2

Serie numeriche e serie di potenze

Sommare un numero finito di numeri reali è senza dubbio un'operazione che non può riservare molte sorprese. Cosa succede però se ne sommiamo un numero infinito? Prima di dare delle definizioni precise facciamo qualche piccolo esperimento. Se sommiamo i numeri interi positivi otteniamo

$$1+2+3+4+5+6+\cdots \to +\infty.$$

Se modifichiamo questa somma nel seguente modo

$$1-2+3-4+5-6+\cdots$$

la risposta è meno banale. Per trovarla abbiamo bisogno di osservare il comportamento delle somme parziali

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & 1 \\ -1 & = & 1-2 \\ 2 & = & 1-2+3 \\ -2 & = & 1-2+3-4 \\ 3 & = & 1-2+3-4+5 \\ -3 & = & 1-2+3-4+5-6 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Notiamo che una parte delle somme cresce verso $+\infty$ mentre l'altra descresce verso $-\infty$ e dunque il loro comportamento complessivo è indeterminato. Se invece sommiamo infiniti zeri

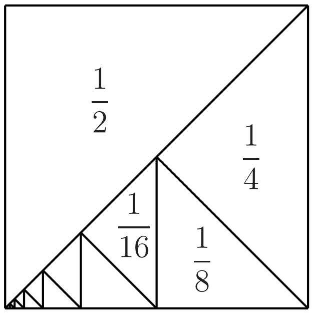
$$0+0+0+\cdots \to 0.$$

In quest'ultimo caso il risultato dell'"operazione" di somma infinita è un numero finito. C'è un esempio più interessante? È chiaro che se vogliamo avere la speranza di trovarne una dobbiamo almeno fare in modo che il termine che via via viene aggiunto tenda a zero. Consideriamo per esempio la somma delle potenze positive di $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots.$$

Esiste il limite di questa somma e se esiste siamo in grado di calcolarlo? Nel corso di questo capitolo ci occuperemo proprio di questo genere di problemi. Intanto possiamo dare una risposta in questo caso particolare utilizzando un ragionamento geometrico.

In un quadrato di lato 1 vengono via via "ritagliati" dei triangoli rettangoli le cui aree corrispondono proprio ai termini della somma che stiamo esaminando.



Questi infiniti triangoli esauriscono la superficie del quadrato e dunque la somma infinita delle loro aree è uguale all'area totale del quadrato ossia 1:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots \to 1.$$

1. Definizioni e prime proprietà

Precisiamo meglio il linguaggio che intendiamo usare. Data una successione di numeri reali $\{a_n\}$ con $n = 0, 1, 2, \ldots$, la loro somma fino al termine N-esimo è detta *somma parziale di ordine* N

$$s_N = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_N.$$

Per evitare eventuali fraintendimenti $(+\cdots+?)$ e rendere la scrittura più comoda e sintetica, una somma parziale si può scrivere anche in questo modo

$$s_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$$

dove $\sum$ è il simbolo di sommatoria e rappresenta un "ciclo" di somme di termini a_n con l'indice intero n che varia dal numero scritto in basso, 0, al numero scritto in alto, N. La successione delle somme parziali $\{s_N\}$ con $n = 0, 1, 2, \ldots$ costituisce la *serie* dei termini a_n. Determinare il *carattere* della serie significa studiare il limite della successione delle somme parziali:

$$\lim_{N\to\infty} s_N = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

In particolare avremo questi tre casi:

Carattere di una serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \begin{cases} L \in \mathbb{R} & \text{la serie } \textit{converge} \text{ con somma } L \\ +\infty \text{ o } -\infty & \text{la serie } \textit{diverge} \\ \text{non esiste} & \text{la serie è } \textit{indeterminata} \end{cases}$$

Nel caso si debbano fare operazioni tra serie, dato che sono dei limiti, dovremo fare particolare attenzione. Per esempio la seguente serie è evidentemente divergente a $+\infty$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = +\infty.$$

Ora proviamo a fare la seguente operazione

$$2\cdot\sum_{n=0}^{\infty} 2^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2^n = (2+4+8+\dots)-(1+2+4+\cdots) = -1+2-2+4-4+\cdots = -1.$$

Quindi sembra di poter concludere che

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = (2-1)\cdot\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = 2\cdot\sum_{n=0}^{\infty} 2^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2^n = -1.$$

Questo "imbarazzante" risultato (la somma di infiniti numeri positivi è negativa!) è dovuto al fatto che non ci siamo accorti della presenza di una forma indeterminata $(+\infty - \infty)$. Le combinazioni lineari di serie si possono però fare quando le serie in gioco sono convergenti:

Linearità

Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie convergenti. Allora converge anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha\, a_n + \beta\, b_n)$ dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Inoltre

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha\, a_n + \beta\, b_n) = \alpha\cdot\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \beta\cdot\sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

Concludiamo questa sezione con qualche utile osservazione sul carattere di una serie. Intanto è piuttosto semplice convincersi che la convergenza di una serie dipende solo dalla "coda" dei termini che sommiamo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \;\text{ converge se e solo se }\; \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \;\text{ converge,}$$

dove n_0 è un qualunque numero intero positivo. Quindi al fine di determinare il carattere di una serie si possono trascurare i "primi" termini (anche se questo potrebbe cambiare il valore della somma).

Un primo semplice criterio per determinare se una serie non converge è quello di verificare se il termine generico della serie non è infinitesimo. Infatti, se la serie converge, la successione delle somme parziali s_N converge ad un limite finito S e

$$a_N = s_N - s_{N-1} \to S - S = 0.$$

Quindi possiamo dire che

Criterio di non convergenza

Se $a_n \not\to 0$ allora la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ non è convergente.

Vedremo nelle prossime sezioni che questa condizione è solo necessaria e non sufficiente ossia esistono esempi di serie che non convergono ma il cui termine generico è infinitesimo.

2. La serie geometrica

La *serie geometrica* di *ragione* $x \in \mathbb{R}$ è la serie delle potenze intere di x:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Per determinare il carattere di questo particolare tipo di serie dobbiamo studiarne le somme parziali

$$s_N = 1 + x + \cdots + x^N = \sum_{n=0}^{N} x^n.$$

Se $x = 1$ allora $s_N = 1 + 1 + \cdots + 1 = N + 1$ e quindi per $N \to \infty$ la serie diverge a $+\infty$. Se $x \neq 1$, notiamo che se moltiplichiamo s_N per $x - 1$ otteniamo

$$(x-1) \cdot (1 + x + \cdots + x^N) = (x + \cdots + x^N + x^{N+1}) - (1 + x + \cdots + x^N)$$

e semplificando i termini opposti si ha che

$$(x-1) \cdot (1 + x + \cdots + x^N) = x^{N+1} - 1.$$

Quindi se $x \neq 1$

$$s_N = \sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{x^{N+1} - 1}{x - 1}.$$

A questo punto il calcolo del limite per $N \to \infty$ diventa più semplice perché basta studiare il comportamento del termine x^{N+1}. Dato che

$$\lim_{N\to\infty} x^{N+1} = \begin{cases} +\infty & \text{se } x > 1 \\ 0 & \text{se } |x| < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

la risposta completa al problema della determinazione del carattere di una serie geometrica è la seguente

Serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } x \geq 1 \\ \dfrac{1}{1-x} & \text{se } |x| < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

Si noti che se $|x| < 1$ e l'indice iniziale è $n_0 \geq 0$ allora

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} x^n = x^{n_0} \sum_{n=n_0}^{\infty} x^{n-n_0} = x^{n_0} \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{x^{n_0}}{1-x}$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo sostituito l'indice della sommatoria ponendo $k = n - n_0$.

— ◇ —

Esempio 2.1 La serie di cui abbiamo parlato nell'introduzione è proprio la serie geometrica di ragione $x = \frac{1}{2}$ con la sola differenza che in questo caso la somma parte dall'indice 1 e non da 0:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Dato che $|\frac{1}{2}| < 1$ la serie converge e per determinarne la somma basta osservare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

e ritroviamo così il risultato che avevamo prima dedotto con un ragionamento geometrico.

— ◇ —

Esempio 2.2 A quale numero razionale corrisponde $0.1\overline{6} = 0.16666\cdots$?

$$\begin{aligned} 0.1\overline{6} &= \frac{1}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \frac{6}{10^4} + \cdots \\ &= \frac{1}{10} + \frac{6}{10^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} \cdots\right) \\ &= \frac{1}{10} + \frac{6}{10^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n. \end{aligned}$$

Dato che $|\frac{1}{10}| < 1$ allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}.$$

Quindi

$$0.1\overline{6} = \frac{1}{10} + \frac{6}{10^2} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{6}.$$

— ◇ —

Esempio 2.3 Calcolare

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{2n+1}}.$$

Cerchiamo di ricondurre questa serie ad una serie geometrica notando che $3^{2n+1} = 3 \cdot 9^n$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{2n+1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)^n.$$

Il numero $\frac{1}{3}$ moltiplica ogni termine della serie e dunque può essere raccolto fuori dal segno di sommatoria:

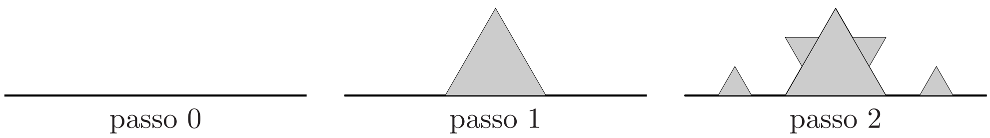
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{2n+1}} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{9}\right)^n.$$

A questo punto la serie da determinare è la serie geometrica di ragione $-\frac{1}{9}$ (il cui modulo è minore di 1) con l'indice n che parte da 2:

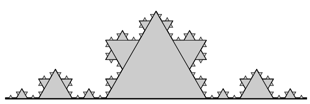
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{2n+1}} = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{9}} = \frac{1}{270}.$$

— ◇ —

Esempio 2.4 Consideriamo un segmento di lunghezza 1 (passo 0) e "incolliamo" al centro un triangolo equilatero di lato $\frac{1}{3}$ (passo 1). Al passo successivo aggiungiamo al centro di ciascun lato (ora sono 4) un triangolo equilatero di lato $\frac{1}{9}$ (passo 2).



Continuando indefinitamente questo procedimento generiamo una figura geometrica dal bordo sempre più frastagliato.



Calcoliamo l'area di questa figura. Denotiamo con A_N l'area della figura al passo N così
$$A_0 = 0\,, \quad A_1 = \frac{\sqrt{3}}{36}\,, \quad A_2 = \frac{\sqrt{3}}{36} + \frac{4}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{36}.$$
Inoltre ad ogni passo successivo il numero di triangoli aggiunti aumenta, rispetto al passo precedente, di un fattore 4 mentre la loro area diminuisce di un fattore $\frac{1}{9}$. Ne segue che

$$A_N = \frac{\sqrt{3}}{36} + \frac{4}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{36} + \cdots + \left(\frac{4}{9}\right)^{N-1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{36} = \frac{\sqrt{3}}{36}\cdot\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{4}{9}\right)^n$$

e al limite
$$A_\infty = \frac{\sqrt{3}}{36}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{20}.$$
Provate a verificare che il limite del perimetro della figura tende invece a $+\infty$.

3. Serie a termini non negativi

Se i termini a_n di una serie sono maggiori o uguali a zero allora lo studio del carattere della serie risulta essere in qualche modo piú semplice. Notiamo infatti che la successione delle somme parziali in questo caso è crescente in quanto

$$s_{N+1} = s_N + a_{N+1} \geq s_N$$

e dunque, quando calcoliamo la somma della serie passando al limite, i possibili risultati sono solo due: la serie converge ad un numero non negativo oppure la serie diverge a $+\infty$. La semplice osservazione che le serie a termini non negativi non possono essere indeterminate ci permette di enunciare il primo criterio di convergenza.

Criterio del confronto

Siano $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie tali che

$$0 \leq a_n \leq b_n \quad \text{per } n \geq n_0.$$

Allora

(1) Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge allora anche $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

(2) Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$ allora anche $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$.

Cerchiamo di applicare questo criterio per dimostrare che la *serie armonica* diverge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \, .$$

Per farlo scriviamo i primi termini della somma e raggruppiamoli opportunamente. Poi "costruiamo" una nuova serie che minori la serie armonica sostituendo ogni termine di ciascun gruppo con un numero più piccolo:

$$\begin{array}{ccccccc}
1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) & + & \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right) & + & \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{15}\right) & +\ \cdots = & \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \\
\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \qquad\quad \downarrow & & \vee \\
1+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{=\frac{1}{2}} & + & \underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}_{=\frac{1}{2}} & + & \underbrace{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}}_{=\frac{1}{2}} & +\ \cdots & = +\infty
\end{array}$$

Quindi la serie minorante diverge e per il punto (2) del criterio del confronto anche la serie armonica diverge (anche se il suo termine generico $\frac{1}{n}$ è infinitesimo!).

Un altro ragionamento per confronto si può fare per determinare il carattere della *serie armonica generalizzata*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$. L'eventuale convergenza dipende dall'esponente: $\alpha = 1$ è il valore critico oltre il quale la serie converge:

$$\boxed{\begin{array}{c}\textsc{Serie armonica generalizzata} \\[6pt] \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases}\end{array}}$$

Per verificare la divergenza nel caso $\alpha < 1$ basta semplicemente osservare che per $n \geq 1$, $n^\alpha \leq n$ e quindi

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha} \, .$$

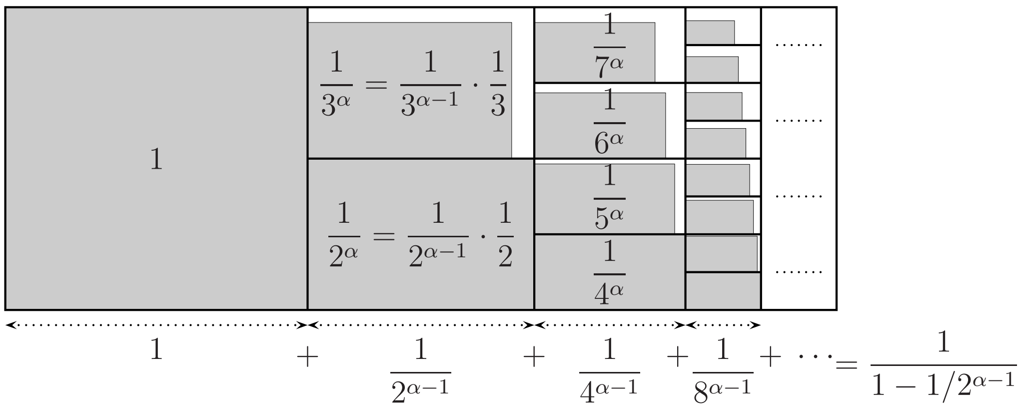
Dunque, per il criterio del confronto, la divergenza di questa serie deriva dalla divergenza della serie armonica. Per provare la convergenza nel caso $\alpha > 1$ si può ancora ricorrere ancora al criterio del confronto, imitando il ragionamento usato per la serie armonica. Vediamo per esempio cosa succede per $\alpha = 2$:

$$\begin{array}{l}
1+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}\right)+\left(\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9^2}+\cdots+\frac{1}{15^2}\right)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\\
\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \qquad\qquad \downarrow \quad \downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad\qquad \wedge\\
1+\underbrace{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}}_{=\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}}_{=\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{8^2}+\frac{1}{8^2}+\cdots+\frac{1}{8^2}}_{=\frac{1}{8}}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=2
\end{array}$$

Quindi non solo questa serie converge, ma la sua somma è minore a 2. Un problema ben più complicato è stabilire la somma esatta della serie di cui enunciamo il risultato senza dimostrazione

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Per quanto riguarda il caso generale ci limitiamo a dare solo un'idea della dimostrazione attraverso un'"immagine" geometrica.



I termini della serie armonica generalizzata corrispondono alle aree dei rettangoli ombreggiati. Tali rettangoli vengono incasellati a gruppi di potenze di due all'interno di un rettangolo di altezza 1 e base uguale alla somma della serie geometrica di ragione $1/2^{\alpha-1}$. Se $\alpha>1$ allora $|1/2^{\alpha-1}|<1$ e la serie geometrica converge. Possiamo così concludere che l'area del rettangolo "contenitore" è finita e dunque è finita anche la somma infinita dei rettangoli contenuti.

Un risultato di convergenza più generale del precedente che ci capiterà di utilizzare è il seguente:

Serie armonica generalizzata II

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha(\log n)^\beta}=\begin{cases}\text{converge} & \text{se } \alpha>1 \text{ oppure se } \alpha=1 \text{ e } \beta>1\\ +\infty & \text{se } \alpha<1 \text{ oppure se } \alpha=1 \text{ e } \beta\le 1\end{cases}$$

L'analisi che abbiamo compiuto per queste serie è stata piuttosto faticosa, e per continuare con esempi più complicati abbiamo bisogno di altri criteri di convergenza che siano più facili da usare. Cominciamo con il criterio del confronto asintotico.

Criterio del confronto asintotico

Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie tali che $a_n \geq 0$, $b_n > 0$ per $n \geq n_0$ e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in [0, +\infty]$$

Allora

(1) Se $L = 0$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge allora anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

(2) Se $L = +\infty$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$ allora anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$.

(3) Se $0 < L < +\infty$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge se e solo se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

Nel caso (3) le due serie si dicono *asintoticamente equivalenti*.

Vediamone subito qualche applicazione.

— ◇ —

Esempio 3.1 Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[7]{\frac{n^6 + n^3}{n^{15} + 2}}.$$

Dopo aver verificato che la serie è a termini non negativi proviamo a fare un'analisi asintotica del termine generico ossia a determinare il suo ordine di infinitesimo

$$\sqrt[7]{\frac{n^6 + n^3}{n^{15} + 2}} \sim \sqrt[7]{\frac{n^6}{n^{15}}} = \sqrt[7]{\frac{1}{n^9}} = \frac{1}{n^{9/7}}.$$

Quindi la serie in esame è asintoticamente equivalente alla serie armonica con $\alpha = \frac{9}{7} > 1$ che converge. Dunque per il criterio del confronto asintotico anche la serie proposta converge.

— ◇ —

Esempio 3.2 Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2.$$

La serie è a termini non negativi. Ora facciamo l'analisi asintotica del termine generico: ricordando che $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ per x che tende a 0, si ha che

$$n^3 \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 \sim n^3 \cdot \left(\frac{1}{2\,n^2}\right)^2 \sim \frac{1}{4\,n}.$$

Quindi la serie in esame è asintoticamente equivalente alla serie armonica con $\alpha = 1$ che diverge. Dunque per il criterio del confronto asintotico anche la serie proposta diverge.

— ◇ —

Esempio 3.3 Determinare il carattere della serie al variare del parametro reale a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n+3)! - \log n!}{n \log^a(n+6)}$$

La serie è a termini non negativi e l'analisi asintotica del termine generico ci da:

$$\frac{\log(n+3)! - \log n!}{n \log^a(n+6)} = \frac{\log((n+3)!/n!)}{n \log^a(n+6)} \sim \frac{\log(n^3)}{n(\log n)^a} \sim \frac{3}{n(\log n)^{a-1}}.$$

Quindi la serie in esame è asintoticamente equivalente alla serie armonica generalizzata con $\alpha = 1$ e $\beta = a - 1$, dunque per il criterio del confronto asintotico la serie proposta converge se e solo se $\beta > 1$ ossia se $a > 2$.

— ◇ —

Esempio 3.4 Calcoliamo la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

La serie è senz'altro convergente perché equivale asintoticamente alla serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

ma in questo caso siamo anche in grado di calcolare la somma. Osserviamo che

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$