Soluzioni

1. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + 2y(x) = 3e^{-2x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

R. Troviamo la soluzione generale in $I = \mathbb{R}$. Una primitiva di $a(x) = 2$ è

$$A(x) = \int a(x)\,dx = \int 2\,dx = 2x$$

e il fattore integrante è

$$e^{A(x)} = e^{2x}.$$

Quindi possiamo calcolare le primitive di

$$e^{A(x)}\,f(x) = e^{2x}\,3e^{-2x} = 3,$$

ossia

$$\int e^{A(x)}\,f(x)\,dx = \int 3\,dx = 3x + c.$$

Dunque la soluzione generale è uguale a

$$y(x) = e^{-2x}\,\left(3x + c\right).$$

Ora imponiamo la condizione $y(0) = 1$:

$$y(0) = c = 1.$$

Quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = e^{-2x}\,(3x + 1) \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

— ◇ —

2. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + 2x\,y(x) = x\,e^{-x^2} \\ y(1) = e^{-1} \end{cases}$$

R. Troviamo la soluzione generale in $I = \mathbb{R}$. Una primitiva di $a(x) = 2x$ è

$$A(x) = \int a(x)\,dx = \int 2x\,dx = x^2$$

e il fattore integrante è

$$e^{A(x)} = e^{x^2}.$$

Quindi possiamo calcolare le primitive di

$$e^{A(x)}\, f(x) = e^{x^2}\, x\, e^{-x^2} = x,$$

ossia

$$\int e^{A(x)}\, f(x)\, dx = \int x\, dx = \frac{x^2}{2} + c.$$

Dunque la soluzione generale è uguale a

$$y(x) = e^{-x^2} \left(\frac{x^2}{2} + c \right).$$

Ora imponiamo la condizione $y(1) = e^{-1}$:

$$y(1) = e^{-1} \left(\frac{1}{2} + c \right) = e^{-1}$$

da cui si ricava che $c = 1/2$. Quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{e^{-x^2}}{2}\,(x^2+1) \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

— ◇ —

3. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + \tan(x)\, y(x) = \dfrac{1}{\cos x} \\ y(0) = 4 \end{cases}$$

R. In questo caso l'intervallo "massimale" dove cercare la soluzione è $I = (-\pi/2, \pi/2)$. Prima determiniamo una primitiva di $a(x) = \tan x$ in I

$$A(x) = \int \tan x\, dx = -\int \frac{1}{\cos x}\, d(\cos x) = -\log|\cos x| = -\log(\cos x)$$

(il valore assoluto è stato tolto perché la funzione $\cos x$ è positiva nell'intervallo I). Dunque il fattore integrante è

$$e^{A(x)} = e^{-\log(\cos x)} = \frac{1}{\cos x}.$$

Quindi integriamo

$$\int e^{A(x)}\, f(x)\, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \tan x + c$$

e la soluzione generale è uguale a

$$y(x) = \cos x\, (\tan x + c) = \sin x + c\, \cos x.$$

Ora imponiamo la condizione $y(0) = 4$:

$$y(0) = c = 4$$

e la soluzione cercata è

$$y(x) = \sin x + 4\, \cos x \quad \text{per } x \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}).$$

— ◇ —

4. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + \dfrac{y(x)}{x} = 2\arctan x \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

R. L'intervallo "massimale" dove le funzioni $1/x$ e $\arctan x$ sono continue e che contiene $x_0 = 1$ è $I = (0, +\infty)$. Una primitiva di $a(x) = 1/x$ per $x > 0$ è

$$A(x) = \int a(x)\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx = \log x$$

e così il fattore integrante è

$$e^{A(x)} = e^{\log x} = x.$$

Quindi possiamo calcolare le primitive di

$$e^{A(x)}\, f(x) = 2x\, \arctan x.$$

L'integrale si ottiene facilmente per parti

$$\begin{aligned} \int 2x\, \arctan x\, dx &= \int \arctan x\, d(x^2) \\ &= x^2\, \arctan x - \int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx \\ &= x^2\, \arctan x - \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\, dx \\ &= x^2\, \arctan x - x + \arctan x + c \\ &= (x^2+1)\arctan x - x + c. \end{aligned}$$

Dunque la soluzione generale in $(0, +\infty)$ è

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{x}\big((x^2+1)\arctan x - x + c\big) \\ &= \left(x + \frac{1}{x}\right)\arctan x - 1 + \frac{c}{x} \end{aligned}$$

Ora imponiamo la condizione $y(1) = -1$:

$$y(1) = \frac{\pi}{2} - 1 + c = -1$$

da cui si ricava che $c = -\frac{\pi}{2}$. Quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)\arctan x - 1 - \frac{\pi}{2x} \quad \text{per } x \in (0, \infty).$$

— ◇ —

5. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (1+x^4)y'(x) + 4x^3 y(x) = 4x^3 \\ y(0) = 5 \end{cases}$$

e determinare $y(1)$.

R. Troviamo la soluzione generale in $I = \mathbb{R}$. Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficenti non costanti e per identificare correttamente la funzione $a(x)$ dobbiamo prima normalizzare l'equazione dividendo per $(1+x^4)$ ossia il coefficente di $y'(x)$

$$y'(x) + \frac{4x^3}{1+x^4} y(x) = \frac{4x^3}{1+x^4}.$$

Quindi $a(x) = 4x^3/(1+x^4)$ e una sua primitiva è

$$A(x) = \int a(x)\,dx = \int \frac{4x^3}{1+x^4}\,dx = \int \frac{1}{1+x^4}\,d(x^4) = \log(1+x^4)$$

e il fattore integrante è

$$e^{A(x)} = e^{\log(1+x^4)} = 1 + x^4.$$

Quindi possiamo calcolare le primitive di

$$e^{A(x)} f(x) = (1+x^4) \cdot \frac{4x^3}{1+x^4} = 4x^3,$$

ossia

$$\int e^{A(x)} f(x)\,dx = \int 4x^3\,dx = x^4 + c.$$

Dunque la soluzione generale è uguale a

$$y(x) = e^{-A(x)}(x^4 + c) = \frac{x^4 + c}{x^4 + 1}.$$

Ora imponiamo la condizione $y(0) = 5$:

$$y(0) = c = 5.$$

Quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{x^4 + 5}{x^4 + 1} \quad \text{per } x \in \mathbb{R},$$

e $y(1) = 3$.

— ◇ —

6. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int x^2 \sin x \, dx.$$

R. Il problema equivale a risolvere la seguente equazione differenziale lineare:

$$y'(x) = x^2 \sin x.$$

La soluzione particolare deve avere la forma:

$$y_\star(x) = (Ax^2 + Bx + C)\cos x + (Dx^2 + Ex + F)\sin x.$$

Per determinare il valore dei coefficienti dobbiamo derivare

$$\begin{aligned} y'_\star(x) &= ((Dx^2 + Ex + F) + (2Ax + B))\cos x \\ &\quad +((2Dx + E)) - (Ax^2 + Bx + C))\sin x \\ &= (Dx^2 + (E + 2A)x + (F + B))\cos x \\ &\quad +(-Ax^2 + (2D - B)x + (E - C))\sin x \end{aligned}$$

e imporre che $y'_\star(x) = x^2 \sin x$. Quindi

$$D = 0, \quad E + 2A = 0, \quad F + B = 0, \quad -A = 1, \quad 2D - B = 0 \quad E - C = 0$$

e risolvendo si trova che $A = -1$, $C = E = 2$ e $B = D = F = 0$. Così

$$y(x) = y_\star(x) + c = (2 - x^2)\cos x + 2x \sin x + c.$$

— ⋄ —

7. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + \dfrac{y(x)}{x} = e^x \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

e calcolare il limite $\lim\limits_{x\to 0^+} x\, y(x)$.

R. L'intervallo dove cercare la soluzione è $I = (0, +\infty)$. Una primitiva di $a(x) = 1/x$ per $x > 0$ è

$$A(x) = \int a(x)\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx = \log x$$

e così il fattore integrante è

$$e^{A(x)} = e^{\log x} = x.$$

Quindi possiamo calcolare le primitive di

$$e^{A(x)}\, f(x) = x\, e^x.$$

L'integrale si ottiene facilmente per parti

$$\int x\, e^x\, dx = (x-1)e^x + c.$$

Dunque la soluzione generale in $(0, +\infty)$ è

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{x}\left((x-1)e^x + c\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^x + \frac{c}{x} \end{aligned}$$

Ora imponiamo la condizione $y(1) = 2$:

$$y(1) = c = 2.$$

Quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = (1 - \frac{1}{x})e^x + \frac{2}{x} \quad \text{per } x \in (0, \infty).$$

Calcoliamo il limite richiesto:

$$\lim_{x\to 0^+} x\, y(x) = \lim_{x\to 0^+} (x-1)e^x + 2 = -1 + 2 = 1.$$

— ◇ —

8. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

R. Risolviamo prima l'equazione differenziale omogenea

$$y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 0.$$

L'equazione caratteristica associata è

$$z^2 - 6z + 9 = 0$$

che ha una radice: 3 di molteplicità 2. Dunque la generica soluzione omogenea è:

$$y(x) = (c_1 x + c_2)e^{3x}.$$

Ora imponiamo le condizioni $y(0) = 1$ e $y'(0) = 1$:

$$y(0) = c_2 = 1$$

e dato che $y'(x) = c_1 e^{3x} + 3(c_1 x + c_2)e^{3x}$

$$y'(0) = c_1 + 3c_2 = 1.$$

Quindi risolviamo il sistema

$$\begin{cases} c_2 = 1 \\ c_1 + 3c_2 = 1 \end{cases}$$

da cui si ricava che $c_1 = -2$ e $c_2 = 1$. La soluzione cercata è

$$y(x) = (-2x + 1)e^{3x}.$$

— ◇ —

9. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

R. Risolviamo prima l'equazione differenziale omogenea

$$y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = 0.$$

L'equazione caratteristica associata è

$$z^2 - 4z + 5 = 0$$

che ha due radici complesse coniugate: $2 + i$ e $2 - i$ di molteplicità 1. Dunque la generica soluzione omogenea è:

$$y(x) = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x).$$

Ora imponiamo le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$:

$$y(0) = c_1 = 0$$

e quindi $y(x) = c_2 e^{2x} \sin x$. Dato che $y'(x) = c_2 e^{2x}(2 \sin x + \cos x)$

$$y'(0) = c_2 = 2.$$

La soluzione cercata allora è

$$y(x) = 2e^{2x} \sin x.$$

— ◇ —

10. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

R. Risolviamo prima l'equazione differenziale omogenea

$$y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 0.$$

L'equazione caratteristica associata è

$$z^2 - z - 2 = 0$$

che ha radici: 2 e -1 entrambe di molteplicità 1. Dunque la generica soluzione omogenea è:

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}.$$

Ora imponiamo le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$:

$$y(0) = c_1 + c_2 = 0$$

e dato che $y'(x) = 2c_1 e^{2x} - c_2 e^{-x}$

$$y'(0) = 2c_1 - c_2 = 1.$$

Quindi risolviamo il sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_1 - c_2 = 1 \end{cases}$$

da cui si ricava che $c_1 = 1/3$ e $c_2 = -1/3$. La soluzione è

$$y(x) = \frac{1}{3} e^{2x} - \frac{1}{3} e^{-x}.$$

— ◇ —

11. Risolvere il problema

$$\begin{cases} y^{(4)}(x) + 8y'(x) = 0 \\ y(0) = 0 \\ \lim_{x \to +\infty} y(x) = 1 \end{cases}$$

R. Risolviamo prima l'equazione differenziale omogenea

$$y^{(4)}(x) + 8y'(x) = 0.$$

L'equazione caratteristica associata è

$$z^4 + 8z = z(z^3 + 8) = 0$$

che ha radici: 0 e le soluzioni complesse di $z^3 = -8$ ovvero -2, $1 + i\sqrt{3}$ e $1 - i\sqrt{3}$. Dunque la generica soluzione omogenea è:

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-2x} + e^x (c_3 \cos(\sqrt{3}x) + c_4 \sin(\sqrt{3}x)).$$

La prima condizione $y(0) = 0$ dà

$$y(0) = c_1 + c_2 + c_3 = 0.$$

Imponiamo ora la seconda condizione

$$\lim_{x\to+\infty} \left(c_1 + c_2 e^{-2x} + e^x (c_3 \cos(\sqrt{3}x) + c_4 \sin(\sqrt{3}x)) \right) = 1.$$

Il limite richiesto esiste se e solo se $c_3 = c_4 = 0$ perché le funzioni $e^x \cos(\sqrt{3}x)$ e $e^x \sin(\sqrt{3}x)$ non hanno limite per $x \to +\infty$. Così il limite diventa

$$\lim_{x\to+\infty} \left(c_1 + c_2 e^{-2x} \right) = c_1 = 1,$$

Dalla prima condizione $c_2 = -1$ e la soluzione cercata è

$$y(x) = 1 - e^{-2x}.$$

— ◇ —

12. Risolvere l'equazione

$$y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = xe^x.$$

R. L'equazione caratteristica è

$$z^2 + 2z + 2 = 0$$

che ha due radici complesse coniugate: $-1 + i$ e $-1 - i$. Quindi una base dello spazio delle soluzioni omogenee è:

$$y_1(x) = e^{-x} \cos x, \quad \text{e} \quad y_2(x) = e^{-x} \sin x.$$

La funzione $f(x) = xe^x$ è del tipo discusso con $a = 1$ e $b = 0$. Dato che $z = a + ib = 1$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, la soluzione particolare ha la forma

$$y_\star(x) = e^x (Ax + B).$$

Calcoliamo le derivate

$$y'_\star(x) = e^x (Ax + A + B), \quad y''_\star(x) = e^x (Ax + 2A + B)$$

e sostituiamole nell'equazione

$$xe^x = y''_\star(x) + 2y'_\star(x) + 2y_\star(x) = e^x (5Ax + 4A + 5B).$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 5A = 1 \\ 4A + 5B = 0 \end{cases}$$

si ottiene che $A = 1/5$, $B = -4/25$ e

$$y_\star(x) = e^x \left(\frac{1}{5}x - \frac{4}{25} \right) = \frac{e^x}{25}(5x - 4).$$

Dunque la soluzione generale è

$$y(x) = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + \frac{e^x}{25}(5x - 4).$$

— ◇ —

13. Sia $y(x)$ una soluzione dell'equazione

$$y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 27x.$$

Calcolare l'eventuale asintoto di $y(x)$ per $x \to +\infty$.
R. L'equazione caratteristica è

$$z^2 + 6z + 9 = 0$$

che ha una soluzione di molteplicità 2: -3. Quindi una base dello spazio delle soluzioni omogenee è:

$$y_1(x) = e^{-3x} \quad \text{e} \quad y_2(x) = xe^{-3x}.$$

La funzione $f(x) = x$ è del tipo discusso con $a = 0$ e $b = 0$ e ato che $z = a + ib = 0$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, la soluzione particolare ha la forma

$$y_\star(x) = Ax + B.$$

Sostituendo otteniamo

$$27x = y''_\star(x) + 6y'_\star(x) + 9y_\star(x) = 9Ax + (6A + 9B)$$

ossia $A = 3$ e $B = -2$.
Quindi ci sono infinite soluzioni che dipendono dalla scelta delle due costanti c_1 e c_2

$$y(x) = e^{-3x}(c_1 + c_2x) + 3x - 2.$$

Tutte queste soluzioni hanno per $x \to +\infty$ lo stesso asintoto $y = 3x - 2$:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{y(x)}{x} = 3 \quad \text{e} \quad q = \lim_{x \to +\infty} (y(x) - mx) = -2.$$

— ◇ —

14. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) = x^2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

R. L'equazione caratteristica è

$$z^2 + z = z(z+1)$$

che ha radici semplici 0 e -1. Quindi una base dello spazio delle soluzioni omogenee è:

$$y_1(x) = 1 \quad \text{e} \quad y_2(x) = e^{-x}.$$

La funzione $f(x) = x^2$ è del tipo discusso con $a = b = 0$. Dato che $z = a + ib = 0$ ha molteplicità 1 allora $m = 1$ e la soluzione particolare da cercare ha la forma

$$y_\star(x) = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx.$$

Calcoliamo le derivate:

$$y_\star'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C, \quad y_\star''(x) = 6Ax + 2B$$

e sostituiamole nell'equazione

$$x^2 = y_\star''(x) + y_\star'(x) = 3Ax^2 + (6A + 2B)x + (2B + C).$$

Quindi $A = 1/3$, $B = -1$, $C = 2$ e

$$y_\star(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x.$$

Dunque la soluzione generale è

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x.$$

Imponiamo le condizioni:

$$y(0) = c_1 + c_2 = 1,$$

inoltre, dato che $y'(x) = -c_2 e^{-x} + x^2 - 2x + 2$,

$$y'(0) = -c_2 + 2 = 0.$$

Quindi $c_2 = 2$ e $c_1 = -1$ e la soluzione cercata è

$$y(x) = 2e^{-x} - 1 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x.$$

— ◇ —

15. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - y'(x) - 2y(x) = -3e^{-x} - 2e^{x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

R. L'equazione caratteristica è

$$z^2 - z - 2 = 0$$

che ha due radici semplici: -1 e 2. Quindi una base dello spazio delle soluzioni omogenee è

$$y_1(x) = e^{-x} \quad \text{e} \quad y_2(x) = e^{2x}.$$

Per il calcolo della soluzione particolare sfruttiamo la linearità e consideriamo prima il caso $f_1(x) = -3e^{-x}$ e poi il caso $f_2(x) = -2e^{x}$.
Per $f_1(x) = -3e^{-x}$ allora $a = -1$ e $b = 0$. Dato che $z = a + ib = -1$ è una soluzione dell'equazione caratteristica di molteplicità 1, la soluzione particolare ha la forma

$$y_{\star 1}(x) = Axe^{-x}.$$

Calcoliamo le derivate

$$y'_{\star 1}(x) = A(e^{-x} - xe^{-x}), \quad y''_{\star 1}(x) = A(-2e^{-x} + xe^{-x})$$

e sostituiamole nell'equazione

$$-3e^{-x} = y''_{\star 1}(x) - y'_{\star 1}(x) - 2y_{\star 1}(x) = -3Ae^{-x}.$$

Quindi $A = 1$ e

$$y_{\star 1}(x) = xe^{-x}.$$

Per $f_2(x) = -2e^{x}$ allora $a = 1$ e $b = 0$. Dato che $z = a + ib = 1$ non è una soluzione dell'equazione caratteristica, la soluzione particolare ha la forma

$$y_{\star 2}(x) = Be^{x}.$$

Calcoliamo le derivate

$$y'_{\star 2}(x) = Be^{x}, \quad y''_{\star 2}(x) = Be^{x}$$

e sostituiamole nell'equazione

$$-2e^{x} = y''_{\star 2}(x) - y'_{\star 2}(x) - 2y_{\star 2}(x) = -2Be^{x}.$$

da cui $B = 1$ e

$$y_{\star 2}(x) = e^{x}.$$

Dunque una soluzione particolare per $f(x) = f_1(x) + f_2(x) = -3e^{-x} - 2e^{x}$ è

$$y_{\star}(x) = y_{\star 1}(x) + y_{\star 2}(x) = xe^{-x} + e^{x}$$

mentre la soluzione generale è

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + xe^{-x} + e^x.$$

Imponiamo le condizioni:

$$y(0) = c_1 + c_2 + 1 = 0,$$

inoltre, dato che $y'(x) = -c_1 e^{-x} + 2c_2 e^{2x} + e^{-x} - xe^{-x} + e^x$,

$$y'(0) = -c_1 + 2c_2 + 2 = 3.$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = -1 \\ -c_1 + 2c_2 = 1 \end{cases}$$

si ottiene che $c_1 = -1$, $c_2 = 0$ e la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = -e^{-x} + xe^{-x} + e^x = e^{-x}(x-1) + e^x.$$

— ◇ —

16. Quali delle seguenti funzioni

$$y_a(x) = e^x(2x+3),\ y_b(x) = e^x(x^4 - x),\ y_c(x) = e^x(x^5 + 2),\ y_d(x) = e^x(2x^4 + 3)$$

sono soluzioni dell'equazione differenziale

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 24e^x x^2\,?$$

R. Si potrebbe sostituire pazientemente le singole funzioni nell'equazione e verificare quando questa sia soddisfatta, ma in realtà alcune semplici osservazioni ci permetteranno di operare più rapidamente.
Il polinomio caratteristico $z^2 - 2z + 1 = (z-1)^2$ ha una soluzione $z = 1$ di molteplicità 2 e dunque la soluzione omogenea è

$$y_o(x) = e^x(c_1 x + c_2)$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie. Quindi possiamo togliere dalle funzioni proposte la parte omogenea e verificare ora quale delle funzioni *semplificate* è soluzione

$$\widetilde{y}_a(x) = 0,\ \widetilde{y}_b(x) = e^x x^4,\ \widetilde{y}_c(x) = e^x x^5,\ \widetilde{y}_d(x) = 2e^x x^4$$

Inoltre dato che alla funzione $f(x) = 24e^x x^2$ possiamo associare proprio il numero complesso 1 la soluzione particolare ha la forma

$$y_\star(x) = x^2 e^x(Ax^2 + Bx + C) = e^x(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2)$$

dove A, B e C sono costanti opportune non tutte nulle.

Quindi $\widetilde{y}_a(x)$ e $\widetilde{y}_c(x)$ vanno escluse: la prima perché è zero e la seconda perché contiene un termine x^5 incompatibile con la forma di $y_\star$. Rimangono quindi da verificare solo $\widetilde{y}_b(x) = e^x x^4$ e $\widetilde{y}_d(x) = 2e^x x^4$. Basta fare i conti per $\widetilde{y}_b(x)$ perché per linearità per $\widetilde{y}_d(x) = 2\widetilde{y}_b(x)$ otterremo proprio il doppio:

$$(e^x x^4)'' - 2(e^x x^4)' + (e^x x^4) = 12e^x x^2$$

Siccome $f(x) = 2 \cdot 12e^x x^2$, solo la funzione $\widetilde{y}_d(x)$ risolve l'equazione data. Possiamo così concludere che tra le funzioni proposte solo $y_d(x)$ è una soluzione.

— ⋄ —

17. Sia $y(x)$ la soluzione del problema

$$\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 8e^x - 5 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 2 \end{cases}.$$

Calcolare il limite $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} y(x)$.

R. L'equazione caratteristica è

$$z^2 + 2z + 1 = (z+1)^2 = 0$$

che ha solo una radice di molteplicità 2: -1. Quindi una base dello spazio delle soluzioni omogenee è

$$y_1(x) = e^{-x} \quad \text{e} \quad y_2(x) = x\, e^{-x}.$$

Calcoliamo la soluzione particolare. Per $f_1(x) = 8e^x$ allora $a = 1$ e $b = 0$ e dato che $z = a + ib = 1$ non è una soluzione dell'equazione, la soluzione particolare ha la forma

$$y_{\star 1}(x) = Ae^x.$$

Per $f_2(x) = -5$ allora $a = 0$ e $b = 0$ e dato che $z = a + ib = 0$ non è una soluzione dell'equazione caratteristica, la soluzione particolare ha la forma

$$y_{\star 2}(x) = B.$$

Dunque la soluzione generale ha la forma

$$y(x) = (c_1 x + c_2)e^{-x} + Ae^x + B.$$

Prima di determinare i coefficienti impostiamo il calcolo del limite richiesto:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} y(x) = \lim_{x\to+\infty} \left((c_1 x + c_2)e^{-2x} + A + Be^{-x}\right) = A.$$

Quindi l'unico coefficiente necessario è A. Determiniamolo

$$y''_{\star 1}(x) + 2y'_{\star 1}(x) + y_{\star 1}(x) = Ae^x + 2Ae^x + Ae^x = 4Ae^x = 8e^x.$$

Così $A = 2$ e limite vale 2. Si noti che il limite non dipende dalle condizioni iniziali.

— ◇ —

18. Sia $y(x)$ soluzione del problema

$$\begin{cases} y^{(4)}(x) - y(x) = 2e^{-2x} + 6x - 7 \\ \lim_{x\to+\infty} y(x)/x^2 = 0 \end{cases}.$$

Calcolare il limite $\lim_{x\to+\infty} y(x)/x$.

R. L'equazione caratteristica è

$$z^4 - 1 = 0$$

che ha quattro radici di molteplicità 1: 1, -1, i, $-i$. Quindi una base dello spazio delle soluzioni omogenee è

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = e^{-x}, \quad y_3(x) = \cos x \quad \text{e} \quad y_4(x) = \sin x.$$

Calcoliamo la soluzione particolare. Per $f_1(x) = 2e^{-2x}$ allora $a = -2$ e $b = 0$ e dato che $z = a + ib = -2$ non è una soluzione dell'equazione, la soluzione particolare ha la forma

$$y_{\star1}(x) = Ae^{-2x}.$$

Per $f_2(x) = 6x - 7$ allora $a = 0$ e $b = 0$ e dato che $z = a + ib = 0$ non è una soluzione dell'equazione caratteristica, la soluzione particolare ha la forma

$$y_{\star2}(x) = Bx + C.$$

Dunque la soluzione generale ha la forma

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x + Ae^{-2x} + Bx + C.$$

Prima di determinare i coefficienti imponiamo la condizione che la soluzione generale deve soddisfare:

$$\lim_{x\to+\infty} y(x)/x^2 = c_1 \cdot \lim_{x\to+\infty} e^x/x^2 = 0,$$

e quindi $c_1 = 0$. Si noti che i coefficienti c_2, c_3 e c_4 sono liberi e dunque il problema ha infinite soluzioni. Ora impostiamo il calcolo del limite richiesto

$$\lim_{x\to+\infty} y(x)/x = B,$$

quindi il suo valore è lo stesso per tutte le soluzioni. Determiniamo l'unico coefficiente necessario:

$$y_{\star2}^{(4)}(x) - y_{\star2}(x) = -Bx - C = 6x - 7.$$

Così $B = -6$ e limite vale -6.

— ◇ —

19. Sia $y(x)$ soluzione del problema

$$y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = xe^x.$$

Calcolare il limite $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}y(x)/x$.

R. L'equazione caratteristica è

$$z^2 + 2z + 2 = 0$$

che ha due radici complesse cooniugate: $-1+i$ e $-1-i$. Quindi una base dello spazio delle soluzioni omogenee è

$$y_1(x) = e^{-x}\cos x \quad \text{e} \quad y_2(x) = e^{-x}\sin x.$$

Calcoliamo la soluzione particolare. Per $f(x) = xe^x$ allora $a = 1$ e $b = 0$ e dato che $z = a + ib = 1$ non è una soluzione dell'equazione, la soluzione particolare ha la forma

$$y_\star(x) = e^x(Ax + B)$$

e sostituendo otteniamo

$$xe^x = y_\star''(x) + 2y_\star'(x) + 2y_\star(x) = e^x\left(5Ax + 4A + 5B\right).$$

Dunque $A = 1/5$ e $B = -4/25$ e la soluzione generale ha la forma

$$y(x) = e^{-x}(c_1\cos x + c_2\sin x) + e^x(5x-4)/25.$$

Infine calcoliamo il limite richiesto

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}y(x)/x = A = \frac{1}{5}.$$

— ◇ —

20. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = x/y(x) \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

R. Qui la funzione $a(x) = x$ mentre $b(y) = 1/y$. Dato che $b(y_0) = -1 \neq 0$, la soluzione cercata risolve

$$\int_{-1}^{y(x)} y\,dy = \int_0^x x\,dx$$

e dunque

$$\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^{y(x)} = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^x$$

ossia

$$\frac{y^2(x)}{2} - \frac{1}{2} = \frac{x^2}{2}.$$

In questo caso nell'esplicitare la funzione $y(x)$ otteniamo:

$$y(x) = \pm\sqrt{x^2+1}.$$

Dato che $y(0) = -1$ si sceglie il segno negativo e quindi l'unica soluzione è

$$y(x) = -\sqrt{x^2+1} \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

— ◇ —

21. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y(x)\, y'(x) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Quante sono le soluzioni?

R. Le variabili sono già separate, quindi basta integrare

$$\int_0^{y(x)} y\, dy = \int_0^x 1\, dx$$

e dunque

$$\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{y(x)} = \left[x\right]_0^x$$

ossia

$$\frac{y^2(x)}{2} = x.$$

Per esplicitare la funzione $y(x)$ dobbiamo invertire la funzione $y^2/2$:

$$y(x) = \pm\sqrt{2x}.$$

La condizione $y(0) = 0$ è soddisfatta sia da $y(x) = \sqrt{2x}$ sia da $y(x) = -\sqrt{2x}$. Dunque le soluzioni del problema sono due ed entrambe sono definite nell'intervallo $[0, +\infty)$.

— ◇ —

22. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y^2(x) \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

R. In questo caso la funzione $a(x) = 1$ mentre $b(y) = y^2$. Dato che $b(y_0) = 4 \neq 0$, la soluzione cercata risolve

$$\int_2^{y(x)} \frac{1}{y^2}\, dy = \int_0^x 1\, dx$$

e dunque
$$\left[-\frac{1}{y}\right]_2^{y(x)} = [x]_0^x$$
ossia
$$-\frac{1}{y(x)} + \frac{1}{2} = x.$$
Per determinare la soluzione basta esplicitare la funzione $y(x)$:
$$y(x) = \frac{2}{1-2x}.$$
La soluzione è unica ed è definita sull'intervallo "massimale" contenuto del dominio della funzione $2/(1-2x)$ che contiene il punto $x_0 = 0$ ovvero $(-\infty, 1/2)$. Notiamo che se la condizione fosse stata $y(0) = 0$ allora $b(y_0) = 0$ e la soluzione sarebbe stata la soluzione stazionaria $y(x) = 0$.

— ⋄ —

23. Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} xy'(x) + e^{-y(x)} = 1 \\ y(1) = \log 5 \end{cases}.$$

R. Risistemando i termini è facile riconoscere un'equazione differenziale a variabili separabili: per $x \neq 0$
$$y'(x) = \frac{1-e^{-y(x)}}{x}.$$
Così $a(x) = 1/x$ e $b(y) = 1 - e^{-y}$. Dato che $b(y_0) = 4/5 \neq 0$, la soluzione cercata risolve
$$\int_{\log 5}^{y(x)} \frac{1}{1-e^{-y}}\,dy = \int_{\log 5}^{y(x)} \frac{e^y}{e^y-1}\,dy = \int_1^x \frac{1}{x}\,dx$$
e dunque
$$[\log|e^y - 1|]_{\log 5}^{y(x)} = [\log|x|]_1^x$$
ossia
$$\log\left|e^{y(x)} - 1\right| - \log 4 = \log|x|.$$
Per determinare la soluzione basta esplicitare la funzione $y(x)$:
$$\log\left|e^{y(x)} - 1\right| = \log(4|x|)$$
e quindi abbiamo due possibilità
$$y(x) = \log(\pm 4|x| + 1).$$
Dato che $y(1) = \log 5$, il segno da prendere è quello positivo e quindi la soluzione è
$$y(x) = \log(4|x| + 1).$$

— ◇ —

24. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = -6 + 5y(x) - y^2(x) \\ y(1) = 4 \end{cases}$$

e calcolare l'eventuale asintoto della soluzione $y(x)$ per $x \to +\infty$.
R. In questo caso la funzione $a(x) = 1$ mentre $b(y) = -6 + 5y - y^2 = -(y-3)(y-2)$. Dato che $b(y_0) = -2 \neq 0$, la soluzione cercata risolve

$$\int_4^{y(x)} \frac{-1}{(y-3)(y-2)}\,dy = \int_4^{y(x)} \left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y-3}\right) = \int_1^x 1\,dx$$

e dunque

$$\left[\log\left|\frac{y-2}{y-3}\right|\right]_4^{y(x)} = \left[x\right]_1^x$$

ossia

$$\log\left|\frac{y(x)-2}{y(x)-3}\right| - \log 2 = x - 1.$$

Per determinare la soluzione è sufficiente esplicitare la funzione $y(x)$:

$$1 + \frac{1}{y(x)-3} = \frac{y(x)-2}{y(x)-3} = \pm e^{x-1+\log 2} = \pm 2e^{x-1},$$

e imponendo la condizione iniziale $y(1) = 4$ si ottiene

$$y(x) = 3 + \frac{1}{2e^{x-1} - 1} \quad \text{per } x > 1 - \log 2.$$

Dato che

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(3 + \frac{1}{2e^{x-1}-1}\right) = 3$$

l'asintoto richiesto è $y = 3$.

— ◇ —

25. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2x(1 + y^2(x)) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

R. Qui la funzione $a(x) = 2x$ mentre $b(y) = 1 + y^2$. Dato che $b(y_0) = 1 \neq 0$, la soluzione cercata risolve

$$\int_1^{y(x)} \frac{1}{1+y^2}\,dy = \int_0^x 2x\,dx$$

e dunque
$$\big[\arctan(y)\big]_0^{y(x)} = \big[x^2\big]_0^x$$
ossia
$$\arctan(y(x)) = x^2.$$
Per esplicitare la funzione $y(x)$ dobbiamo invertire la funzione arcotangente:
$$y(x) = \tan(x^2) \quad \text{per } x \in (-\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}, \sqrt{\tfrac{\pi}{2}}).$$

— ◇ —

26. Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{9\arctan(x)}{y(x)} \\ y(0) = 4 \end{cases}$$
e calcolare il limite $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)/\sqrt{x}$.

R. Qui $b(y) = 1/y$ e dato che $b(y_0) = 1/4 \neq 0$, la soluzione cercata risolve
$$\int_4^{y(x)} y\,dy = 9\int_0^x \arctan x\,dx.$$
Il secondo integrale si risolve per parti
$$\int \arctan x\,dx = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c$$
e così otteniamo
$$\left[\frac{y^2}{2}\right]_4^{y(x)} = 9\left[x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_0^x$$
ossia
$$\frac{y^2(x)}{2} - 8 = 9x\arctan x - \frac{9}{2}\log(1+x^2).$$
Esplicitiamo la funzione $y(x)$ imponendo la condizione $y(0) = 4$:
$$y(x) = \sqrt{18x\arctan x - 9\log(1+x^2) + 16} \quad \text{per } x \geq 0.$$
Dunque il limite richiesto vale
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{\sqrt{x}} = \sqrt{18\pi/2} = 3\sqrt{\pi}.$$

— ◇ —

27. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{x}{x^2+2} \cdot (\sin(y(x)))^3 \\ y(0) = 3\pi \end{cases}$$

R. Qui $b(y) = \sin^3 y$ e $b(y_0) = \sin(3\pi)^3 = 0$ e quindi la soluzione è stazionaria:

$$y(x) = 3\pi.$$

— ⋄ —

28. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \log(x) \cdot y(x) \\ y(1) = -e \end{cases}$$

e calcolare $y(e)$.
R. La soluzione cercata risolve

$$\int_{-e}^{y(x)} \frac{1}{y}\, dy = \int_1^x \log x\, dx.$$

Quindi

$$[\log|y|]_{-e}^{y(x)} = [x\log x - x]_1^x$$

ossia

$$\log|y(x)| - 1 = x\log x - x + 1.$$

Esplicitiamo la funzione $y(x)$ imponendo la condizione $y(1) = -e$:

$$y(x) = -e^{x\log x - x + 2} \quad \text{per } x > 0.$$

Dunque $y(e) = -e^{e-e+2} = -e^2$.

— ⋄ —

29. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = x^2 \cdot (2e^{-y(x)} - 1) \\ y(0) = \log 3 \end{cases}.$$

Calcolare il limite $\lim_{x\to+\infty} y(x)$.
R. Qui la funzione $a(x) = x^2$ mentre $b(y) = 2e^{-y} - 1$. Dato che $b(y_0) = -1/3 \neq 0$, la soluzione cercata risolve

$$\int_{\log 3}^{y(x)} \frac{1}{2e^{-y}-1}\, dy = \int_{\log 3}^{y(x)} \frac{e^y}{2-e^y}\, dy = -\int_{\log 3}^{y(x)} \frac{1}{2-e^y}\, d(2-e^y) = \int_0^x x^2\, dx$$

e dunque
$$\left[-\log|2-e^y|\right]_{\log 3}^{y(x)} = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^x$$
ossia
$$\log|2-e^{y(x)}| = -\frac{x^3}{3}.$$
Esplicitiamo la funzione $y(x)$ tenendo conto della condizione iniziale:
$$y(x) = \log\left(e^{-x^3/3}+2\right) \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$
Così
$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} \log\left(e^{-x^3/3}+2\right) = \log 2.$$
Quindi $y(x)$ converge asintoticamente alla soluzione stazionaria.

— ◇ —

30. Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'(x) = 3\cos^2(x)\,\sin(x)\cdot y(x)^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

R. Qui $b(y) = y^2$ e $b(y_0) = 1 \neq 0$ e quindi la soluzione soddisfa
$$\int_1^{y(x)} \frac{1}{y^2}\,dy = \int_0^x 3(\cos x)^2\,\sin x\,dx = -\int_0^x 3(\cos x)^2\,d(\cos x)$$
e dunque
$$\left[-\frac{1}{y}\right]_1^{y(x)} = -\left[(\cos x)^3\right]_0^x$$
ossia
$$-\frac{1}{y(x)} + 1 = -(\cos x)^3 + 1.$$
Quindi la soluzione cercata è
$$y(x) = \frac{1}{(\cos x)^3} \quad \text{per } x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

— ◇ —

31. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} xy'(x) + y(x) = x^2\sin(x^3) \\ y(\sqrt[3]{2\pi}) = 0 \end{cases}.$$

Calcolare il limite $\lim_{x\to 0^+} y(x)/x^5$.

R. L'equazione si riscrive come

$$(xy(x))' = x^2 \sin(x^3)$$

e integrando rispetto a x tra $\sqrt[3]{2\pi}$ e x otteniamo

$$[xy(x)]_{\sqrt[3]{2\pi}}^{x} = \int_{\sqrt[3]{2\pi}}^{x} x^2 \sin(x^3)\, dx$$

ossia, dato che $y(\sqrt[3]{2\pi}) = 0$,

$$xy(x) = \frac{1}{3} \int_{\sqrt[3]{2\pi}}^{x} \sin(x^3)\, d(x^3) = \frac{1}{3} \left[-\cos(x^3)\right]_{\sqrt[3]{2\pi}}^{x} = \frac{1-\cos(x^3)}{3}.$$

Così per $x \neq 0$

$$y(x) = \frac{1-\cos(x^3)}{3x}.$$

Allora

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{y(x)}{x^5} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(x^3)}{3x^6} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-(1-(x^3)^2/2+o(x^6))}{3x^6} = \frac{1}{6}.$$

— ◇ —

32. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = -\log(x)e^{-y(x)}/x \\ y(1) = 0 \end{cases}.$$

Calcolare il limite $\lim\limits_{x\to(e^{\sqrt{2}})^-} y(x)$.

R. Separando le variabili e integrando otteniamo per $x > 0$

$$\int_0^{y(x)} e^y\, dy = -\int_1^x \frac{\log(x)}{x}\, dx = -\int_1^x \log(x)\, d(\log(x))$$

e quindi

$$e^{y(x)} - 1 = -\left(\log(x)\right)^2/2.$$

Allora la soluzione è

$$y(x) = \log\left(1 - \left(\log(x)\right)^2/2\right)$$

definita nell'intervallo massimale $(1/e^{\sqrt{2}}, e^{\sqrt{2}})$. Così

$$\lim_{x\to(e^{\sqrt{2}})^-} y(x) = \lim_{x\to(e^{\sqrt{2}})^-} \log\left(1 - \left(\log(x)\right)^2/2\right) = -\infty.$$

— ◇ —

33. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = e^{2x-3y(x)} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

e quindi calcolare il limite $\lim_{x\to+\infty} y(x)/x$.

R. Qui $b(y) = e^{-3y}$ e $b(y_0) = 1 \neq 0$ e quindi la soluzione soddisfa

$$\int_0^{y(x)} e^{3y}\, dy = \int_0^x e^{2x}\, dx$$

e dunque

$$\left[\frac{e^{3y}}{3}\right]_0^{y(x)} = \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^x$$

ossia

$$\frac{e^{3y(x)}}{3} - \frac{1}{3} = \frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}.$$

Quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{1}{3}\log\left(\frac{3e^{2x}-1}{2}\right) \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

Ora calcoliamo il limite richiesto

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(\frac{3e^{2x}-1}{2}\right)}{3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(\frac{3}{2}e^{2x}\right)}{3x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\frac{3}{2} + 2x}{3x} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

— ◇ —

34. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (x-1)\cdot(y(x)-1) \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

R. Qui $b(y) = y - 1$ e $b(y_0) = 1 \neq 0$ e quindi la soluzione soddisfa

$$\int_2^{y(x)} \frac{1}{y-1}\, dy = \int_0^x (x-1)\, dx$$

e dunque

$$\Big[\log|y-1|\Big]_2^{y(x)} = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^x$$

ossia

$$\log|y(x)-1| = \frac{x^2}{2} - x.$$

Cominciamo ad esplicitare la funzione $y(x)$

$$|y(x)-1| = e^{\frac{x^2}{2}-x}.$$

e togliendo il valore assoluto abbiamo che

$$y(x) = 1 \pm e^{\frac{x^2}{2}-x}.$$

Siccome $y(0) = 2$ dobbiamo scegliere il segno positivo. Allora la soluzione cercata è

$$y(x) = 1 + e^{\frac{x^2}{2}-x} \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

— ◇ —

35. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{3}{3x+1} \cdot \dfrac{2-e^{y(x)}}{e^{y(x)}} \\ y(0) = \log 3 \end{cases}$$

e determinare $y(1)$.

R. Qui $b(y) = (2-e^y)/e^y$ e $b(y_0) = -1/3 \neq 0$ e quindi la soluzione soddisfa

$$\int_{\log 3}^{y(x)} \frac{e^y}{2-e^y}\, dy = \int_0^x \frac{3}{3x+1}\, dx$$

e così

$$-\big[\log|e^y-2|\big]_{\log 3}^{y(x)} = \big[\log|3x+1|\big]_0^x$$

ossia

$$\frac{1}{e^{y(x)}-2} = \pm(3x+1).$$

Esplicitiamo la funzione $y(x)$ imponendo la condizione iniziale $y(0) = \log 3$:

$$y(x) = \log\left(2 + \frac{1}{3x+1}\right) \quad \text{per } x > -1/3.$$

Quindi $y(1) = \log(9/4) = 2\log(3/2)$.