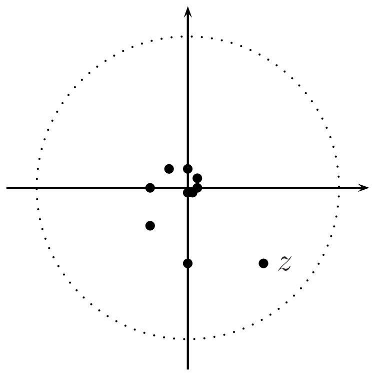
Da questi esempi si può osservare che, facendo le successive potenze di un numero complesso z, i punti corrispondenti "girano" attorno all'origine. Se inoltre $|z| > 1$ allora i punti si allontanano indefinitamente ($|z|^n \to +\infty$), se $|z| = 1$ i punti rimangono sulla circonferenza unitaria ($|z|^n = 1$) e infine se $|z| < 1$ i punti si avvicinano all'origine ($|z|^n \to 0$). Se riprendiamo il punto z dell'esempio precedente e proviamo a disegnare nel piano le prime 10 potenze otteniamo:



6. Radici di un numero complesso

Passiamo ora all'analisi del problema inverso: se conosciamo la potenza n-esima di un numero complesso, come facciamo a calcolare il numero originale? Ossia dato un numero complesso z quante e quali sono le soluzioni w dell'equazione $w^n = z$? Se $z = 0$ la risposta è banale: l'unica soluzione possibile è proprio $w = 0$. Supponiamo quindi che $z \neq 0$ e iniziamo a ragionare nel caso particolare in cui $z = 1$.

Se $n = 2$ l'equazione da risolvere è $w^2 = 1$. Se esprimiamo l'incognita in forma esponenziale otteniamo: $w = |w|\, e^{i\varphi}$ e

$$w^2 = |w|^2 e^{i2\varphi} = 1\, e^{i0} = 1.$$

Dato che due numeri complessi in forma esponenziale sono uguali se e solo se i loro moduli sono uguali e i loro argomenti differiscono di un multiplo di 2π, abbiamo che

$$|w|^2 = 1 \quad \text{e} \quad 2\varphi = 0 + 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

Questo vuol dire che $|w| = 1$ (il modulo è un numero reale non negativo) e i possibili argomenti di w sono

$$\varphi = \frac{0 + 2k\pi}{2} = k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

Quindi l'insieme delle soluzioni si scrive come

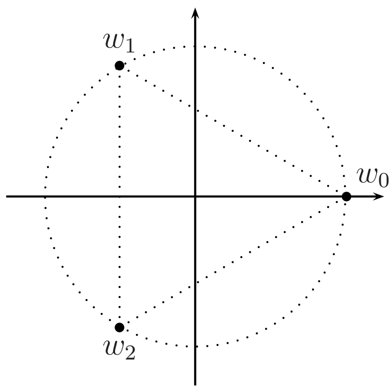
$$\left\{ w_k = e^{ik\pi} \,:\, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Apparentemente questo insieme contiene infiniti elementi che dipendono dal parametro $k \in \mathbb{Z}$. Se però esaminiamo gli elementi con più attenzione ci accorgiamo che

$$e^{ik\pi} = 1 \ \text{ se } k \text{ è pari} \quad \text{e} \quad e^{ik\pi} = -1 \ \text{ se } k \text{ è dispari}$$

ossia
$$\left\{w_k = e^{ik\pi} \,:\, k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{w_k = e^{ik\pi} \,:\, k = 0, 1\right\} = \{1, -1\}.$$
Così le soluzioni sono esattamente 2 e sono quelle che potevamo determinare già nell'ambito dei numeri reali: $w_0 = 1$ e $w_1 = -1$.

Proviamo ora a vedere cosa succede per $n = 3$. L'equazione da risolvere è $w^3 = 1$ e se ripercorriamo i passaggi del caso precedente otteniamo:
$$w^3 = |w|^3 e^{i3\varphi} = 1,$$
che equivale a
$$|w| = 1 \quad \text{e} \quad \varphi = \frac{2k\pi}{3} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$
e l'insieme delle soluzioni, dopo le analoghe riduzioni del caso $n = 2$, si scrive come
$$\left\{w_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}} \,:\, k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{w_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}} \,:\, k = 0, 1, 2\right\} = \left\{1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}\right\}.$$
Dunque le soluzioni sono esattamente 3: oltre a quella che ci aspettavamo dal caso reale, $w_0 = 1$, abbiamo ottenuto anche $w_1 = e^{i2\frac{\pi}{3}}$ e $w_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Riportando i punti nel piano possiamo notare che queste soluzioni stanno tutte sulla circonferenza unitaria e individuano i vertici di un triangolo equilatero.

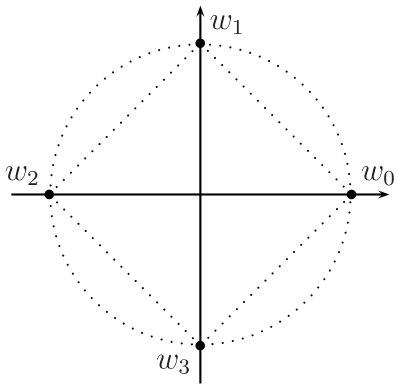


Ora dovrebbe essere chiaro cosa si ottiene per $z = 1$ quando n è un intero positivo qualunque: le soluzioni dell'equazione
$$w^n = 1$$
sono n e precisamente
$$\left\{w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \,:\, k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1\right\} = \left\{1, e^{i\frac{2\pi}{n}}, e^{i\frac{4\pi}{n}}, \ldots, e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}\right\}.$$
Nel piano questi numeri, dette *radici n-esime dell'unità*, sono disposti ai vertici di un poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza unitaria e con un vertice in 1.

— ◇ —

Esempio 6.1 Calcoliamo le radici quarte dell'unità. Risolvendo l'equazione $w^4 = 1$ otteniamo

$$\left\{w_k = e^{i\frac{2k\pi}{4}} \,:\, k = 0, 1, 2, 3\right\} = \left\{1, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\pi}, e^{i\frac{3\pi}{2}}\right\} = \{1, i, -1, -i\}\,.$$



— ◇ —

Il caso più generale, quando z è un generico numero complesso diverso da zero, si affronta nello stesso modo e la conclusione è la seguente:

RADICI n-ESIME

Se $z = |z|e^{i\theta} \neq 0$ allora l'insieme delle soluzioni dell'equazione $w^n = z$ è costituito da n numeri distinti dette *radici n-esime di z*:

$$\left\{w_k = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \,:\, k = 0, 1, 2, \ldots, n-1\right\}.$$

Nel piano i punti corrispondenti a ogni w_k sono disposti ai vertici di un poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza di raggio $\sqrt[n]{|z|}$ centrata in 0 e con un vertice in $e^{i\frac{\theta}{n}}$.

— ◇ —

Esempio 6.2 Risolviamo l'equazione $w^2 = -1$. Si tratta di determinare le due radici quadrate del numero $z = -1 = e^{i\pi}$:

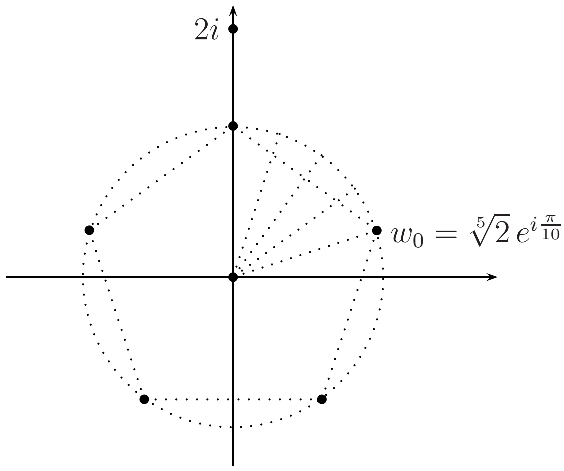
$$\left\{w_k = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)} \,:\, k = 0, 1\right\} = \{i, -i\}\,.$$

In questo caso, il poligono regolare è costituito dai due punti opposti i e $-i$.

— ◇ —

Esempio 6.3 Calcoliamo le radici quinte di $z = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$:

$$\left\{w_k = \sqrt[5]{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}\right)} \;:\; k = 0, 1, 2, 3, 4\right\}.$$



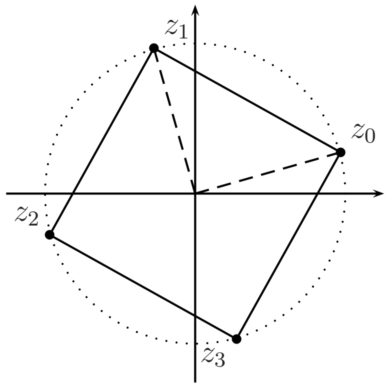
Quindi otteniamo un pentagono regolare inscritto nella circonferenza di raggio $\sqrt[5]{2}$ centrata in 0. L'argomento del vertice w_0 è $\frac{\pi}{10}$ ossia $\frac{1}{5}$ dell'argomento di $2i$ che è uguale a $\frac{\pi}{2}$.

— ◇ —

Esempio 6.4 Calcoliamo l'area del poligono di vertici

$$\left\{z \in \mathbb{C} \;:\; z^4 = 4\sqrt{5}(1 + 2i)\right\}.$$

I vertici sono le radici quarte del numero $4\sqrt{5}(1 + 2i)$ e quindi, per quanto detto, individuano un quadrato centrato nell'origine.



Per calcolare l'area di questo quadrato è necessario sapere solo il raggio r della circonferenza circoscritta ovvero il modulo delle radici:

$$r = (4\sqrt{5}|1 + 2i|)^{1/4} = (4\sqrt{5}\sqrt{1^2 + 2^2})^{1/4} = (20)^{1/4}.$$

Quindi sapendo che il lato del quadrato è $\sqrt{2}r$, l'area è uguale a
$$(\sqrt{2}r)^2 = 2r^2 = 2(20)^{1/2} = 4\sqrt{5}.$$

— ◇ —

Esempio 6.5 Calcoliamo il limite $\lim_{n\to\infty} p_n$, dove p_n è il perimetro del poligono di vertici
$$\left\{z \in \mathbb{C} \ : \ z^{2n} = 4^n\right\}.$$
L'equazione $z^{2n} = 4^n = 2^{2n}$ individua i vertici di un poligono regolare di $2n$ lati inscritto nella circonferenza centrata in 0 e di raggio 2. Al crescere di n, il numero di lati aumenta e e la successione di poligoni *tende* alla circonferenza in cui sono iscritto. Quindi il limite della successione dei loro perimetri è la lunghezza di tale circonferenza ossia 4π.

7. Equazione di secondo grado in $\mathbb{C}$

In quest'ultima parte vogliamo discutere la risoluzione di una generica equazione di secondo grado
$$az^2 + bz + c = 0.$$
quando i coefficienti $a, b, c \in \mathbb{C}$ ($a \neq 0$). Si può verificare che la formula per determinare le soluzioni nel caso reale è ancora valida nel caso complesso
$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$
dove il simbolo $\pm\sqrt{\Delta}$ rappresenta le due radici quadrate del numero complesso $\Delta = b^2 - 4ac$. Quindi, a differenza del caso reale, un'equazione di secondo grado in $\mathbb{C}$ ammette sempre due soluzioni (eventualmente coincidenti).

— ◇ —

Esempio 7.1 Risolviamo l'equazione $z^2 - 4z + 4 - \frac{1}{2}i = 0$: in questo caso
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(4 - \frac{1}{2}i) = 2i.$$
Le due radici quadrate di $2i$ sono
$$w_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i \quad \text{e} \quad w_2 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}} = -1 - i = -w_1.$$
Quindi
$$z_1 = \frac{-b + w_1}{2a} = \frac{4 + 1 + i}{2} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}i \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{-b - w_1}{2a} = \frac{4 - 1 - i}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i.$$
Provate a ottenere lo stesso risultato dopo aver osservato che l'equazione data può essere riscritta nel seguente modo:
$$(z - 2)^2 = \frac{1}{2}i.$$

— ⋄ —

La situazione descritta per un'equazione polinomiale di grado 2 si generalizza al caso di un'equazione polinomiale di grado n:

Teorema fondamentale dell'algebra

Sia $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ un polinomio di grado $n > 0$ a coefficienti in $\mathbb{C}$. Allora l'equazione $P(z) = 0$ ha n soluzioni complesse $z_1, z_2, \cdots, z_n$ (tenendo conto delle molteplicità) e inoltre

$$P(z) = a_n \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdots (z - z_n).$$

— ⋄ —

Esempio 7.2 Risolviamo l'equazione

$$P(z) = z^4 + (1 - 2i)z^2 - 2i = 0$$

e poi fattorizziamo il polinomio $P(z)$.
Poniamo $w = z^2$:

$$w^2 + (1 - 2i)w - 2i = 0.$$

In questo caso $\Delta = (1-2i)^2 + 8i = -3 + 4i = 5e^{i\theta}$. Possiamo determinare le due radici quadrate di Δ senza determinare $\theta \in [0, 2\pi)$, ricordando le formule di bisezione:

$$\cos(\theta/2) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}}, \quad \sin(\theta/2) = \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}}$$

dove il segno è positivo se $\theta \in [0, \pi]$ ovvero se $\sin\theta \geq 0$. Nel nostro caso $\cos\theta = -3/5$ e $\sin\theta = 4/5$, così

$$\cos(\theta/2) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{5}\right)} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin(\theta/2) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{5}\right)} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

e

$$\pm\sqrt{\Delta} = \pm\sqrt{5}e^{i\theta/2} = \pm\sqrt{5}(\cos(\theta/2) + i\sin(\theta/2)) = \pm(1 + 2i).$$

Dunque le soluzioni sono $w_1 = -1$ e $w_2 = 2i$ e

$$w^2 + (1 - 2i)w - 2i = (w - (-1)) \cdot (w - 2i) = (z^2 + 1) \cdot (z^2 - 2i) = 0.$$

Ora basta risolvere le equazioni che si ottengono uguagliando a zero i singoli fattori:

$$z^2 = -1 \quad \text{e} \quad z^2 = 2i.$$

Quindi le 4 soluzioni dell'equazione data sono:

$$z_1 = i, \ \ z_2 = -i \quad \text{e} \quad z_3 = 1 + i, \ \ z_4 = -1 - i$$

Inoltre, il polinomio dato può essere fattorizzato nel seguente modo

$$P(z) = z^4 + (1 - 2i)z^2 - 2i = (z - i) \cdot (z + i) \cdot (z - 1 - i) \cdot (z + 1 + i).$$

— ◇ —

Esempio 7.3 Determiniamo il numero di elementi dell'insieme delle soluzioni dell'equazione

$$P(z) = (z^4 - 1)^2 \cdot (z^3 - 1) = 0.$$

Il polinomio $P(z)$ ha grado $4 \cdot 2 + 3 = 11$ quindi per il teorema fondamentale dell'algebra ci aspettiamo 11 soluzioni (non necessariamente distinte). Nell'insieme delle soluzioni gli elementi multipli contano però una sola volta e quindi la domanda equivale a determinare il numero di soluzioni distinte.
Il fattore $(z^4 - 1)^2$ ha quattro zeri distinti ciascuno con molteplicità 2:

$$1\,, \quad i\,, \quad -1\,, \quad -i.$$

Il fattore $(z^3 - 1)$ ha tre zeri distinti ciascuno con molteplicità 1:

$$1\,, \quad (-1 + i\sqrt{3})/2\,, (-1 - i\sqrt{3})/2.$$

Quindi l'insieme delle soluzioni dell'equazione $P(z) = 0$ è:

$$\left\{1, i, -1, -i, (-1 + i\sqrt{3})/2, (-1 - i\sqrt{3})/2\right\}$$

e il numero dei suoi elementi è 6.

— ◇ —

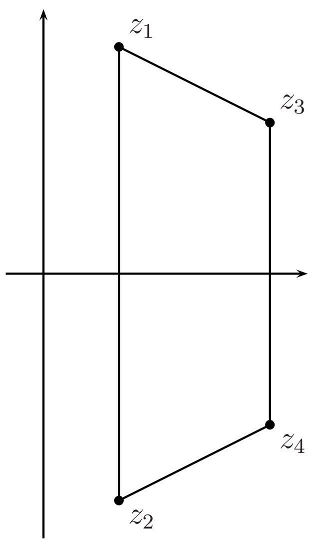
Esempio 7.4 Determiniamo il perimetro e l'area del poligono i cui vertici soddisfano l'equazione

$$P(z) = (z^2 - 2z + 10) \cdot (z^2 - 6z + 13) = 0.$$

Le soluzioni del polinomio di quarto grado $P(z)$ sono ottenute risolvendo i due fattori di secondo grado:

$$z_1 = 1 + 3i\ , z_2 = 1 - 3i \quad \text{e} \quad z_3 = 3 + 2i\ , z_4 = 3 - 2i.$$

Le due coppie di numeri complessi coniugati individuano i vertici di un trapezio:



Calcoliamo le lunghezze dei lati

$$|z_1 - z_2| = |6i| = 6, \; |z_1 - z_3| = |z_2 - z_4| = |-2 + i| = \sqrt{5}\,, |z_3 - z_4| = |4i| = 4$$

quindi il perimetro è $10 + 2\sqrt{5}$. L'area invece è uguale a

$$\frac{1}{2}\,(|z_1 - z_2| + |z_3 - z_4|) \cdot |\mathrm{Re}(z_3 - z_1)| = \frac{1}{2}\,(6 + 4) \cdot |3 - 1| = 10.$$