione mentre se i segni sono variabili le somme si possono compensare.

— ◇ —

Esempio 4.1 Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n \log(1+n^n)}.$$

Il segno dei termini è variabile per la presenza di $\sin n$ (e la distribuzione dei segni è piuttosto "irregolare"). La serie dei valori assoluti è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n \log(1+n^n)},$$

inoltre per confronto

$$0 \leq \frac{|\sin n|}{n \log(1+n^n)} \leq \frac{1}{n \log(1+n^n)} \sim \frac{1}{n \log(n^n)} = \frac{1}{n^2 \log n}.$$

La serie individuata dai termini $\frac{1}{n^2 \log n}$ converge (serie armonica generalizzata II con $\alpha = 2$ e $\beta = 1$), e quindi converge anche la serie dei valori assoluti. Per il criterio appena enunciato anche la serie data converge.

— ◇ —

Se la serie non è *assolutamente convergente* allora la determinazione del carattere della serie può essere molto complicato. Basti pensare che per queste serie modificare l'ordine in cui vengono sommati i termini può influenzare la somma della serie stessa. Comunque, nel caso in cui i segni siano "esattamente" alternati vale il seguente criterio.

Criterio di Leibniz

Sia $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ una serie tale che $a_n \geq 0$ per $n \geq n_0$ e

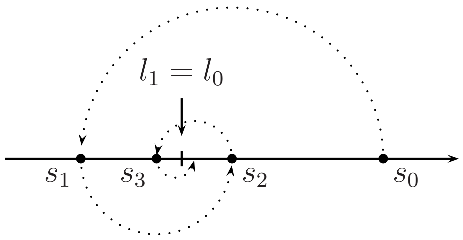
(1) a_n tende a zero;

(2) a_n è decrescente ossia $a_n \geq a_{n+1}$ per $n \geq n_0$.

Allora la serie converge.

Vediamone la dimostrazione. Dato che i termini a_n sono decrescenti al crescere di n e vengono alternativamente sommati e sottratti, le somme parziali oscillano sull'asse reale nel seguente modo

$$s_0 = a_0\,, \quad s_1 = s_0 - a_1\,, \quad s_2 = s_1 + a_2\,, \quad s_3 = s_2 - a_3\,, \cdots$$



In particolare si può facilmente osservare che le somme parziali di indice pari s_{2N} decrescono mentre quelle di indice dispari s_{2N+1} crescono

$$s_{2N} = s_{2N-2} - (a_{2N-1} - a_{2N}) \leq s_{2N-2}, \; s_{2N+1} = s_{2N-1} + (-a_{2N+1} + a_{2N}) \geq s_{2N-1}.$$

Inoltre siccome

$$s_1 \leq s_{2N+1} = s_{2N} - a_{2N+1} \leq s_{2N} \leq s_0$$

possiamo dire che la successione di indice pari s_{2N} tende ad un limite l_0 mentre la successione di indice dispari tende ad un limite l_1:

$$s_{2N+1} \uparrow l_1 \leq l_0 \downarrow s_{2N}.$$

Per dimostrare che la serie converge basta verificare che questi due limiti l_1 e l_2 sono uguali. Dalla relazione

$$s_{2N+1} = s_{2N} + a_{2N+1}$$

passando al limite e ricordando che la successione a_n è infinitesima si ottiene proprio che $l_1 = l_2$ e il valore comune è proprio la somma della serie.

— ◇ —

Esempio 4.2 Determinare il carattere della serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}.$$

Se prendiamo la serie dei valori assoluti la serie diventa la serie armonica che è divergente. Quindi il criterio della convergenza assoluta non ci dà alcuna informazione utile. Se applichiamo invece il criterio di Leibniz otteniamo facilmente la convergenza della serie data perché

$$\frac{1}{n} \text{ decresce e tende a } 0.$$

In seguito vedremo che la somma di questa serie è uguale a $\log 2$:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots \to \log 2.$$

È sorprendente notare che se in questa serie cambiamo l'ordine in cui i termini vengono sommati possiamo ottenere una serie che converge ad una somma diversa! Per esempio, si può dimostrare che questo fenomeno accade se si alternano *due* termini di indice dispari e *uno* di indice pari:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots \to \frac{3}{2}\log 2.$$

— ◇ —

Esempio 4.3 Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n} + n\log n}.$$

Intanto osserviamo che $\cos(n\pi) = (-1)^n$ e poi verifichiamo se la serie converge assolutamente.

$$\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + n\log n}\right| = \frac{1}{\sqrt{n} + n\log n} \sim \frac{1}{n\log n}.$$

Per quanto detto questa serie diverge e dunque la serie data non converge assolutamente. Dato che la serie è a segni alterni, proviamo allora ad applicare il criterio di Leibniz:

$$\frac{1}{\sqrt{n} + n\log n} \text{ decresce e tende a } 0$$

e quindi la serie data converge.

— ◇ —

Esempio 4.4 Determinare il carattere della seguente serie per $\alpha > 0$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right).$$

I termini della serie sono a segni alterni e convergono a zero, ma

$$\left|\log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)\right|$$

non convergono a zero in modo decrescente. Quindi non possiamo utilizzare direttamente il criterio di Leibniz. Se lo facessimo dovremmo concludere (erroneamente) che la serie converge per ogni $\alpha > 0$. Dato che

$$\log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) \sim \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

arriveremmo alla stessa conclusione (sbagliata) se usassimo criterio del confronto asintotico (applicabile alle serie con i termini di segno costante).
Vediamo come si puó determinare la risposta corretta. Dato che il termine $(-1)^n/n^\alpha$ tende a 0 allora

$$\begin{aligned}\log\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha}-\frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^2+o\left(\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^2\right)\\ &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha}-\frac{1}{2n^{2\alpha}}+o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right).\end{aligned}$$

La serie a segni alterni

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

converge per il criterio di Leibniz.
La serie a segno (definitivamente) costante (negativo)

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{2n^{2\alpha}}+o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right)$$

è asintoticamente equivalente alla serie

$$-\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{2\alpha}}$$

che converge se e solo se $\alpha > 1/2$. Quindi la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty}\log\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}+\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{2n^{2\alpha}}+o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right)$$

converge se e solo se $\alpha > 1/2$.

5. Serie di potenze

Fino a questo momento abbiamo considerato serie numeriche ossia somme infinite di numeri reali, qui invece parleremo di uno degli esempi più importanti di serie di funzioni: le *serie di potenze*. In realtà ne abbiamo già incontrato un esempio ossia la serie geometrica di ragione x:

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n.$$

In particolare abbiamo visto che se viene assegnato un certo numero x la serie corrispondente converge ad un numero finito solo se $|x| < 1$. Questo risultato può essere riletto nel seguente modo: la serie in questione definisce una funzione della variabile x il cui dominio D è l'insieme in cui la serie converge, ossia l'intervallo aperto di centro 0 e raggio 1: $D = (-1, 1)$. Le serie di potenze sono un'estensione della serie geometrica: le potenze sono "centrate" in un generico punto $x_0 \in \mathbb{R}$ e la potenza n-esima viene moltiplicata per un coefficiente reale a_n:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Anche in questo caso si pone innanzi tutto il problema della determinazione del dominio di questa nuova funzione. Si verifica che il dominio è ancora un intervallo (centrato in x_0) di un certo raggio R (detto di convergenza). Il calcolo di tale raggio si può effettuare nel seguente modo.

RAGGIO DI CONVERGENZA

Data la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

(1) Se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L \in [0, +\infty]$ allora $R = 1/L$.

(2) Se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L \in [0, +\infty]$ allora $R = 1/L$.

La dimostrazione nel primo caso è una semplice applicazione del criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||x - x_0|^n.$$

Infatti calcolando il limite per n che tende a ∞ del rapporto tra due termini successivi si ottiene

$$\frac{|a_{n+1}||x - x_0|^{n+1}}{|a_n||x - x_0|^n} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \cdot |x - x_0| \to L \cdot |x - x_0|$$

Quindi si ha la convergenza (assoluta) se $L \cdot |x - x_0| < 1$, ossia se

$$|x - x_0| < \frac{1}{L} = R$$

(se $L = +\infty$ si pone $R = 0$, mentre se $L = 0$ si pone $R = +\infty$). La serie invece non converge se $L \cdot |x - x_0| > 1$, ossia se

$$|x - x_0| > \frac{1}{L} = R.$$

In modo simile applicando il criterio della radice si ottiene il secondo caso.
La determinazione del raggio di convergenza, come suggerisce la dimostrazione precedente, non dà alcuna informazione sul carattere della serie agli estremi del dominio quando $|x - x_0| = R$ (ossia quando $L \cdot |x - x_0| = 1$). Per dare una risposta in questi casi basterà studiare le serie numeriche corrispondenti sostituendo a x i valori $x_0 + R$ e $x_0 - R$.

— ◇ —

Esempio 5.1 Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n} \cdot (x-1)^n.$$

Calcoliamo il raggio di convergenza utilizzando per esempio la formula con il rapporto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

quindi il raggio di convergenza è 2 e il dominio di convergenza D contiene l'intervallo aperto di centro $x_0 = 1$ e raggio $R = 2$ ossia l'intervallo $(-1, 3)$. Vediamo che cosa succede negli estremi -1 e 3:
Se $x = -1$ allora $x - 1 = -2$ e la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n} \cdot (x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n} \cdot (-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n},$$

che converge per il criterio di Leibniz e quindi $-1 \in D$.
Se $x = 3$ allora $x - 1 = 2$ e la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n} \cdot (x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n} \cdot 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

che diverge a $+\infty$ e quindi $3 \notin D$. Il dominio di convergenza è $D = [-1, 3)$.

— ◇ —

Esempio 5.2 Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2^{3n} + 3^{2n}) \cdot x^n.$$

Calcoliamo il raggio di convergenza utilizzando la formula con la radice n-sima:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{3n} + 3^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{8^n + 9^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{9^n} = 9$$

quindi il raggio di convergenza è $\frac{1}{9}$. Il dominio di convergenza D, dunque, contiene l'intervallo aperto di centro $x_0 = 0$ e raggio $R = \frac{1}{9}$ ossia l'intervallo $(-\frac{1}{9}, \frac{1}{9})$. Vediamo cosa succede negli estremi $-\frac{1}{9}$ e $\frac{1}{9}$:
Se $x = -\frac{1}{9}$ allora la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2^{3n} + 3^{2n}) \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\left(\frac{8}{9}\right)^n + 1\right)$$

che non converge perché il termine della serie non tende a 0. Allo stesso modo la serie non converge neanche per $x = \frac{1}{9}$. Dunque il dominio di convergenza è $D = (-\frac{1}{9}, \frac{1}{9})$.

— ⋄ —

In alcuni casi è possibile determinare anche la somma della serie. Qui riassumiamo gli esempi più importanti di serie di potenze per le quali la somma è una funzione esplicita. In questi casi le serie corrispondono proprio agli sviluppi di Taylor della funzione rispetto ai loro centri. Ciò significa che per queste funzioni lo sviluppo di Taylor non serve solo ad "approssimare" i valori della funzione vicino al centro, ma su tutto il dominio della serie. Inoltre vale la pena osservare che le considerazioni fatte per le serie di potenze reali si estendono anche nel campo complesso: il dominio della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

è questa volta un disco in $\mathbb{C}$ centrato in z_0 e raggio R. Rispetto al caso reale però l'analisi della convergenza nei punti del bordo del dominio è in generale più complicata perché ci sono infiniti punti da esaminare. Nella seguente tabella sono elencate le principali serie di potenze e il loro dominio in $\mathbb{C}$.

Principali serie di potenze

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad \text{per } z \in D = \{|z| < 1\}$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \text{per } z \in D = \mathbb{C}$$

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} \qquad \text{per } z \in D = \{|z| \le 1, z \neq -1\}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{per } z \in D = \mathbb{C}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{per } z \in D = \mathbb{C}$$

$$\arctan z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \qquad \text{per } z \in D = \{|z| \le 1, z \neq \pm i\}$$

Abbiamo già detto che le serie di potenze sono funzioni definite nel loro dominio di convergenza. Si può dimostrare che tali sono funzioni molto regolari. Sono ad esempio derivabili all'interno del loro dominio e la loro derivata è ancora una serie di potenze con lo stesso centro e raggio di convergenza della serie originale e si può ottenere semplicemente derivando termine a termine

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(a_n(x-x_0)^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1}.$$

Ritornando alla tabella precedente ad esempio possiamo notare che

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\left(\log(1+z)\right) &= \frac{d}{dz}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{nz^{n-1}}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-z)^{n-1} = \frac{1}{1-(-z)} = \frac{1}{1+z}\end{aligned}$$

che è il risultato che si otterrebbe derivando direttamente la funzione $\log(1+z)$.

— ◇ —

Esempio 5.3 Calcoliamo la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i}{3}\right)^n.$$

Dato che $|i/3| = 1/3 < 1$, $i/3$ sta nel dominio di convergenza della serie geometrica in questione. La somma vale

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{i}{3}} - 1 = \frac{i}{3-i} = \frac{3i-1}{10}.$$

— ◇ —

Esempio 5.4 Calcoliamo la somma della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2+5n}{n!}.$$

Dopo aver verificato la sua convergenza possiamo intanto separare la serie in due parti

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n+5)}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)+6}{(n-1)!} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!} + 6\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}.$$

La prima serie può essere riscritta così

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

(questi due “cicli” sommano gli stessi numeri!). Analogamente la seconda serie diventa

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - 1.$$

Quindi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+5n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + 6 \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - 1 \right) = 7 \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \right) - 6.$$

Ora possiamo utilizzare la serie di potenze relativa a e^z per $z = 1$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+5n}{n!} = 7e - 6.$$

— ◇ —

Esempio 5.5 Calcoliamo il dominio e la somma della serie di potenze (reale)

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n.$$

Si verifica facilmente che il dominio è l’intervallo $(-1, 1)$. Inoltre siccome

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

possiamo concludere che la somma della serie data è

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Ovviamente questa formula vale solo all’interno del dominio $D = (-1, 1)$.