1

Numeri complessi

Nel corso dello studio della matematica si assiste ad una progressiva estensione del concetto di numero. Dall'insieme degli interi naturali $\mathbb{N}$ si passa a quello degli interi relativi $\mathbb{Z}$ per poi giungere ai razionali $\mathbb{Q}$ e ancora ai reali $\mathbb{R}$. Spesso questi ampliamenti vengono giustificati con l'incapacità di risolvere in un certo insieme un determinato problema. Ad esempio l'equazione

$$x^2 = 2$$

non ha soluzione nell'insieme dei razionali, mentre ne ha ben due nell'estensione $\mathbb{R}$, ossia $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$. La necessità di ampliare ulteriormente i numeri reali si presenta invece quando si prova a risolvere un'altra equazione di secondo grado:

$$x^2 = -1.$$

Il problema in questo caso è comune a tutte le risoluzioni di equazioni di secondo grado con discriminante negativo e consiste nel fatto che la funzione reale radice quadrata non è definita per numeri negativi. Come vedremo l'insieme dei numeri complessi, che denoteremo con il simbolo $\mathbb{C}$, permetterà di dare una risposta a questo problema.

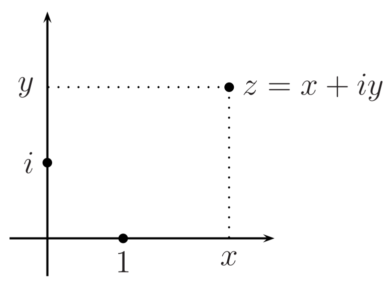
1. La definizione di numero complesso e le sue rappresentazioni

L'estensione consiste nel passaggio dalla dimensione uno della retta (reale) alla dimensione due del piano (complesso). Un *numero complesso* z si identifica dunque come un punto nel piano e comunemente viene rappresentato in due modi: nella forma cartesiana e nella forma esponenziale.

Nella *forma cartesiana* il numero complesso z viene individuato dalle sue coordinate (reali) x e y e si può scrivere

$$z = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x + iy$$

dove i particolari numeri complessi $(1, 0)$ e $(0, 1)$ sono stati identificati rispettivamente con l'*unità reale* 1 e l'*unità immaginaria* i.



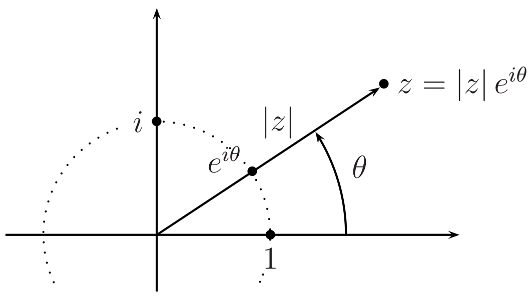
La coordinata x è la *parte reale* di z mentre y è la *parte immaginaria* di z:

$$x = \mathrm{Re}(z)\ , \quad y = \mathrm{Im}(z).$$

Nella *forma esponenziale* il numero complesso z viene invece individuato dal *modulo* $|z|$, ossia la distanza del punto z dall'origine, e dall'*argomento*, ossia l'angolo θ compreso tra la direzione positiva dell'asse delle x e la semiretta uscente dall'origine e passante per z. Tale angolo viene espresso in radianti e non è definito quando $z = 0$, mentre per $z \neq 0$ è determinato a meno di multipli di 2π (che corrisponde ad un angolo giro). In questo modo possiamo scrivere

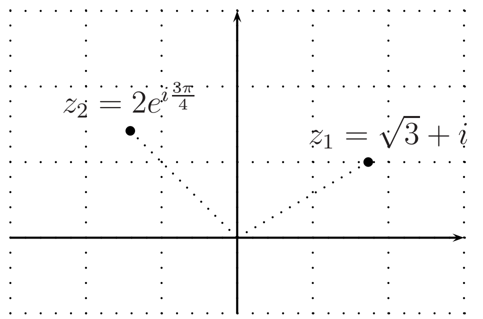
$$z = |z|\, e^{i\theta}$$

dove il simbolo $e^{i\theta}$ è definito come il numero complesso di modulo unitario $\cos\theta + i\sin\theta$.



— ◇ —

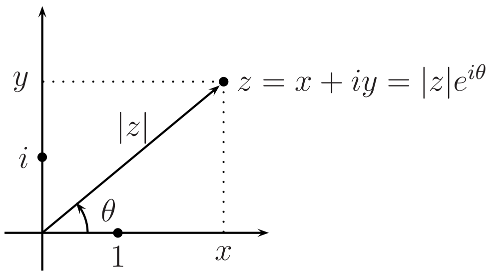
Esempio 1.1 Rappresentiamo nel piano il numero complesso $z_1 = \sqrt{3} + i$, scritto in forma cartesiana, e il numero complesso $z_2 = 2\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$, scritto in forma esponenziale.



Si osservi che la forma esponenziale di z_2 non è unica:

$$z_2 = 2\, e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2\, e^{i(\frac{3\pi}{4}+2\pi)} = 2\, e^{i\frac{11\pi}{4}} = e^{i(\frac{3\pi}{4}-2\pi)} = 2\, e^{-i\frac{5\pi}{4}}.$$

La seguente figura ci aiuta a capire come passare da una forma all'altra



Il passaggio dalla forma cartesiana a quella esponenziale è complicato dall'indeterminazione dell'argomento:

DALLA FORMA CARTESIANA ALLA FORMA ESPONENZIALE
Se $z = x + iy \neq 0$ allora $$\lvert z\rvert = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{e} \quad \theta = \begin{cases} \arccos(\frac{x}{\lvert z\rvert}) & \text{se } y \geq 0 \\ -\arccos(\frac{x}{\lvert z\rvert}) & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

In questo modo viene calcolato solo uno degli infiniti argomenti associati a z e precisamente quello compreso nell'intervallo $(-\pi, \pi]$. L'insieme completo dei possibili argomenti è dato da: $\theta + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Il passaggio inverso è più semplice:

DALLA FORMA ESPONENZIALE ALLA FORMA CARTESIANA
Se $z = \lvert z\rvert\, e^{i\theta}$ allora $$x = \mathrm{Re}(z) = \lvert z\rvert \cos\theta \quad \text{e} \quad y = \mathrm{Im}(z) = \lvert z\rvert \sin\theta.$$

— ⋄ —

Esempio 1.2 Proviamo a convertire i numeri complessi dell'esempio precedente.

(1) Per $z_1 = \sqrt{3} + i$

$$|z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{4} = 2 \quad \text{e} \quad \theta_1 = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

quindi $z_1 = 2\, e^{i\frac{\pi}{6}}$.

(2) Per $z_2 = 2\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$$x_2 = 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \quad \text{e} \quad y_2 = 2\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}.$$

quindi $z_2 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

2. La somma

L'operazione di somma di due numeri complessi è piuttosto semplice: si tratta di scrivere gli addendi in forma cartesiana e di sommare separatamente le parti reali e le parti immaginarie.

Somma

Se $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ allora

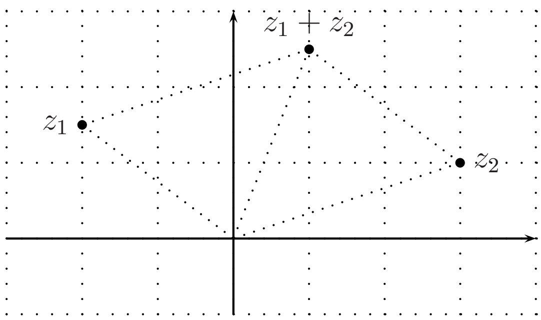
$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

— ◇ —

Esempio 2.1. Se $z_1 = -2 + \frac{3}{2}i$ e $z_2 = 3 + i$ allora

$$z_1 + z_2 = \left(-2 + \frac{3}{2}i\right) + (3 + i) = (-2 + 3) + i\left(\frac{3}{2} + 1\right) = 1 + \frac{5}{2}i$$

Nel piano la somma si può individuare costruendo un parallelogramma di lati z_1 e z_2.



3. Il prodotto

La definizione dell'operazione di prodotto tra due numeri complessi è un po' più delicata: per moltiplicare $z_1 = x_1 + iy_1$ per $z_2 = x_2 + iy_2$ ci comportiamo come il prodotto di due binomi:

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1(x_2 + iy_2) + iy_1(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2.$$

In questo modo la definizione di prodotto dipende dal risultato di $i \cdot i = i^2$. Dato che l'introduzione dei numeri complessi è motivata proprio dal desiderio di risolvere l'equazione $z^2 = -1$, "decidiamo" che il numero complesso i sia una delle soluzione cercate, ossia che $i^2 = -1$. Con questa scelta la definizione completa di prodotto diventa:

Prodotto in forma cartesiana

Se $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ allora

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Proviamo a riprendere i numeri dell'esempio precedente e a farne il prodotto.

— ⋄ —

Esempio 3.1 Se $z_1 = -2 + \frac{3}{2}i$ e $z_2 = 3 + i$ allora

$$z_1 \cdot z_2 = \left(-2 \cdot 3 - 1 \cdot \frac{3}{2}\right) + i\left(-2 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{3}{2}\right) = -\frac{15}{2} + \frac{5}{2}i$$

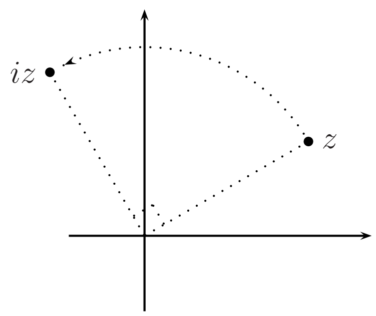
L'interpretazione geometrica del prodotto diventa più evidente se i fattori sono scritti in forma esponenziale:

> **Prodotto in forma esponenziale**
> Se $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$ e $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$ allora
> $$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

Dunque nel prodotto di due numeri complessi i moduli si moltiplicano mentre gli argomenti si sommano (e questo giustifica la scelta del simbolo esponenziale). Verifichiamo questa proprietà ricordando ancora una volta che $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= |z_1||z_2|\left((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\right) \\ &= |z_1||z_2|\left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right) \\ &= |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \end{aligned}$$

Un caso particolare molto interessante è il prodotto di un numero complesso z per i. Per quanto detto, la moltiplicazione per $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ corrisponde a una rotazione di 90 gradi in senso antiorario.

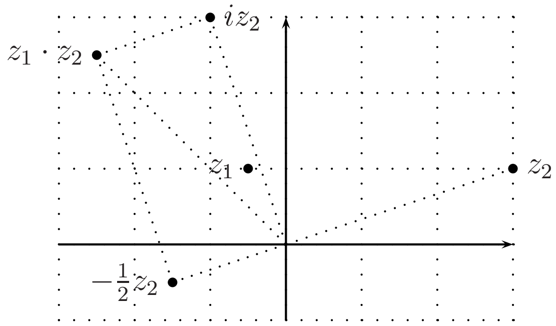


Proviamo a calcolare un altro prodotto descrivendo i passi dell'operazione nel piano complesso.

— ⋄ —

Esempio 3.2. Calcoliamo il prodotto di $z_1 = -\frac{1}{2} + i$ per $z_2 = 3 + i$:

$$z_1 \cdot z_2 = \left(-\frac{1}{2} + i\right) \cdot z_2 = -\frac{1}{2} z_2 + i z_2 = \left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2} i\right) + (3i - 1) = -\frac{5}{2} + \frac{5}{2} i$$

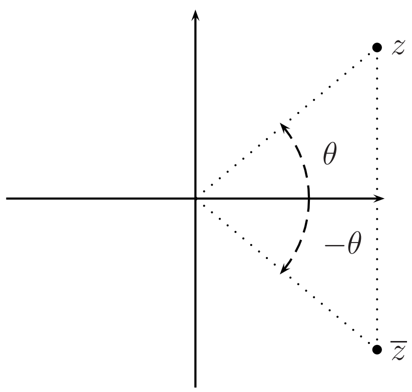


4. Il coniugato e il quoziente

Il *coniugato* $\overline{z}$ di un numero complesso $z = x + iy$ è definito nel modo seguente

$$\overline{z} = x - iy$$

e corrisponde al punto simmetrico di z rispetto all'asse reale. Quindi in forma esponenziale: se $z = |z|e^{i\theta}$ allora $\overline{z} = |z|e^{-i\theta}$



— ⋄ —

Esempio 4.1 Determiniamo l'insieme dei numeri complessi z tali che

$$z^2 + \overline{z}^2 = 0.$$

Riscriviamo l'equazione ponendo $z = x + iy$

$$(x + iy)^2 + (x - iy)^2 = (x^2 + 2ixy - y^2) + (x^2 - 2ixy - y^2) = 2(x^2 - y^2) = 0.$$

Quindi le coordinate dei punti del piano complesso $\mathbb{C}$ richiesti sono tali che

$$(x^2 - y^2) = (x + y)(x - y) = 0$$

ossia le rette $y = -x$ e $y = x$.

— ◇ —

Notiamo che

$$z \cdot \overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + ixy - ixy - i^2y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Questa relazione permette di calcolare il quoziente di due numeri complessi riconducendolo ad un prodotto:

QUOZIENTE
Se $z_2 \neq 0$ allora $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}.$$

— ◇ —

Esempio 4.2 Calcoliamo il quoziente di $z_1 = -1 + i$ e $z_2 = 3 + i$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{(-1+i)\cdot(3-i)}{3^2+1^2} = \frac{(-1+i)\cdot(3-i)}{10} = -\frac{1}{5} + i\frac{2}{5}.$$

Nel caso in cui i numeri siano in forma esponenziale, anche per il quoziente si ottiene una formula significativa: se $z_1 = |z_1|\, e^{i\theta_1}$ e $z_2 = |z_2|\, e^{i\theta_2}$ allora

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{|z_1|\, e^{i\theta_1} \cdot |z_2|\, e^{-i\theta_2}}{|z_2|^2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\, e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Dunque nel quoziente di due numeri complessi i moduli si dividono mentre gli argomenti si sottraggono.

— ◇ —

Esempio 4.3. Calcoliamo il quoziente di $z_1 = 2\, e^{i\frac{\pi}{3}}$ e $z_2 = 3\, e^{i\frac{\pi}{4}}$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}\, e^{i(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})} = \frac{2}{3}\, e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

5. Potenza di un numero complesso

Come abbiamo visto, la forma esponenziale risulta particolarmente comoda quando si devono effettuare prodotti o quozienti. Per esempio il calcolo del quadrato di un numero complesso $z = |z|e^{i\theta}$ si svolge nel seguente modo

$$z^2 = |z|\, e^{i\theta} \cdot |z|\, e^{i\theta} = |z|^2 e^{i(\theta+\theta)} = |z|^2 e^{i2\theta}.$$

Più in generale il calcolo della *potenza n-esima* con n intero positivo diventa

$$z^n = |z|^n e^{in\theta}$$

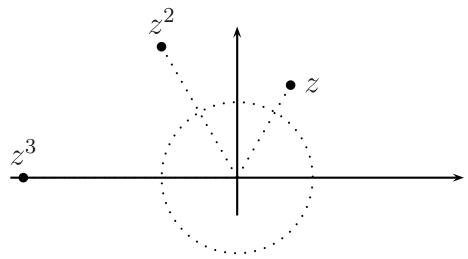
ossia bisogna elevare il modulo alla n e moltiplicare per n l'argomento (se $z = 0$ allora $z^n = 0$).

— ◇ —

Esempio 5.1 Calcoliamo le potenze di $z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{3}}$ per $n = 1, 2, 3$:

$$z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{3}}\ , z^2 = 2\, e^{i\frac{2\pi}{3}},\ z^3 = 2\sqrt{2}\, e^{i\pi} = -2\sqrt{2}.$$

Questi punti sono riportati nella figura seguente evidenziando la loro posizione rispetto alla circonferenza unitaria.



Ora facciamo un altro esempio, questa volta partendo da un numero in forma cartesiana.

— ◇ —

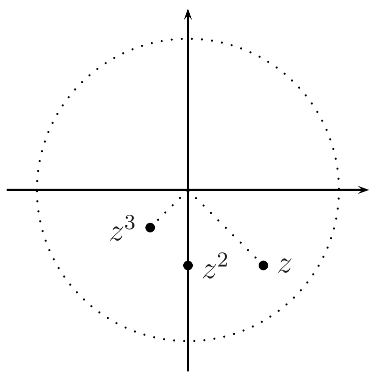
Esempio 5.2 Calcoliamo le potenze di $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ per $n = 1, 2, 3$. Per agevolare il calcolo riscriviamo il numero in forma esponenziale:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \theta = -\arccos\left(\frac{x}{|z|}\right) = -\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\pi}{4}.$$

Quindi determiniamo le potenze richieste

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}\ , z^2 = \frac{1}{2}\, e^{-i\frac{\pi}{2}} = -\frac{i}{2},\ z^3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\, e^{-3i\frac{\pi}{4}}.$$

Questi punti sono riportati nella figura seguente evidenziando la loro posizione rispetto alla circonferenza unitaria.



— ◇ —