

Soluzioni

1. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + x} dx.$$

R. Procediamo effettuando il cambio di variabile $t = \sqrt{x}$ ossia

$$x = t^2 \quad \text{e} \quad dx = 2t dt.$$

Quindi

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + x} dx = \int \frac{1}{t + t^2} 2t dt = 2 \int \frac{1}{1 + t} dt = 2 \log |1 + t| + c$$

Se torniamo alla variabile x otteniamo

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + x} dx = 2 \log(1 + \sqrt{x}) + c.$$

— \diamond —

2. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int (\log x)^2 dx.$$

R. Integriamo per parti

$$\begin{aligned} \int (\log x)^2 dx &= x(\log x)^2 - \int x d((\log x)^2) \\ &= x(\log x)^2 - \int x \frac{2 \log x}{x} dx \\ &= x(\log x)^2 - 2 \int \log x dx. \end{aligned}$$

Ricordando che una primitiva di $\log x$ è $x \log x - x$ si ha che

$$\int (\log x)^2 dx = x(\log x)^2 - 2(x \log x - x) + c = x((\log x)^2 - 2 \log x + 2) + c.$$

— \diamond —

3. Sia F la primitiva di

$$f(x) = e^{|x|}$$

tale che $F(1) = e$. Determinare $F(-1)$.

R. Per $x \geq 0$ abbiamo che

$$\int e^{|x|} dx = \int e^x dx = e^x + c_1,$$

mentre per $x \leq 0$

$$\int e^{|x|} dx = \int e^{-x} dx = -e^{-x} + c_2,$$

Le primitive di $e^{|x|}$ per $x \in \mathbb{R}$ sono funzioni continue e dunque devono coincidere nel punto di raccordo $x = 0$. Questo accade se $1 + c_1 = -1 + c_2$ ossia se $c_2 = 2 + c_1$. Quindi

$$\int e^{|x|} dx = \begin{cases} e^x + c & \text{per } x \geq 0 \\ -e^{-x} + 2 + c & \text{per } x < 0 \end{cases}.$$

La primitiva F tale che $F(1) = e^1 + c = e$ si ottiene per $c = 0$, dunque $F(-1) = -e^{-(-1)} + 2 + c = -e + 2$.

— \diamond —

4. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \sin(3x) e^{2x} dx.$$

R. Spostiamo il fattore e^{2x} nel differenziale e integriamo per parti per due volte

$$\begin{aligned} \int \sin(3x) e^{2x} dx &= \int \sin(3x) d\left(\frac{e^{2x}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \sin(3x) e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} d(\sin(3x)) \\ &= \frac{1}{2} \sin(3x) e^{2x} - \frac{3}{2} \int e^{2x} \cos(3x) dx \\ &= \frac{1}{2} \sin(3x) e^{2x} - \frac{3}{2} \int \cos(3x) d\left(\frac{e^{2x}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \sin(3x) e^{2x} - \frac{3}{4} \cos(3x) e^{2x} + \frac{3}{4} \int e^{2x} d(\cos(3x)) \\ &= \frac{1}{2} \sin(3x) e^{2x} - \frac{3}{4} \cos(3x) e^{2x} - \frac{9}{4} \int \sin(3x) e^{2x} dx. \end{aligned}$$

Ora che l'integrale rimasto coincide con quello iniziale conviene agire algebricamente spostando gli integrali tutti a sinistra e aggiungendo la costante arbitraria a destra:

$$\left(1 + \frac{9}{4}\right) \int \sin(3x) e^{2x} dx = \frac{1}{2} \sin(3x) e^{2x} - \frac{3}{4} \cos(3x) e^{2x} + c,$$

e quindi

$$\int \sin(3x) e^{2x} dx = \frac{1}{13} e^{2x} (2 \sin(3x) - 3 \cos(3x)) + c.$$

Si noti che la divisione di c per $13/4$ è comunque una costante arbitraria che indichiamo ancora con la lettera c .

— \diamond —

5. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int x \cos x e^x dx.$$

R. Spostiamo il fattore e^x nel differenziale e integriamo per parti

$$\begin{aligned} \int x \cos x e^x dx &= \int x \cos x d(e^x) = x \cos x e^x - \int e^x (\cos x - x \sin x) dx \\ &= x \cos x e^x - \int \cos x e^x dx + \int x \sin x e^x dx. \end{aligned}$$

Ora calcoliamo separatamente l'ultimo integrale

$$\begin{aligned} \int x \sin x e^x dx &= \int x \sin x d(e^x) = x \sin x e^x - \int e^x (\sin x + x \cos x) dx \\ &= x \sin x e^x - \int \sin x e^x dx - \int x \cos x e^x dx. \end{aligned}$$

Quindi riassumendo:

$$\int x \cos x e^x dx = \frac{1}{2} \left[x(\cos x + \sin x) e^x - \int \sin x e^x dx - \int \cos x e^x dx \right].$$

I due integrali rimasti si possono determinare con la stessa tecnica:

$$\begin{aligned} \int \cos x e^x dx &= \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) e^x + c_1 \\ \int \sin x e^x dx &= \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) e^x + c_2. \end{aligned}$$

Ora possiamo finalmente scrivere l'integrale cercato

$$\int x \cos x e^x dx = \frac{1}{2} [x(\cos x + \sin x) e^x - \sin x e^x] + c.$$

— \diamond —

6. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int x^8 \log x dx.$$

R. Procediamo per parti integrando prima il fattore x

$$\begin{aligned} \int x^8 \log x dx &= \int \log x d\left(\frac{x^9}{9}\right) = \frac{x^9}{9} \log x - \int \frac{x^9}{9} d(\log x) \\ &= \frac{x^9}{9} \log x - \frac{1}{9} \int x^9 \frac{1}{x} dx = \frac{x^9}{9} \log x - \frac{1}{9} \int x^8 dx \\ &= \frac{x^9}{9} \log x - \frac{x^9}{81} + c. \end{aligned}$$

— \diamond —

7. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{\sqrt{1 + \log x}}{x} dx.$$

R. Integrando prima il fattore $1/x$ otteniamo

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{1 + \log x}}{x} dx &= \int \sqrt{1 + \log x} d(\log x) \\ &= \int (1 + \log x)^{\frac{1}{2}} d(1 + \log x) = \frac{2}{3}(1 + \log x)^{3/2} + c. \end{aligned}$$

— \diamond —

8. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \arctan x dx.$$

R. Procediamo per parti

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \int x d(\arctan x) = x \arctan x - \int x \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Ora risolviamo a parte l'integrale rimasto

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{1+x^2} d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} d(1+x^2) = \frac{1}{2} \log(1+x^2) + c.$$

Quindi

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + c.$$

— \diamond —

9. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{x^2 + 4x + 5}{x^2 - 1} dx.$$

R. Possiamo intanto fare la divisione (i polinomi hanno lo stesso grado)

$$\frac{x^2 + 4x + 5}{x^2 - 1} = 1 + \frac{4x + 6}{x^2 - 1}$$

così

$$\int \frac{x^2 + 4x + 5}{x^2 - 1} dx = x + \int \frac{4x + 6}{x^2 - 1} dx.$$

Ora calcoliamo l'integrale rimasto. La fattorizzazione completa del polinomio al denominatore è

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

e dunque la decomposizione è

$$\frac{4x + 6}{x^2 - 1} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1}$$

dove A e B sono costanti da determinare. Svolgendo i calcoli

$$\frac{4x + 6}{x^2 - 1} = \frac{(A + B)x + (B - A)}{x^2 - 1}$$

e si ricava facilmente che $A = -1$ e $B = 5$. Quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 4x + 5}{x^2 - 1} dx &= x + \int \left(-\frac{1}{x + 1} + \frac{5}{x - 1} \right) dx \\ &= x - \log|x + 1| + 5 \log|x - 1| + c \\ &= x + \log \frac{|x - 1|^5}{|x + 1|} + c. \\ &\quad \text{— } \diamond \text{ —} \end{aligned}$$

10. Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2(x + 1)^2} dx.$$

R. Il polinomio al denominatore è già fattorizzato e la decomposizione è

$$\frac{1}{x^2(x + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x + 1} + \frac{D}{(x + 1)^2}$$

dove A , B , C e D sono costanti da determinare. Svolgiamo i calcoli

$$\frac{1}{x^2(x + 1)^2} = \frac{(A + C)x^3 + (2A + B + C + D)x^2 + (A + 2B)x + B}{x^2(x + 1)^2}$$

e dunque

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ 2A + B + C + D = 0 \\ A + 2B = 0 \\ B = 1 \end{cases}$$

da cui ricaviamo che $A = -2$, $B = 1$, $C = 2$ e $D = 1$. Quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2(x + 1)^2} dx &= \int \left(-\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x + 1} + \frac{1}{(x + 1)^2} \right) dx \\ &= -2 \log|x| - \frac{1}{x} + 2 \log|x + 1| - \frac{1}{x + 1} + c \\ &= 2 \log \left| \frac{x + 1}{x} \right| - \frac{1}{x} - \frac{1}{x + 1} + c. \end{aligned}$$

e l'integrale definito richiesto è

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)^2} dx = \left[2 \log \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right]_1^2 = 2 \log \frac{3}{4} + \frac{2}{3}.$$

— \diamond —

11. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 \frac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx.$$

R. Il polinomio al denominatore è già fattorizzato e la decomposizione è

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}.$$

Dato che la molteplicità degli zeri del denominatore è 1 possiamo determinare le costanti A , B e C nel seguente modo:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{t \rightarrow -1} (x+1) \cdot f(x) = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x - 1}{(x+2)(x+3)} = -1, \\ B &= \lim_{t \rightarrow -2} (x+2) \cdot f(x) = \lim_{t \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)(x+3)} = 1, \\ C &= \lim_{t \rightarrow -3} (x+3) \cdot f(x) = \lim_{t \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)(x+2)} = 1. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx &= \int_0^1 \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} \right) dx \\ &= [-\log |x+1| + \log |x+2| + \log |x+3|]_0^1 \\ &= \left[\log \left| \frac{(x+2)(x+3)}{x+1} \right| \right]_0^1 = \log 6 - \log 6 = 0. \end{aligned}$$

— \diamond —

12. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 \frac{x^2 - 2x + 5}{(1+x^2)^2} dx.$$

R. Il polinomio al denominatore è già fattorizzato e la decomposizione è

$$\frac{x^2 - 2x + 5}{(1+x^2)^2} = \frac{Ax + B}{1+x^2} + \frac{Cx + D}{(1+x^2)^2}$$

dove A , B , C e D sono costanti da determinare. Svolgiamo i calcoli

$$\frac{x^2 - 2x + 5}{(1 + x^2)^2} = \frac{Ax^3 + Bx^2 + (A + C)x + (B + D)}{(1 + x^2)^2}$$

e dunque

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \\ A + C = -2 \\ B + D = 5 \end{cases}$$

da cui ricaviamo che $A = 0$, $B = 1$, $C = -2$ e $D = 4$. Quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 2x + 5}{(1 + x^2)^2} dx &= \int \left(\frac{1}{1 + x^2} - \frac{2x}{(1 + x^2)^2} + \frac{4}{(1 + x^2)^2} \right) dx \\ &= \arctan x + \frac{1}{1 + x^2} + 4 \int \frac{1}{(1 + x^2)^2} dx. \end{aligned}$$

Calcoliamo l'integrale che rimane per parti

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1 + x^2)^2} dx &= \int \frac{1 + x^2 - x^2}{(1 + x^2)^2} dx \\ &= \int \left(\frac{1}{1 + x^2} - x \cdot \frac{x}{(1 + x^2)^2} \right) dx \\ &= \arctan x + \frac{1}{2} \int x d \left(\frac{1}{1 + x^2} \right) \\ &= \arctan x + \frac{x}{2(1 + x^2)} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 + x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \arctan x + \frac{x}{2(1 + x^2)} + c. \end{aligned}$$

Così

$$\int \frac{x^2 - 2x + 5}{(1 + x^2)^2} dx = 3 \arctan x + \frac{1 + 2x}{1 + x^2} + c$$

e l'integrale definito richiesto è

$$\int_0^1 \frac{x^2 - 2x + 5}{(1 + x^2)^2} dx = \left[3 \arctan x + \frac{1 + 2x}{1 + x^2} \right]_0^1 = \frac{3\pi + 2}{4}.$$

— \diamond —

13. Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^e \frac{1}{x(3 + \log x)^2} dx.$$

R. Per $x > 0$, integriamo prima $1/x$ e poi aggiungiamo 3 nel differenziale

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(3 + \log x)^2} dx &= \int \frac{1}{(3 + \log x)^2} d(\log x) \\ &= \int \frac{1}{(3 + \log x)^2} d(3 + \log x) = -\frac{1}{3 + \log x} + c.\end{aligned}$$

Quindi

$$\int_1^e \frac{1}{x(3 + \log x)^2} dx = \left[-\frac{1}{3 + \log x} \right]_1^e = \frac{1}{12}.$$

— \diamond —

14. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

R. Effettuiamo il cambio di variabile

$$x = \sin t \quad \text{e} \quad dx = \cos t dt.$$

Invece di calcolare prima la primitiva e poi l'integrale definito proviamo a trasformare direttamente l'intervallo di integrazione:

$$x \in \left[0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \xrightarrow{t=\arcsin x} t \in \left[0, \frac{\pi}{3} \right].$$

Quindi

$$\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^3 t}{\cos t} \cos t dt = \int_0^{\pi/3} \sin^3 t dt.$$

Ora proseguiamo il calcolo osservando che $\sin^3 t = \sin t (1 - \cos^2 t)$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/3} \sin^3 t dt &= \int_0^{\pi/3} \sin t (1 - \cos^2 t) dt = \int_0^{\pi/3} (1 - \cos^2 t) d(-\cos t) \\ &= \int_0^{\pi/3} (\cos^2 t - 1) d(\cos t) = \left[\frac{\cos^3 t}{3} - \cos t \right]_0^{\pi/3} = \frac{5}{24}.\end{aligned}$$

— \diamond —

15. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x dx.$$

R. Calcoliamo prima l'integrale indefinito con il metodo dell'integrazione per parti

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \, dx &= \int \sin x \, d(-\cos x) = -\sin x \cos x - \int (-\cos x) \, d(\sin x) \\ &= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx.\end{aligned}$$

Per continuare osserviamo che $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Quindi

$$\int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx = -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x \, dx.$$

Ora possiamo esplicitare l'integrale che stiamo cercando

$$2 \int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x + x + c.$$

Quindi

$$\int_0^\pi \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} [-\sin x \cos x + x]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

— \diamond —

16. Calcolare l'integrale definito

$$\int_{-1}^1 \frac{\tan(x/2) + x^2}{2x^2 - 8} \, dx.$$

R. Possiamo dividere l'integrale in due parti

$$\int_{-1}^1 \frac{\tan(x/2)}{2x^2 - 8} \, dx + \int_{-1}^1 \frac{x^2}{2x^2 - 8} \, dx.$$

Nel primo integrale la funzione è dispari e l'intervallo è simmetrico rispetto a 0 e quindi

$$\int_{-1}^1 \frac{\tan(x/2)}{2x^2 - 8} \, dx = 0.$$

Nel secondo integrale la funzione è pari e l'intervallo è simmetrico rispetto a 0 e quindi

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2}{2x^2 - 8} \, dx = 2 \int_0^1 \frac{x^2}{2x^2 - 8} \, dx = \int_0^1 \frac{x^2}{x^2 - 4} \, dx.$$

Continuiamo lo svolgimento del secondo integrale

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2}{x^2 - 4} \, dx &= \int_0^1 \left(1 + \frac{4}{x^2 - 4} \right) \, dx = [x]_0^1 + \int_0^1 \frac{4}{(x-2)(x+2)} \, dx \\ &= 1 + \int_0^1 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) \, dx = 1 + \left[\log \left| \frac{x-2}{x+2} \right| \right]_0^1 = 1 - \log 3.\end{aligned}$$

Dunque

$$\int_{-1}^1 \frac{\tan(x/2) + x^2}{2x^2 - 8} \, dx = 1 - \log 3.$$

— \diamond —

17. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3 \sin^2 x + \cos^2 x} dx.$$

R. Raccogliendo $\cos^2 x$ al denominatore, l'integrale diventa

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3 \sin^2 x + \cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3 \tan^2 x + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx.$$

Quindi integriamo il fattore $1/\cos^2 x$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3 \sin^2 x + \cos^2 x} dx &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 x + \frac{1}{3}} d(\tan x) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \left[\arctan(\sqrt{3} \tan x) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

— \diamond —

18. Sia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x 2^x}{|x|} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Calcolare l'integrale definito

$$\int_{-1}^2 f(x) dx.$$

R. La funzione da integrare è continua in $[-1, 2] \setminus \{0\}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

e quindi conviene dividere l'intervallo di integrazione rispetto al punto di discontinuità

$$\int_{-1}^2 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = - \int_{-1}^0 2^x dx + \int_0^2 2^x dx.$$

Si verifica facilmente che

$$\int 2^x dx = \frac{2^x}{\log 2} + c$$

e così l'integrale da calcolare diventa

$$\int_{-1}^2 f(x) dx = -\frac{1}{\log 2} [2^x]_{-1}^0 + \frac{1}{\log 2} [2^x]_0^2 = \frac{5}{2 \log 2}.$$

— \diamond —

19. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 \arcsin x \, dx.$$

R. Cominciamo integrando per parti:

$$\int_0^1 \arcsin x \, dx = [x \arcsin x]_0^1 - \int_0^1 x \, d(\arcsin x) = \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$$

Ora calcoliamo a parte l'integrale che manca

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, d(x^2).$$

Quindi "aggiustiamo" il differenziale in modo che diventi uguale a $1-x^2$:

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \, d(1-x^2) = -\frac{1}{2} \left[2(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \right]_0^1 = 1.$$

Dunque

$$\int_0^1 \arcsin x \, dx = \frac{\pi}{2} - 1.$$

— \diamond —

20. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{16} \frac{1}{x + 3\sqrt{x} + 2} \, dx.$$

R. Qui conviene fare la sostituzione $t = \sqrt{x}$ così $t^2 = x$, $2t \, dt = dx$. Trasformando anche l'intervallo di integrazione otteniamo

$$\int_0^{16} \frac{1}{x + 3\sqrt{x} + 2} \, dx = \int_0^4 \frac{2t}{t^2 + 3t + 2} \, dt.$$

Ora integriamo la funzione razionale: la decomposizione in questo caso è

$$\frac{2t}{t^2 + 3t + 2} = \frac{2t}{(t+1)(t+2)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2}$$

dove A e B sono costanti da determinare. Svolgendo i calcoli

$$\frac{2t}{t^2 + 3t + 2} = \frac{(A+B)t + (2A+B)}{t^2 + 3t + 2}$$

e si ricava facilmente che $A = -2$ e $B = 4$. Quindi

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{2t}{t^2 + 3t + 2} \, dt &= \int_0^4 \left(-\frac{2}{t+1} + \frac{4}{t+2} \right) \, dt \\ &= 2 \left[\log \frac{(t+2)^2}{|t+1|} \right]_0^4 = 2 \log \frac{36}{5} - 2 \log 4 = 2 \log \frac{9}{5}. \end{aligned}$$

— \diamond —

21. Calcolare l'integrale definito

$$\int_{-1/4}^{1/4} \frac{2\pi|x|}{(\cos(\pi x))^2} dx.$$

R. Dopo aver osservato che la funzione da integrare è pari e l'intervallo è simmetrico rispetto a 0, integriamo per parti

$$\begin{aligned} \int_{-1/4}^{1/4} \frac{2\pi|x|}{(\cos(\pi x))^2} dx &= 4\pi \int_0^{1/4} \frac{x}{(\cos(\pi x))^2} dx = 4 \int_0^{1/4} x d(\tan(\pi x)) \\ &= 4 [x \tan(\pi x)]_0^{1/4} - 4 \int_0^{1/4} \tan(\pi x) dx \\ &= 1 - \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/4} \tan x dx. \end{aligned}$$

Per quanto visto

$$\int \tan x dx = -\log |\cos x| + c$$

e quindi

$$\int_0^{\pi/4} \tan x dx = [-\log |\cos x|]_0^{\pi/4} = \frac{\log 2}{2}.$$

Quindi l'integrale richiesto vale

$$\int_{-1/4}^{1/4} \frac{2\pi|x|}{(\cos(\pi x))^2} dx = 1 - \frac{2 \log 2}{\pi}.$$

— \diamond —

22. Calcolare l'integrale definito

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(3x) \cos(4x) dx.$$

R. Operiamo utilizzando il metodo dell'integrazione per parti

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(3x) \cos(4x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(3x) d\left(\frac{\sin(4x)}{4}\right) \\ &= \frac{1}{4} [\cos(3x) \sin(4x)]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(4x) d(\cos(3x)) \\ &= \frac{3}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(3x) \sin(4x) dx. \end{aligned}$$

In modo simile

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(3x) \sin(4x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(3x) d\left(-\frac{\cos(4x)}{4}\right) \\ &= -\frac{1}{4} [\sin(3x) \cos(4x)]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(4x) d(\sin(3x)) \\ &= \frac{3}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(3x) \cos(4x) dx. \end{aligned}$$

Allora

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(3x) \cos(4x) dx = \frac{9}{16} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(3x) \cos(4x) dx$$

ossia l'integrale da determinare vale 0.

— \diamond —

23. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^e \min(x, 1/x) \log x dx.$$

R. Siccome per $x \in (0, e]$

$$\min(x, 1/x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in (0, 1] \\ 1/x & \text{se } x \in (1, e] \end{cases}$$

l'integrale diventa

$$\int_0^e \min(x, 1/x) \log x dx = \int_0^1 x \log x dx + \int_1^e \frac{\log x}{x} dx.$$

Per il primo integrale si ha che

$$\int_0^1 x \log x dx = \int_0^1 \log x d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \left[\frac{x^2}{2} \log x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx = \left[-\frac{x^2}{4}\right]_0^1 = -\frac{1}{4}.$$

Mentre per il secondo

$$\int_1^e \frac{\log x}{x} dx = \int_1^e \log x d(\log x) = \left[\frac{(\log x)^2}{2}\right]_1^e = \frac{1}{2}.$$

Quindi l'integrale richiesto vale $-1/4 + 1/2 = 1/4$.

— \diamond —

24. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{e^4} \max(\log x, \log(1/x)) dx.$$

R. Prima osserviamo che $\log(1/x) = -\log x$. Quindi, dato che per $x \in (0, e^4]$

$$\max(\log x, -\log x) = \begin{cases} -\log x & \text{se } x \in (0, 1] \\ \log x & \text{se } x \in (1, e^4] \end{cases}.$$

L'integrale diventa

$$\int_0^{e^4} \max(\log x, \log(1/x)) dx = -\int_0^1 \log x dx + \int_1^{e^4} \log x dx$$

Per il primo integrale si ha che

$$-\int_0^1 \log x dx = [x \log x - x]_1^0 = 1.$$

Mentre per il secondo

$$\int_1^{e^4} \log x dx = [x \log x - x]_1^{e^4} = 3e^4 + 1.$$

Quindi l'integrale richiesto vale $2 + 3e^4$.

— \diamond —

25. Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^6 \min(3 - |x - 3|, 2) dx.$$

R. Notiamo che $3 - |x - 3| \geq 2$ se e solo se $|x - 3| \leq 1$ ossia per $x \in [2, 4]$.

Quindi

$$\min(3 - |x - 3|, 2) = \begin{cases} 3 - |x - 3| & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus [2, 4] \\ 2 & \text{se } x \in [2, 4] \end{cases}.$$

L'integrale allora si svolge nel seguente modo

$$\begin{aligned} \int_1^6 \min(3 - |x - 3|, 2) dx &= \int_1^2 (3 - |x - 3|) dx + \int_2^4 2 dx + \int_4^6 (3 - |x - 3|) dx \\ &= \int_1^2 (3 - (3 - x)) dx + 4 + \int_4^6 (3 - (x - 3)) dx \\ &= \int_1^2 x dx + 4 + \int_4^6 (6 - x) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 + 4 + 12 - \left[\frac{x^2}{2} \right]_4^6 = \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

— ◇ —

26. Calcolare il limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^4} \int_0^{t^2} \arcsin(3x) dx.$$

R. Si tratta del limite di un rapporto di infinitesimi. Procediamo applicando il teorema di de l'Hôpital. Per calcolare la derivata del numeratore utilizziamo il teorema fondamentale del calcolo integrale: se $F(x)$ è una primitiva della funzione $\arcsin(3x)$ allora $F'(x) = \arcsin(3x)$.

Dunque la derivata del numeratore è

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^{t^2} \arcsin(3x) dx \right) = \frac{d}{dt} (F(t^2) - F(0)) = F'(t^2)(t^2)' = 2t \arcsin(3t^2)$$

mentre la derivata del denominatore è $(t^4)' = 4t^3$.

Dato che $\arcsin t \sim t$ per t che tende a 0, abbiamo che

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^4} \int_0^{t^2} \arcsin x dx \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t \arcsin(3t^2)}{4t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{6t^3}{4t^3} = \frac{3}{2}.$$

— ◇ —

27. Calcolare il limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^3} \int_t^{t^2} \sin^2(2x) dx.$$

R. Appliciamo il teorema di de l'Hôpital. Se $F(x)$ è una primitiva della funzione $\sin^2(2x)$ allora la derivata del numeratore è

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_t^{t^2} \sin^2(2x) dx \right) &= \frac{d}{dt} (F(t^2) - F(t)) = \sin^2(2t^2) (t^2)' - \sin^2(2t) (t)' \\ &= 2t \sin^2(2t^2) - \sin^2(2t). \end{aligned}$$

mentre quella del denominatore è $(t^3)' = 3t^2$.

Dato che $\sin t \sim t$ per t che tende a 0, abbiamo che

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^3} \int_t^{t^2} \sin^2(2x) dx \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t \sin^2(2t^2) - \sin^2(2t)}{3t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{8t^5 - 4t^2}{3t^2} = -\frac{4}{3}.$$

— ◇ —

28. Calcolare il limite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} \int_{2e^t}^{5e^t} \frac{1}{\log x} dx.$$

R. Per applicare efficacemente il teorema di de l'Hôpital conviene risistemare i termini in modo da avere al numeratore solo l'integrale:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\int_{2e^t}^{5e^t} \frac{1}{\log x} dx \right) / \left(\frac{e^t}{t} \right).$$

La forma indeterminata è ∞/∞ . Se $F(x)$ è una primitiva della funzione $1/\log x$ allora la derivata del numeratore è

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_{2e^t}^{5e^t} \frac{1}{\log x} dx \right) &= \frac{d}{dt} (F(5e^t) - F(2e^t)) = \frac{5e^t}{\log(5e^t)} - \frac{2e^t}{\log(2e^t)} \\ &= e^t \left(\frac{5}{t + \log 5} - \frac{2}{t + \log 2} \right) = e^t \cdot \frac{3t + 5 \log 2 - 2 \log 5}{(t + \log 5)(t + \log 2)} \sim \frac{3e^t}{t} \end{aligned}$$

mentre quella del denominatore è

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{e^t}{t} \right) = -\frac{e^t}{t^2} + \frac{e^t}{t} \sim \frac{e^t}{t}$$

. Quindi il limite richiesto è uguale a 3.

— \diamond —

29. Calcolare al variare di $\alpha > 0$ il limite

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^\alpha} \int_{t^2}^{3t^2} \frac{e^{x^2} + e^{-x^2} - 2}{\sin(x^3)} dx.$$

R. Per x che tende a 0 la funzione

$$f(x) = \frac{e^{x^2} + e^{-x^2} - 2}{\sin(x^3)} \sim \frac{(1 + x^2 + x^4/2) + (1 - x^2 + x^4/2) - 2}{x^3} \sim x.$$

Quindi $f(x)$ è integrabile vicino a 0 e sia $F(x)$ una sua primitiva. Dato che il limite richiesto è un rapporto di infinitesimi possiamo applicare il teorema di de l'Hôpital. La derivata del numeratore è

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{t^2}^{3t^2} f(x) dx \right) = \frac{d}{dt} (F(3t^2) - F(t^2)) = f(3t^2) (3t^2)' - f(t^2) (t^2)' = f(3t^2) 6t - f(t^2) 2t.$$

mentre quella del denominatore è $(t^\alpha)' = \alpha t^{\alpha-1}$.

Dato che per t che tende a 0 $f(t) \sim t$, abbiamo che

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^\alpha} \int_{t^2}^{3t^2} \frac{e^{x^2} + e^{-x^2} - 2}{\sin(x^3)} dx &\stackrel{\text{H}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(3t^2) 6t - f(t^2) 2t}{\alpha t^{\alpha-1}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{18t^3 - 2t^3}{\alpha t^{\alpha-1}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{16}{\alpha} t^{4-\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 < \alpha < 4 \\ 4 & \text{per } \alpha = 4 \\ +\infty & \text{per } \alpha > 4 \end{cases}. \end{aligned}$$

— \diamond —**30.** Calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^1 \log x \, dx.$$

R. Come abbiamo già visto

$$\int \log x \, dx = x \log x - x + c.$$

Quindi

$$\int_0^1 \log x \, dx = [x \log x - x]_0^1 = -1 - \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \log x - x) = -1$$

— \diamond —**31.** Calcolare l'integrale improprio

$$\int_1^2 \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}x)} \, dx.$$

R. La funzione data è continua e negativa sull'intervallo $(1, 2]$. Prima di provare a calcolare una primitiva verifichiamo se la funzione è integrabile sull'intervallo. Possiamo utilizzare il criterio del confronto asintotico perché la funzione ha segno costante nell'intervallo di integrazione. Per $x \rightarrow 1^+$

$$\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}x)} = \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}(x-1) + \frac{\pi}{2})} = -\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2}(x-1))} \sim -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{x-1}.$$

Quindi l'integrale diverge a $-\infty$ (il segno meno è dovuto al fatto che la funzione $1/\cos(\pi x/2)$ è negativa in un intorno di 1^+).

— \diamond —**32.** Calcolare l'integrale improprio

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^3} \, dx.$$

R. Integriamo prima il fattore $1/x$

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^3} \, dx = \int_e^{+\infty} \frac{1}{(\log x)^3} d(\log x) = \left[-\frac{1}{2(\log x)^2} \right]_e^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

— \diamond —

33. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\frac{(\sin x)^a}{x^3 (x+5)^4}$$

è integrabile sull'intervallo $(0, 2)$.

R. La funzione data è continua sull'intervallo $(0, 2]$ e quindi dobbiamo fare un'analisi asintotica solo per $x \rightarrow 0^+$

$$\frac{(\sin x)^a}{x^3 (x+5)^4} \sim \frac{x^a}{x^3 5^4} \sim \frac{1}{5^4} \cdot \frac{1}{x^{3-a}}$$

Dunque la funzione è integrabile sull'intervallo $(0, 2)$ se e solo se $\alpha = 3 - a < 1$ ossia se $a > 2$.

— \diamond —

34. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\frac{1 - e^{-x}}{x^a |x-1|^{4a}}$$

è integrabile sull'intervallo $(0, +\infty)$.

R. Dato che il dominio della funzione da integrare è $(0, +\infty) \setminus \{1\}$, i punti da indagare sono tre: 0 , 1 e $+\infty$.

Per $x \rightarrow 0^+$

$$\frac{1 - e^{-x}}{x^a |x-1|^{4a}} \sim \frac{x}{x^a} = \frac{1}{x^{a-1}}$$

quindi, per l'integrabilità, $\alpha = a - 1 < 1$ ossia $a < 2$.

Per $x \rightarrow 1$

$$\frac{1 - e^{-x}}{x^a |x-1|^{4a}} \sim \left(1 - \frac{1}{e}\right) \cdot \frac{1}{|x-1|^{4a}}$$

quindi, per l'integrabilità, $\alpha = 4a < 1$ ossia $a < \frac{1}{4}$.

Per $x \rightarrow +\infty$

$$\frac{1 - e^{-x}}{x^a |x-1|^{4a}} \sim \frac{1}{x^a x^{4a}} \sim \frac{1}{x^{5a}}$$

quindi, per l'integrabilità, $\alpha = 5a > 1$ ossia $a > \frac{1}{5}$.

Unendo le tre condizioni abbiamo che $\frac{1}{5} < a < \frac{1}{4}$.

— \diamond —

35. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\frac{1}{\sqrt{x} |\log(e^x - 1)|^a}$$

è integrabile sull'intervallo $(0, +\infty)$.

R. Siccome il dominio della funzione da integrare è $(0, +\infty) \setminus \{\log 2\}$, dobbiamo fare l'analisi asintotica in 0 , $\log 2$ e $+\infty$.

Per $x \rightarrow 0^+$ abbiamo

$$\frac{1}{\sqrt{x} |\log(e^x - 1)|^a} \sim \frac{1}{x^{1/2} |\log x|^a}$$

quindi, dato che $\alpha = 1/2 < 1$, la condizione di l'integrabilità "vicino" a 0^+ è soddisfatta per qualunque a .

Per $x \rightarrow \log 2$ abbiamo che l'infinitesimo di riferimento è $(x - \log 2)$ e

$$\log(e^x - 1) = \log(2e^{x - \log 2} - 1) \sim \log(2(1 + (x - \log 2)) - 1) = \log(1 + 2(x - \log 2)) \sim 2(x - \log 2).$$

Così

$$\frac{1}{\sqrt{x} |\log(e^x - 1)|^a} \sim \frac{1}{\sqrt{\log 2} |2(x - \log 2)|^a} = \frac{1}{2^a \sqrt{\log 2}} \cdot \frac{1}{|x - \log 2|^a}$$

quindi la condizione di l'integrabilità "vicino" a $\log 2$ è soddisfatta per $\alpha = a < 1$.

Per $x \rightarrow +\infty$ abbiamo

$$\frac{1}{\sqrt{x} |\log(e^x - 1)|^a} \sim \frac{1}{x^{1/2} x^a} = \frac{1}{x^{a+1/2}}$$

dunque la funzione è integrabile "verso" $+\infty$ se $\alpha = a + 1/2 > 1$ ossia se $a > 1/2$.

Quindi la condizione di integrabilità sull'intervallo $(0, +\infty)$ è: $1/2 < a < 1$.

— \diamond —

36. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\frac{(x^2 - 1)^a}{\log x \sqrt{3 - x}}$$

è integrabile sull'intervallo $(1, 3)$.

R. I punti da indagare sono due: 1 e 3 .

Per $x \rightarrow 1^+$ abbiamo

$$\frac{(x^2 - 1)^a}{\log x \sqrt{3 - x}} = \frac{((x - 1)(x + 1))^a}{\log(1 + (x - 1)) \sqrt{3 - x}} \sim \frac{2^a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(x - 1)^a}{x - 1} = \frac{2^a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{(x - 1)^{1-a}}$$

quindi, per l'integrabilità, $\alpha = 1 - a < 1$ ossia $a > 0$.

Per $x \rightarrow 3^-$ abbiamo

$$\frac{(x^2 - 1)^a}{\log x \sqrt{3 - x}} \sim \frac{8^a}{\log 3} \cdot \frac{1}{(3 - x)^{1/2}}$$

quindi è integrabile "vicino" a 3 perché $\frac{1}{2} < 1$.

Così l'unica condizione per l'integrabilità sull'intervallo $(1, 3)$ è: $a > 0$.

— \diamond —

37. Determinare per quali valori di $a > 0$ la funzione

$$\frac{\sqrt[4]{1+x^a} - 1}{\log(3e^{x^2} + 2) - \log 5}$$

è integrabile sull'intervallo $(0, +\infty)$.

R. I punti da indagare sono due: 0 e $+\infty$.

Per $x \rightarrow 0^+$ abbiamo

$$\frac{\sqrt[4]{1+x^a} - 1}{\log(3e^{x^2} + 2) - \log 5} = \frac{\sqrt[4]{1+x^a} - 1}{\log(1 + 3(e^{x^2} - 1)/5)} \sim \frac{x^a/4}{3(e^{x^2} - 1)/5} \sim \frac{x^a/4}{3x^2/5} \sim \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{x^{2-a}}$$

quindi, per l'integrabilità, $\alpha = 2 - a < 1$ ossia $a > 1$.

Per $x \rightarrow +\infty$ abbiamo

$$\frac{\sqrt[4]{1+x^a} - 1}{\log(3e^{x^2} + 2) - \log 5} \sim \frac{x^{a/4}}{\log(3e^{x^2})} = \frac{x^{a/4}}{x^2 + \log 3} \sim \frac{1}{x^{2-(a/4)}}$$

quindi è integrabile verso $+\infty$ se $\alpha = 2 - (a/4) > 1$ ossia $a < 4$.

Così la condizione per l'integrabilità sull'intervallo $(0, +\infty)$ è: $1 < a < 4$.

— \diamond —

38. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\frac{1 - e^{-1/(1+x^2)}}{\sqrt[3]{x} |\log x|^a}$$

è integrabile sull'intervallo $(0, +\infty)$.

R. Il dominio della funzione da integrare è $(0, +\infty) \setminus \{1\}$ e dunque dobbiamo fare l'analisi asintotica in 0 , 1 e $+\infty$.

Per $x \rightarrow 0^+$ abbiamo

$$\frac{1 - e^{-1/(1+x^2)}}{\sqrt[3]{x} |\log x|^a} \sim \frac{1 - e^{-1}}{x^{1/3} |\log x|^a}$$

quindi, dato che $\alpha = 1/3 < 1$, la condizione di l'integrabilità "vicino" a 0^+ è soddisfatta per qualunque a .

Per $x \rightarrow 1$ abbiamo che l'infinitesimo di riferimento è $(x - 1)$ e

$$\frac{1 - e^{-1/(1+x^2)}}{\sqrt[3]{x} |\log x|^a} = \frac{1 - e^{-1/(1+x^2)}}{\sqrt[3]{x} |\log(1 + (x - 1))|^a} \sim \frac{1 - e^{-1/2}}{|x - 1|^a}$$

quindi la condizione di l'integrabilità "vicino" a 1 è soddisfatta per $\alpha = a < 1$.

Per $x \rightarrow +\infty$ l'esponente $-1/(1+x^2)$ è infinitesimo e dunque

$$e^{-1/(1+x^2)} \sim 1 + \left(-\frac{1}{1+x^2}\right) \sim 1 - \frac{1}{x^2}.$$

Allora

$$\frac{1 - e^{-1/(1+x^2)}}{\sqrt[3]{x} |\log x|^a} \sim \frac{1/x^2}{x^{1/3} |\log x|^a} = \frac{1}{x^{7/3} |\log x|^a}$$

e la funzione è integrabile “verso” $+\infty$ se $\alpha = 7/3 > 1$ ossia per qualunque a . Quindi la condizione di integrabilità sull’intervallo $(0, +\infty)$ è: $a < 1$.

— \diamond —

39. Determinare per quali valori di $a > 0$ la funzione

$$\frac{\log(1+x^2) - (\log(1+x))^2}{x^a \cdot \sqrt{\sin x} \cdot (\pi-x)^{1/a}}$$

è integrabile sull’intervallo $(0, \pi)$.

R. Dobbiamo fare l’analisi asintotica in 0^+ , π^- . Per $x \rightarrow 0^+$ abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\log(1+x^2) - (\log(1+x))^2}{x^a \cdot \sqrt{\sin x} \cdot (\pi-x)^{1/a}} &\sim \frac{x^2 - x^4/2 + o(x^4) - (x - x^2/2 + o(x^2))^2}{x^a \cdot x^{1/2} \cdot \pi^{1/a}} \\ &\sim \frac{x^3}{\pi^{1/a} x^{a+1/2}} = \frac{1}{\pi^{1/a}} \cdot \frac{1}{x^{a-5/2}} \end{aligned}$$

quindi, la condizione di integrabilità $\alpha = a - 5/2 < 1$ è soddisfatta per $a < 7/2$.

Per $x \rightarrow \pi^-$ abbiamo che l’infinitesimo di riferimento è $(\pi - x)$ e

$$\frac{\log(1+x^2) - (\log(1+x))^2}{x^a \cdot \sqrt{\sin x} \cdot (\pi-x)^{1/a}} \sim \frac{\log(1+\pi^2) - (\log(1+\pi))^2}{\pi^a \cdot (\pi-x)^{1/2+1/a}}$$

quindi la condizione di integrabilità $\alpha = 1/2 + 1/a < 1$ è soddisfatta per $a > 2$.

Dunque la funzione data è integrabile sull’intervallo $(0, +\infty)$ se e solo se $2 < a < 7/2$.

— \diamond —

40. Calcolare l’integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(3 + (\log x)^2)} dx.$$

R. La funzione data è continua in $[1, +\infty)$ e se facciamo un’analisi asintotica per $x \rightarrow +\infty$ vediamo subito che la funzione data è integrabile:

$$\frac{1}{x(3 + (\log x)^2)} \sim \frac{1}{x(\log x)^2}.$$

Per calcolare l’integrale dobbiamo prima determinare una primitiva.

Per $x > 0$

$$\int \frac{1}{x(3 + (\log x)^2)} dx = \int \frac{1}{3 + (\log x)^2} d(\log x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\log x}{\sqrt{3}}\right) + c$$

Quindi

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(3 + (\log x)^2)} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\arctan\left(\frac{\log x}{\sqrt{3}}\right) \right]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

— \diamond —

41. Calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x} + (\sqrt{x})^3} dx.$$

R. La funzione data è continua e positiva in $(0, +\infty)$. Inoltre su questo intervallo è integrabile per il criterio del confronto asintotico:

per $x \rightarrow 0^+$

$$\frac{1}{\sqrt{x} + (\sqrt{x})^3} \sim \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}},$$

per $x \rightarrow +\infty$

$$\frac{1}{\sqrt{x} + (\sqrt{x})^3} \sim \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

Per il calcolo del valore dell'integrale improprio determiniamo una primitiva: poniamo $t = \sqrt{x}$, così $t^2 = x$, $2t dt = dx$ e

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x} + (\sqrt{x})^3} dx &= \int \frac{2t}{t + t^3} dt = 2 \int \frac{1}{1 + t^2} dt \\ &= 2 \arctan(t) + c = 2 \arctan(\sqrt{x}) + c. \end{aligned}$$

Ora valutiamo la primitiva agli estremi di integrazione

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x} + (\sqrt{x})^3} dx = 2 [\arctan(\sqrt{x})]_0^{+\infty} = \pi.$$

— \diamond —

42. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\frac{(\log x)^3}{(x-1)^a (\log(1+x^x))^5}$$

è integrabile sull'intervallo $(1, +\infty)$.

R. La funzione data è continua e positiva in $(1, +\infty)$. e dunque i punti da esaminare sono 1^+ e $+\infty$. Per $x \rightarrow 1^+$

$$\frac{(\log x)^3}{(x-1)^a (\log(1+x^x))^5} \sim \frac{(x-1)^3}{(x-1)^a (\log 2)^5} = \frac{1}{(\log 2)^5} \cdot \frac{1}{(x-1)^{a-3}}$$

e quindi l'integrale converge "vicino" a 1^+ se $a-3 < 1$ ossia se $a < 4$.

Per $x \rightarrow +\infty$

$$\frac{(\log x)^3}{(x-1)^a (\log(1+x^x))^5} \sim \frac{(\log x)^3}{x^a (\log(x^x))^5} = \frac{1}{x^{a+5} (\log x)^2}$$

e quindi l'integrale converge "verso" $+\infty$ se $a+5 \geq 1$ ossia se $a \geq -4$.

Così la condizione di integrabilità cercata è $a \in [-4, 4)$.

— \diamond —

43. Se

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

quanto vale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+2x} dx?$$

R. Dato che la funzione e^{-x^2} è pari

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

Inoltre $-x^2 + 2x = -(x-1)^2 + 1$ e quindi ponendo $t = x-1$ otteniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+2x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2+1} dt = e \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = e\sqrt{\pi}.$$