Soluzioni

1. Calcolare la parte reale e immaginaria del numero complesso

$$z = i + \frac{3}{2-i}.$$

R.

$$\begin{aligned} z &= i + \frac{3 \cdot \overline{2-i}}{|2-i|^2} = i + \frac{3 \cdot (2+i)}{4+1} = i + \frac{6}{5} + \frac{3}{5}i \\ &= \frac{6}{5} + \left(1 + \frac{3}{5}\right) i = \frac{6}{5} + \frac{8}{5}i. \end{aligned}$$

Quindi $\mathrm{Re}(z) = 6/5$ e $\mathrm{Im}(z) = 8/5$.

— ⋄ —

2. Calcolare la parte reale e immaginaria del numero complesso

$$z = \frac{1+2i}{-3+i}.$$

R.

$$z = \frac{1+2i}{-3+i} = \frac{(1+2i)\cdot(\overline{-3+i})}{|-3+i|^2} = \frac{(1+2i)\cdot(-3-i)}{10} = -\frac{1}{10} - \frac{7}{10}i.$$

Quindi $\mathrm{Re}(z) = -1/10$ e $\mathrm{Im}(z) = -7/10$.

— ⋄ —

3. Calcolare la parte reale e immaginaria del numero complesso

$$z = (1+2i)^4 - (1-2i)^4.$$

R. Sia $w = (1+2i)^4$ allora $z = w - \overline{w} = 2i\mathrm{Im}(w)$ e

$$\begin{aligned} z &= 2i\mathrm{Im}((1+2i)^4) = 2i\mathrm{Im}(1 + 4(2i) + 6(2i)^2 + 4(2i)^3 + (2i)^4) \\ &= 2i\mathrm{Im}(4(2i) + 4(2i)^3) = 2i(8 + 32(-1)) = -48i. \end{aligned}$$

Quindi $\mathrm{Re}(z) = 0$ e $\mathrm{Im}(z) = -48$.

— ⋄ —

4. Calcolare la parte reale e immaginaria del numero complesso

$$z = \frac{(1+i)^{10}}{(1-i)^8}.$$

R. Conviene scrivere i numeri $1+i$ e $1-i$ in forma esponenziale:

$$1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{e} \quad 1-i = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Quindi

$$z = \frac{(1+i)^{10}}{(1-i)^8} = \frac{(\sqrt{2})^{10}\, e^{i\frac{10\pi}{4}}}{(\sqrt{2})^8\, e^{-i\frac{8\pi}{4}}} = (\sqrt{2})^2\, e^{i\frac{(10+8)\pi}{4}} = 2\, e^{i\frac{9\pi}{2}} = 2\, e^{i(4+\frac{1}{2})\pi} = 2i.$$

— ◇ —

5. Sia $z = i$. Calcolare

$$z^7 \quad \text{e} \quad z^{2002}.$$

R. Sapendo che $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)\cdot(-1) = 1$ allora

$$i^{4n} = (i^4)^n = 1^n = 1.$$

Quindi per calcolare le potenze richieste basta considerare solo il resto della divisione dell'esponente per 4:

$$z^7 = i^7 = i^{4+3} = i^4 \cdot i^3 = i^3 = -i;$$
$$z^{2002} = i^{2002} = i^{4\cdot 500+2} = i^{4\cdot 500} \cdot i^2 = i^2 = -1.$$

— ◇ —

6. Sia $z = 1+i$. Calcolare

$$(z^{2005} + \overline{z}^{2005})/2^{1002}.$$

R. Scriviamo z in forma esponenziale

$$z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

e poi calcoliamo z^{2005} (notando che $e^{i501\pi} = -1$)

$$z^{2005} = 2^{2005/2}e^{i2005\pi/4} = 2^{1002}\sqrt{2}e^{i(501+1/4)\pi} = 2^{1002}\sqrt{2}e^{i501\pi}e^{i\pi/4} = -2^{1002}z.$$

Infine dato che $\overline{z}^{2005} = \overline{z^{2005}} = -2^{1002}\overline{z}$

$$(z^{2005} + \overline{z}^{2005})/2^{1002} = (-2^{1002}z - 2^{1002}\overline{z})/2^{1002} = -(z+\overline{z}) = -2\mathrm{Re}(z) = -2.$$

— ◇ —

7. Sia $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calcolare
$$z^{8!-1}.$$

R. Scriviamo prima z in forma esponenziale:
$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = 1 \quad \text{e} \quad \theta = -\arccos(\frac{x}{|z|}) = -\arccos(\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{3}.$$
Dunque $z = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ e quindi $z^6 = e^{-i\frac{6\pi}{3}} = 1$. Dato che $8!$ è un multiplo di 6 $z^{8!} = 1$ e
$$z^{8!-1} = z^{8!} \cdot z^{-1} = z^{-1} = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$
— ◇ —

8. Determinare l'insieme dei numeri z tali che
$$z + \overline{z} = 0.$$

R. Riscriviamo l'equazione ponendo $z = x + iy$
$$(x+iy) + (x-iy) = 2x = 0$$
Quindi i punti del piano complesso richiesti sono quelli della retta $x = 0$.

— ◇ —

9. Determinare l'insieme dei numeri z tali che
$$z^2(\overline{z}+2) = 2z(z+1).$$

R. Dato che $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$ allora
$$z^2(\overline{z}+2) - 2z(z+1) = z|z|^2 + 2z^2 - 2z^2 - 2z = z(|z|^2 - 2) = 0.$$
Quindi i punti del piano complesso richiesti sono tali che
$$z = 0 \quad \text{oppure} \quad |z|^2 = 2$$
ossia il punto $z = 0$ e la circonferenza di centro 0 e raggio $\sqrt{2}$.

— ◇ —

10. Determinare l'insieme dei numeri z tali che
$$z^4 + |z|^4 = 0.$$

R. Dato che $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$ allora
$$z^4 + |z|^4 = z^4 + z^2\,\overline{z}^2 = z^2(z^2 + \overline{z}^2) = 0$$
Quindi i punti del piano complesso richiesti sono tali che
$$z^2 = 0 \quad \text{oppure} \quad z^2 + \overline{z}^2 = 0$$
ossia il punto $z = 0$ e le rette $y = -x$ e $y = x$. Dato che il punto 0 appartiene alle due rette nel descrivere l'insieme ottenuto possiamo semplicemente dire che è costituito dalle due rette $y = -x$ e $y = x$.

— ◇ —

11. Determinare l'insieme dei numeri z tali che

$$|\overline{z} - 2| = |\mathrm{Re}(z + 2)|.$$

R. Posto $z = x + iy$ ed elevando al quadrato otteniamo l'equazione equivalente

$$|(x - 2) - iy|^2 = |x + 2|^2$$

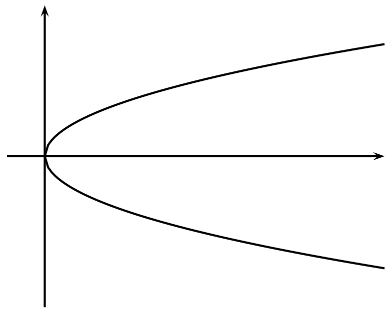
ossia

$$(x - 2)^2 + (-y)^2 = (x + 2)^2.$$

Svolgendo e semplificando troviamo che le coordinate dei punti dell'insieme cercato soddisfano l'equazione

$$y^2 = 8x$$

che rappresenta la seguente parabola



— ◇ —

12. Determinare l'insieme dei numeri z tali che

$$z^2 + \overline{z}^2 = 0.$$

R. Riscriviamo l'equazione ponendo $z = x + iy$

$$(x + iy)^2 + (x - iy)^2 = (x^2 + 2ixy - y^2) + (x^2 - 2ixy - y^2) = 2(x^2 - y^2) = 0.$$

Quindi le coordinate dei punti del piano complesso richiesti sono tali che

$$(x^2 - y^2) = (x + y)(x - y) = 0$$

ossia le rette $y = -x$ e $y = x$.

— ◇ —

13. Determinare il minimo dell'insieme

$$\left\{|z|\ :\ (z+2+2i)^2=-1\right\}.$$

R. Troviamo intanto le soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$(z+2+2i)^2+1=0$$

Ricordando che $z^2+1=(z+i)(z-i)$ allora

$$(z+2+2i)^2+1=((z+2+2i)+i)\,((z+2+2i)-i)=(z+2+3i)(z+2+i)$$

Dunque le radici di questo polinomio sono

$$z_1=-(2+3i)=-2-3i \quad \text{e} \quad z_2=-(2+i)=-2-i.$$

Ora calcoliamo i moduli ovvero gli elementi dell'insieme dato:

$$|z_1|=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{13} \quad \text{e} \quad |z_2|=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}.$$

Quindi il minimo richiesto è $\sqrt{5}$.

— ⋄ —

14. Determinare il massimo dell'insieme

$$\left\{\mathrm{Re}(w)\ :\ w^3=8i\right\}.$$

R. Troviamo intanto le radici terze di $8i=8\,e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$\begin{aligned} w_0 &= 2\,e^{i\frac{\pi}{6}}=2\,(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)=\sqrt{3}+i,\\ w_1 &= 2\,e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3})}=2\,e^{i\frac{5\pi}{6}}=-\sqrt{3}+i,\\ w_2 &= 2\,e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3})}=2\,e^{i\frac{3\pi}{2}}=-2i. \end{aligned}$$

Quindi

$$\max\left\{\mathrm{Re}(w)\ :\ w^3=8i\right\}=\max\left\{\sqrt{3},-\sqrt{3},0\right\}=\sqrt{3}.$$

— ⋄ —

15. Risolvere l'equazione

$$z^2-2iz+3=0.$$

R. Cominciamo con il calcolo di Δ:

$$\Delta=b^2-4ac=(-2i)^2-4(3)=-16.$$

Le due radici quadrate di $\Delta=-16=16\,e^{i\pi}$ sono

$$w_1=4\,e^{i\frac{\pi}{2}}=4i \quad \text{e} \quad w_2=4\,e^{i\frac{3\pi}{2}}=-w_1.$$

Quindi

$$z_1=\frac{-b+w_1}{2a}=\frac{2i+4i}{2}=3i \quad \text{e} \quad z_2=\frac{-b-w_1}{2a}=\frac{2i-4i}{2}=-i.$$

— ◇ —

16. Risolvere l'equazione

$$z^2 - 3z + 3 + i = 0.$$

R. Calcolo di Δ:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(3 + i) = -3 - 4i = 5\,e^{i\theta}.$$

Così $\cos\theta = -3/5$, $\sin\theta = -4/5$ e

$$\cos(\theta/2) = -\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \frac{3}{5})} = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin(\theta/2) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \frac{3}{5})} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Quindi le due radici quadrate di $\Delta = -3 - 4i =$ sono

$$\pm\sqrt{\Delta} = \pm\sqrt{5}e^{i\theta/2} = \pm\sqrt{5}(\cos(\theta/2) + i\sin(\theta/2)) = \pm(-1 + 2i),$$

e possiamo determinare le soluzioni:

$$z_1 = (3 + (-1 + 2i))/2 = 1 + i \quad \text{e} \quad z_2 = (3 - (-1 + 2i))/2 = 2 - i.$$

— ◇ —

17. Risolvere l'equazione

$$(z^2 + i)^2 + 1 = 0.$$

R. Il primo membro è un polinomio di quarto grado in $\mathbb{C}$ e dunque ci aspettiamo quattro soluzioni (tenendo conto della molteplicità). Poniamo $w = z^2 + i$ e intanto risolviamo l'equazione $w^2 = -1$. Questa ha due soluzioni $w_1 = i$ e $w_2 = -i$ e quindi l'equazione proposta è equivalente a trovare le soluzioni delle due equazioni

$$z^2 + i = w_1 = i, \quad z^2 + i = w_2 = -i.$$

La prima equivale a $z^2 = 0$ e quindi le soluzioni sono $z_1 = z_2 = 0$ (la soluzione 0 ha molteplicità 2). La seconda invece equivale a

$$z^2 = -2i = 2\,e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

e dunque otteniamo

$$z_3 = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}} = 1 - i \quad z_4 = -z_3 = -1 + i.$$

— ◇ —

18. Risolvere l'equazione

$$||z| - 2i|^2 = 4.$$

R. Abbiamo che

$$||z| - 2i|^2 = (\mathrm{Re}(|z| - 2i))^2 + (\mathrm{Im}(|z| - 2i))^2 = |z|^2 + (-2)^2 = |z|^2 + 4 = 4.$$

ossia $|z|^2 = 0$ che è risolta solo per $z = 0$.

— ⋄ —

19. Risolvere l'equazione
$$|z|^2 = 12 - |z|.$$

R. Si tratta di un'equazione di secondo grado nella variabile $\rho = |z|$:
$$\rho^2 + \rho - 12 = 0.$$
che ha come soluzioni $\rho_1 = 3$ e $\rho_2 = -4$. Dato che $|z| \geq 0$, possiamo accettare solo la soluzione $\rho_1 = 3$. Quindi l'equazione iniziale è risolta da tutti i punti z tali che $|z| = 3$ ossia la circonferenza centrata in 0 di raggio 3.

— ⋄ —

20. Risolvere l'equazione
$$\text{Im}(z^2) = |z|^2.$$

R. Ponendo $z = x + iy$ si ottiene
$$\text{Im}(z^2) = \text{Im}((x+iy)^2) = \text{Im}(x^2 - y^2 + 2ixy) = 2xy \quad \text{e } |z|^2 = x^2 + y^2.$$
Quindi l'equazione iniziale è equivalente a $2xy = x^2 + y^2$ ossia $(x-y)^2 = 0$ ed è dunque risolta da tutti i punti sulla bisettrice $y = x$.

— ⋄ —

21. Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione
$$\overline{z}^9 = z^3|z|^5.$$

R. Se calcoliamo il valore assoluto di entrambi i membri otteniamo
$$|\overline{z}|^9 = |z|^9 = |z^3|z|^5| = |z|^8,$$
ossia
$$|z|^9 - |z|^8 = |z|^8(|z| - 1) = 0.$$
e quindi $|z| = 0$ oppure $|z| = 1$. Se $|z| = 0$ allora otteniamo una prima soluzione: $z = 0$. Se invece $|z| = 1$ allora $\overline{z}^9 = z^{-9}$ e l'equazione iniziale diventa $z^{-9} = z^3$ ossia $z^{12} = 1$ che ha 12 soluzioni. Dunque in totale le soluzioni sono 13.

— ⋄ —

22. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$(z^4 - 1)/(z^3 + 1)^2 = 0.$$

R. Il numeratore $(z^4 - 1)$ ha quattro zeri distinti (ciascuno con molteplicità 1):

$$1\,, \quad i\,, \quad -1\,, \quad -i.$$

Il denominatore $(z^3 + 1)^2$ ha tre zeri distinti (ciascuno con molteplicità 2):

$$-1\,, \quad (1 + i\sqrt{3})/2\,, \quad (1 - i\sqrt{3})/2.$$

Il rapporto è uguale a zero se e solo se il numeratore si annulla e il denominatore è diverso da zero (altrimenti il rapporto non è definito!). Quindi l'insieme richiesto ha 3 elementi (gli elementi multipli contano una sola volta): $\{1, i, -i\}$.

— ◇ —

23. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$z(\overline{z} + 2|z|) + 4 = 2|z|(z + 1).$$

R. Svolgendo si ottiene

$$|z|^2 + 2z|z| + 4 = 2|z|z + 2|z|$$

ossia

$$|z|^2 - 2|z| + 4 = 0.$$

Se si risolve rispetto a $|z|$ si ottiene che

$$|z| = 1 + i\sqrt{3} \quad \text{oppure} \quad |z| = 1 - i\sqrt{3}$$

e nessuna delle due equazioni ammette soluzioni perché $|z|$ deve essere un numero reale maggiore o uguale a 0. Quindi il numero di soluzioni dell'equazione data è 0.

— ◇ —

24. Determinare il massimo e il minimo dell'insieme

$$\left\{|z - w| \,:\, z^4 = 1 \text{ e } w^4 = -4\right\}.$$

R. L'equazione $z^4 = 1$ individua un primo quadrato di vertici:

$$z_0 = 1,\ z_1 = i,\ z_2 = -1,\ z_3 = -i.$$

L'equazione $w^4 = -4$ individua un secondo quadrato di vertici:

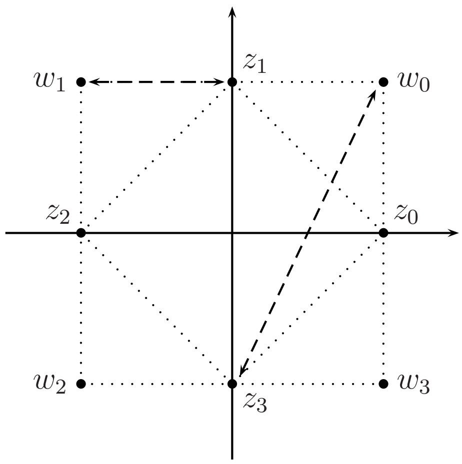
$$w_0 = 1 + i,\ w_1 = -1 + i,\ w_2 = -1 - i,\ w_3 = 1 - i.$$

L'insieme dato è dunque costituito dalla misure delle distanze tra z_j e w_k con $j, k = 1, 2, 3, 4$. Dal disegno possiamo facilmente vedere che la distanza massima è ottenuta per esempio tra z_3 e w_0:

$$\max\left\{|z-w| \,:\, z^4 = 1 \text{ e } w^4 = -4\right\} = |z_3 - w_0| = |-i-(1+i)| = |-1-2i| = \sqrt{5}.$$

La distanza minima è ottenuta invece per esempio tra z_1 e w_1:

$$\min\left\{|z-w| \,:\, z^4 = 1 \text{ e } w^4 = -4\right\} = |z_1 - w_1| = |i-(-1+i)| = 1.$$



— ◇ —

25. Risolvere la disuguaglianza

$$\mathrm{Re}\left((z-1)(z-2i)\right) \geq \mathrm{Re}(z-1)\cdot\mathrm{Re}(z-2i).$$

R. Poniamo $z = x + iy$ e svolgiamo i calcoli

$$\mathrm{Re}\left((z-1)(z-2i)\right) = \mathrm{Re}\left(z^2 - z - 2iz + 2i\right) = x^2 - y^2 - x + 2y$$

e

$$\mathrm{Re}(z-1)\cdot\mathrm{Re}(z-2i) = (x-1)\cdot x = x^2 - x.$$

Quindi la disuguaglianza iniziale è equivalente a

$$x^2 - y^2 - x + 2y \geq x^2 - x$$

ossia

$$-y^2 + 2y = y(2-y) \geq 0$$

e dunque $y \in [0, 2]$ e x può assumere qualunque valore. Così l'insieme dei numeri complessi che risolve la disuguaglianza sono quelli contenuti nella striscia $\mathbb{R} \times [0, 2]$.

— ◇ —

26. Risolvere la disuguaglianza

$$|z-2i|^2 - 8 > |z|^2 - |z+2i|^2$$

R. Poniamo $z = x + iy$ e svolgiamo i calcoli

$$|z-2i|^2 - 8 = |x + i(y-2)|^2 - 8 = x^2 + (y-2)^2 - 8 = x^2 + y^2 - 4y - 4$$

e

$$|z|^2 - |z+2i|^2 = |x+iy|^2 - |x+i(y+2)|^2 = x^2 + y^2 - x^2 - (y+2)^2 = -4y - 4$$

Quindi la disuguaglianza iniziale diventa

$$x^2 + y^2 - 4y - 4 > -4y - 4$$

ossia $x^2 + y^2 > 0$ e dunque l'insieme delle soluzioni è $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

— ◇ —

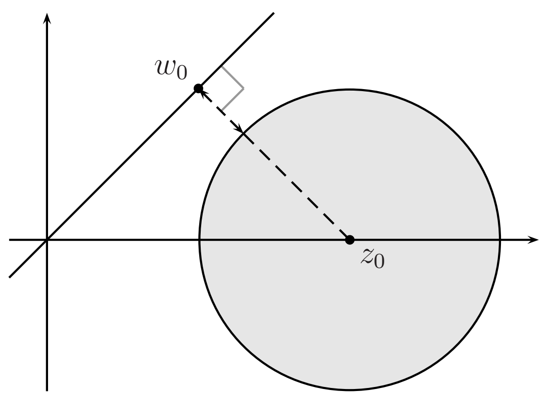
27. Determinare l'estremo superiore e inferiore dell'insieme

$$\{|z-w| \,:\, |z-2| \le 1 \text{ e } \mathrm{Re}(w - i\overline{w}) = 0\}\,.$$

R. La disequazione $|z-2| \le 1$ individua il cerchio di centro 2 e raggio 1. Posto $w = x + iy$, abbiamo che

$$\mathrm{Re}(w - i\overline{w}) = \mathrm{Re}((x+iy) - i(x-iy)) = x - y = 0$$

e quindi l'equazione $\mathrm{Re}(w - i\overline{w}) = 0$ rappresenta la retta $y = x$.



L'insieme dato è così costituito dalla misure delle distanze tra i punti del cerchio e della retta. Quindi la distanza minima è ottenuta togliendo il raggio della circonferenza alla distanza tra il punto $w_0 = 1 + i$ sulla retta e il centro $z_0 = 2$:

$$\min\{|z-w| \,:\, |z-2| \le 1 \text{ e } \mathrm{Re}(w - i\overline{w}) = 0\} = \sqrt{2} - 1.$$

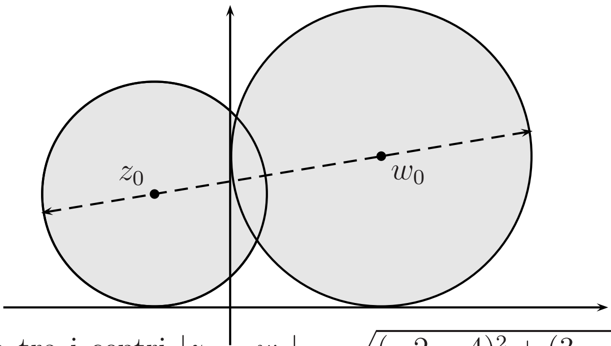
L'estremo superiore delle distanze è invece $+\infty$ perché la retta non è limitata.

— ⋄ —

28. Determinare il massimo e il minimo dell'insieme

$$\{|z-w|\,:\,|z+2-3i|\leq 3 \text{ e } |w-4-4i|\leq 4\}\,.$$

R. Le disequazioni $|z+2-3i|\leq 3$ e $|w-4-4i|\leq 4$ individuano rispettivamente il cerchio di centro $z_0=-2+3i$ e raggio 3 e il cerchio di centro $w_0=4+4i$ e raggio 4.



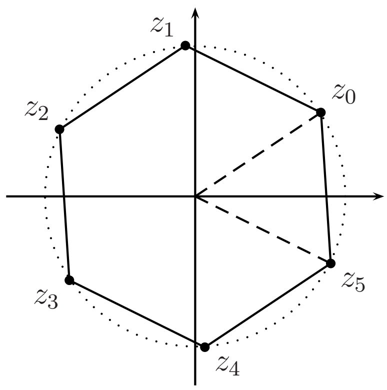
Dato che la distanza tra i centri $|z_0-w_0|=\sqrt{(-2-4)^2+(3-4)^2}=\sqrt{37}$ è minore della somma dei raggi $3+4=7$, i due cerchi si intersecano e il minimo richiesto è 0 mentre il massimo è uguale a $\sqrt{37}+7$ ossia alla distanza dei centri più la somma dei due raggi.

— ⋄ —

29. Calcolare il perimetro del poligono di vertici

$$\left\{z\in\mathbb{C}\,:\,z^6=1/(3-2i)^6\right\}.$$

R. I vertici sono le radici seste del numero $1/(3-2i)^6$ e quindi individuano un esagono regolare centrato nell'origine.



Per calcolare il perimetro di questo esagono è necessario sapere solo il raggio r della circonferenza circoscritta ovvero il modulo delle radici:

$$r=\left(\left|1/(3-2i)^6\right|\right)^{1/6}=\left(1/\,|3-2i|^6\right)^{1/6}=1/\,|(3-2i)|=1/\sqrt{3^2+(-2)^2}=1/\sqrt{13}.$$

Quindi sapendo che il lato dell'esagono è uguale al raggio r, il perimetro è $6r=6/\sqrt{13}$.

— ◇ —

30. Determinare per quali $z \in \mathbb{C}$ si ha che

$$|\mathrm{Re}((z+1)(z-3))| \geq |z+1||z-3|.$$

R. Intanto vediamo quando vale la disuguaglianza $|\mathrm{Re}(w)| \geq |w|$. Posto $w = x + iy$ si ha che

$$|\mathrm{Re}(w)| = |x| \geq |w| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

equivale a

$$|x|^2 = x^2 = x^2 + y^2$$

ossia $y = 0$. Dunque $|\mathrm{Re}(w)| \geq |w|$ è soddisfatta se e solo se $\mathrm{Im}(w) = 0$. Quindi per concludere l'esercizio basta trovare per quali $z \in \mathbb{C}$

$$\mathrm{Im}((z+1)(z-3)) = 0.$$

Di nuovo poniamo $z = x + iy$ così

$$\mathrm{Im}((z+1)(z-3)) = \mathrm{Im}(((x+1)+iy)((x-3)+iy)) = y(x+1)+y(x-3) = 2y(x-1) = 0.$$

Quindi la disuguaglianza vale per tutti i punti sulle rette $y = 0$ e $x = 1$.

— ◇ —

31. Rappresentare nel piano complesso $\mathbb{C}$ l'insieme

$$\left\{z \in \mathbb{C} \ : \ (1+i)z = \sqrt{2}|z|\right\}$$

R. Poniamo $z = x + iy$, così l'equazione diventa

$$(1+i)z = (1+i)(x+iy) = (x-y) + i(x+y) = \sqrt{2}|z| = \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}.$$

Separando la parte reale e immaginaria otteniamo le due equazioni

$$\begin{cases} x - y = \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} \\ x + y = 0 \end{cases}.$$

Dalla seconda otteniamo che $y = -x$ e sostituendo la y nella prima si ha che

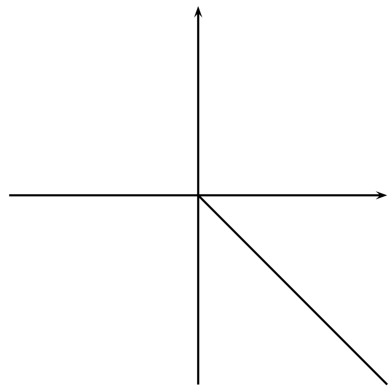
$$x + x = \sqrt{2}\sqrt{x^2 + (-x)^2}$$

ossia

$$x = \sqrt{x^2} = |x|$$

che è risolta per $x \geq 0$. Quindi l'insieme cercato è la semiretta

$$y = -x \quad \text{per } x \geq 0.$$



— ⋄ —

32. Quanti sono i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{cases} z^{10} = 3 + 8i \\ z^5 = 8 - 3i \end{cases} .$$

R. L'equazione $z^{10} = 3 + 8i$ individua 10 punti sulla circonferenza di raggio

$$r_1 = \sqrt[10]{|3 + 8i|} = 73^{1/20}.$$

L'equazione $z^5 = 8 - 3i$ invece individua 5 punti sulla circonferenza di raggio

$$r_2 = \sqrt[5]{|8 - 3i|} = 73^{1/10}.$$

Dato che $r_1 < r_2$ (non occorre calcolare numericamente r_1 e r_2 per stabilire questa relazione!) le due equazioni non possono avere soluzioni in comune e quindi la risposta è 0.