

Ora imponiamo condizione richiesta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (c_1 e^{4x} + c_2 + c_3 e^{2x} \cos(2x) + c_4 e^{2x} \sin(2x)) = 3.$$

Il limite esiste se e solo  $c_3 = c_4 = 0$  perché le funzioni  $e^{2x} \cos(2x)$  e  $e^x \sin(2x)$  non hanno limite per  $x \rightarrow +\infty$ . Inoltre siccome il limite deve essere finito ( $= 3$ ) anche  $c_1 = 0$ . Quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = c_2 = 3$$

e così

$$y(x) = 3e^{-2x}$$

è la soluzione cercata.

—  $\diamond$  —

Per determinare una soluzione particolare descriveremo un metodo che vale solo nel caso in cui la funzione  $f(x)$  abbia una forma particolare:

$$f(x) = e^{ax} P(x) \cos(bx) \quad \text{oppure} \quad f(x) = e^{ax} P(x) \sin(bx).$$

In questi casi si cerca una soluzione particolare definita su tutto  $\mathbb{R}$  della forma

$$y_*(x) = x^m e^{ax} (Q_1(x) \cos(bx) + Q_2(x) \sin(bx))$$

- (1)  $m$  è la molteplicità di  $a + ib$  come radice dell'equazione caratteristica,
- (2)  $Q_1(x)$  e  $Q_2(x)$  sono generici polinomi di grado uguale al grado di  $P(x)$ .

—  $\diamond$  —

**Esempio 2.6** Risolviamo l'equazione

$$y'''(x) + 3y''(x) = 9x.$$

L'equazione caratteristica è

$$z^3 + 3z^2 = 0$$

che ha radici: 0 (di molteplicità 2) e  $-3$  (di molteplicità 1). Quindi una base dello spazio delle soluzioni omogenee è:

$$y_1(x) = 1, \quad y_2(x) = x \quad \text{e} \quad y_3(x) = e^{-3x}.$$

La funzione  $f(x) = 9x$  è del tipo discusso con  $a = b = 0$ . Dato che  $z = a + ib = 0$  ha molteplicità 2 allora  $m = 2$  e la soluzione particolare da cercare ha la forma

$$y_*(x) = x^2(Ax + B) = Ax^3 + Bx^2.$$

Calcoliamo le derivate

$$y'_*(x) = 3Ax^2 + 2Bx, \quad y''_*(x) = 6Ax + 2B, \quad y'''_*(x) = 6A$$

e sostituiamole nell'equazione

$$9x = y'''_*(x) + 3y''_*(x) = 6A + 3(6Ax + 2B) = 18Ax + 6A + 6B.$$

Quindi  $A = 1/2$  e  $B = -1/2$  e una soluzione particolare è

$$y_*(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2.$$

Dunque la soluzione generale è

$$y(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + c_1 + c_2x + c_3e^{-3x}.$$

—  $\diamond$  —

**Esempio 2.7** Risolviamo l'equazione

$$2y''(x) - 5y'(x) + 3y(x) = \sin(2x).$$

L'equazione caratteristica è

$$2z^2 - 5z + 3 = 0$$

che ha due radici semplici: 1 e  $3/2$ . Quindi una base dello spazio delle soluzioni omogenee è:

$$y_1(x) = e^x, \quad \text{e} \quad y_2(x) = e^{3x/2}.$$

La funzione  $f(x) = \sin(2x)$  è del tipo discusso con  $a = 0$  e  $b = 2$ . Dato che  $z = a + ib = 2i$  non è soluzione dell'equazione caratteristica (la molteplicità è zero), la soluzione particolare ha la forma

$$y_*(x) = A \cos(2x) + B \sin(2x).$$

Calcoliamo le derivate

$$y'_*(x) = -2A \sin(2x) + 2B \cos(2x), \quad y''_*(x) = -4A \cos(2x) - 4B \sin(2x)$$

e sostituiamole nell'equazione

$$\sin(2x) = 2y''_*(x) - 5y'_*(x) + 3y_*(x) = 5(2A - B) \sin(2x) - 5(A + 2B) \cos(2x).$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 5(2A - B) = 1 \\ 5(A + 2B) = 0 \end{cases}$$

si ottiene che  $A = 2/25$ ,  $B = -1/25$  e una soluzione particolare è

$$y_*(x) = \frac{2}{25} \cos(2x) - \frac{1}{25} \sin(2x).$$

Dunque la soluzione generale è

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{3x/2} + \frac{2}{25} \cos(2x) - \frac{1}{25} \sin(2x).$$

—  $\diamond$  —

**Esempio 2.8** Risolviamo l'equazione

$$y''(x) - 2y'(x) = x - e^{3x}.$$

L'equazione caratteristica è

$$z^2 - 2z = z(z - 2) = 0$$

che ha due radici semplici: 0 e 2. Quindi una base dello spazio delle soluzioni omogenee è:

$$y_1(x) = 1, \quad \text{e} \quad y_2(x) = e^{2x}.$$

La funzione  $f(x) = x - e^{3x}$  non è del tipo discusso, ma grazie alla linearità è sufficiente trovare una soluzione particolare prima per  $f_1(x) = x$ , poi per  $f_2(x) = -e^{3x}$  e quindi sommarle. Per  $f_1(x) = x$  allora  $a = 0$  e  $b = 0$ . Dato che  $z = a + ib = 0$  è una soluzione dell'equazione caratteristica di molteplicità 1, la soluzione particolare ha la forma

$$y_{*1}(x) = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx.$$

Calcoliamo le derivate

$$y'_{*1}(x) = 2Ax + B, \quad y''_{*1}(x) = 2A$$

e sostituiamole nell'equazione

$$x = y''_{*1}(x) - 2y'_{*1}(x) = -4Ax + 2A - 2B.$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -4A = 1 \\ 2A - 2B = 0 \end{cases}$$

si ottiene che  $A = -1/4$ ,  $B = -1/4$  e

$$y_{*1}(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x.$$

Per  $f_2(x) = e^{3x}$  allora  $a = 3$  e  $b = 0$ . Dato che  $z = a + ib = 3$  non è una soluzione dell'equazione caratteristica, la soluzione particolare ha la forma

$$y_{*2}(x) = Ce^{3x}.$$

Calcoliamo le derivate

$$y'_{*2}(x) = 3Ce^{3x}, \quad y''_{*2}(x) = 9Ce^{3x}$$

e sostituiamole nell'equazione

$$-e^{3x} = y''_{*2}(x) - 2y'_{*2}(x) = 3Ce^{3x}$$

da cui  $C = -1/3$  e

$$y_{*2}(x) = -\frac{1}{3}e^{3x}.$$

Dunque una soluzione particolare per  $f(x) = x - e^{3x}$  è

$$y_*(x) = y_{*1}(x) + y_{*2}(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{3}e^{3x}$$

mentre la soluzione generale è

$$y(x) = c_1 + c_2e^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{3}e^{3x}.$$

—  $\diamond$  —

**Esempio 2.9** Calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int e^x x \cos x \, dx.$$

Invece di integrare direttamente, possiamo ricondurre il problema alla risoluzione di un'equazione differenziale. Infatti determinare le primitive  $y(x)$  della funzione  $e^x x \cos x$  equivale a risolvere la seguente equazione differenziale lineare:

$$y'(x) = e^x x \cos x.$$

In questo caso l'equazione caratteristica è semplicemente  $z = 0$  e quindi la parte omogenea è generata dalla funzione costante  $y_1(x) = 1$ . La soluzione particolare deve avere invece la forma:

$$y_*(x) = e^x(Ax + B) \cos x + e^x(Cx + D) \sin x.$$

Per determinare il valore dei coefficienti  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  dobbiamo derivare

$$\begin{aligned} y'_*(x) &= e^x(Ax + B) \cos x + Ae^x \cos x - e^x(Ax + B) \sin x \\ &\quad + e^x(Cx + D) \sin x + Ce^x \sin x + e^x(Cx + D) \cos x \\ &= (A + C)e^x x \cos x + (A + B + D)e^x \cos x \\ &\quad + (C - A)e^x x \sin x + (C - B + D)e^x \sin x \end{aligned}$$

e imporre che  $y'_*(x) = x \cos x e^x$ . Quindi

$$A + C = 1, \quad A + B + D = 0, \quad C - A = 0, \quad C - B + D = 0$$

e risolvendo si trova che  $A = C = -D = 1/2$  e  $B = 0$ . Così

$$y(x) = y_*(x) + c_1 y_1(x) = \frac{e^x}{2} (x \cos x + (x - 1) \sin x) + c_1.$$

### 3. EQUAZIONI DIFFERENZIALI NON LINEARI A VARIABILI SEPARABILI

Un'equazione differenziale a *variabili separabili* ha la seguente forma

$$y'(x) = a(x) \cdot b(y(x))$$

dove  $a(x)$  e  $b(x)$  sono funzioni continue rispettivamente negli intervalli  $I$  e  $J$ . Si tratta dunque di un'equazione differenziale del primo ordine ed è *non lineare* se  $b$  non è un polinomio di primo grado. Le equazioni non lineari sono in generale molto più difficili da trattare rispetto alle equazioni lineari. In questo caso la determinazione esplicita delle eventuali soluzioni è legata come vedremo alla forma particolare dell'equazione.

Consideriamo il relativo problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = a(x) \cdot b(y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

dove  $x_0 \in I$  e  $y_0 \in J$ . Se  $b(y_0) = b(y(x_0)) = 0$  allora il problema ha come soluzione la funzione costante  $y(x) = y_0$  (*soluzione stazionaria*). Se invece  $b(y_0) \neq 0$  allora si procede prima “separando le variabili”  $x$  e  $y$

$$\frac{y'(x)}{b(y(x))} = a(x)$$

e quindi si integra rispetto a  $x$  tenendo conto della condizione  $y(x_0) = y_0$

$$\int_{x_0}^x \frac{y'(x)}{b(y(x))} dx = \int_{x_0}^x a(x) dx.$$

Riscrivendo il primo integrale nella variabile  $y$  otteniamo

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{b(y)} dy = \int_{x_0}^x a(x) dx$$

Allora se  $H(y)$  è una primitiva di  $1/b(y)$  e  $A(x)$  è una primitiva di  $a(x)$  si ha che

$$H(y(x)) - H(y_0) = [H(y)]_{y_0}^{y(x)} = [A(x)]_{x_0}^x = A(x) - A(x_0).$$

A questo punto l'intervallo di esistenza e l'unicità della soluzione dipende dall'invertibilità della funzione  $H(y)$ :

$$y(x) = H^{-1}(A(x) - A(x_0) + H(y_0)).$$

—  $\diamond$  —

**Esempio 3.1** Risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) - y^2(x) \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

In questo caso la funzione  $a(x) = 1$  mentre  $b(y) = y - y^2$ . Dato che  $b(y_0) = 1/4 \neq 0$ , la soluzione cercata risolve

$$\int_{\frac{1}{2}}^{y(x)} \frac{1}{y(1-y)} dy = \int_0^x 1 dx.$$

Il primo integrale si sviluppa nel seguente modo

$$H(y) = \int \frac{1}{y(1-y)} dy = \int \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y} \right) dy = \log \left| \frac{y}{1-y} \right| + c$$

Quindi

$$\left[ \log \left| \frac{y}{1-y} \right| \right]_{\frac{1}{2}}^{y(x)} = [x]_0^x$$

ossia

$$H(y(x)) = \log \left| \frac{y(x)}{1-y(x)} \right| = x.$$

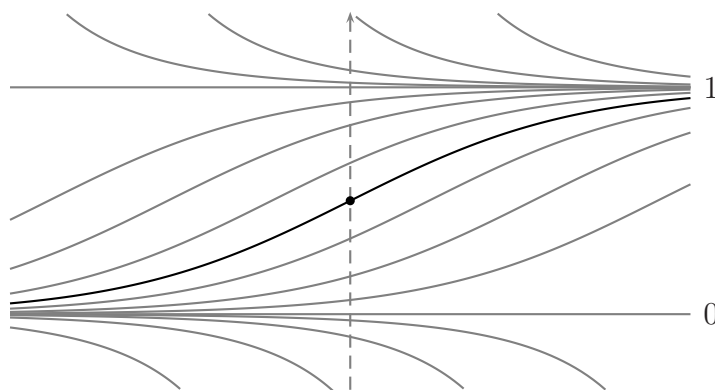
Per determinare la soluzione basta invertire la funzione  $H(y)$  ossia esplicitare la funzione  $y(x)$ :

$$\frac{y(x)}{1-y(x)} = \pm e^x.$$

Siccome  $y(0) = \frac{1}{2}$  si sceglie il segno positivo e

$$y(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

Nel seguente grafico questa soluzione é evidenziata rispetto al flusso delle altre soluzioni ottenute variando la condizione iniziale.



— ◊ —

Notiamo la presenza delle soluzioni stazionarie  $y(x) = 0$  e  $y(x) = 1$ . Inoltre si può facilmente dimostrare che la soluzione  $y(x) = 1$  è “attraente” ovvero se  $y(0) > 0$  allora la soluzione corrispondente tende a 1 per  $x \rightarrow +\infty$ .

—  $\diamond$  —

**Esempio 3.2** Risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2x y^2(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Qui  $a(x) = 2x$  mentre  $b(y) = y^2$ . Dato che  $b(y_0) = 1 \neq 0$ , la soluzione cercata risolve

$$\int_1^{y(x)} \frac{1}{y^2} dy = \int_0^x 2x dx$$

e dunque

$$\left[ -\frac{1}{y} \right]_1^{y(x)} = [x^2]_0^x$$

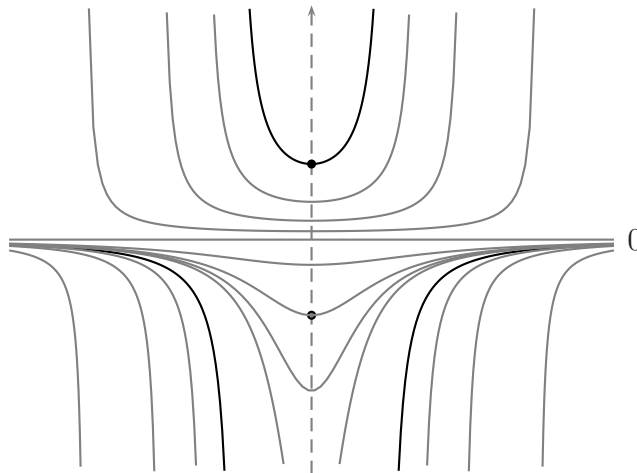
ossia

$$-\frac{1}{y(x)} + 1 = x^2.$$

Quindi

$$y(x) = \frac{1}{1 - x^2}.$$

e la soluzione è definita sull'intervallo massimale  $(-1, 1)$ . Nel seguente grafico questa soluzione è evidenziata rispetto al flusso delle altre soluzioni ottenute variando la condizione iniziale.



In questo caso c'è un'unica soluzione stazionaria  $y(x) = 0$ . Inoltre notiamo che se la condizione iniziale fosse stata  $y(0) = -1$  la soluzione sarebbe stata

$$y(x) = -\frac{1}{1 + x^2} \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

—  $\diamond$  —

**Esempio 3.3** Risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{x}{x^2 + 1}(y(x) - 1) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Qui  $a(x) = x/(x^2 + 1)$  mentre  $b(y) = y - 1$ . Dato che  $b(y_0) = -1 \neq 0$ , la soluzione cercata risolve

$$\int_0^{y(x)} \frac{1}{y-1} dy = \int_0^x \frac{x}{x^2 + 1} dx$$

e dunque

$$[\log |y - 1|]_0^{y(x)} = \left[ \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) \right]_0^x$$

ossia

$$\log |y(x) - 1| = \log \sqrt{x^2 + 1}.$$

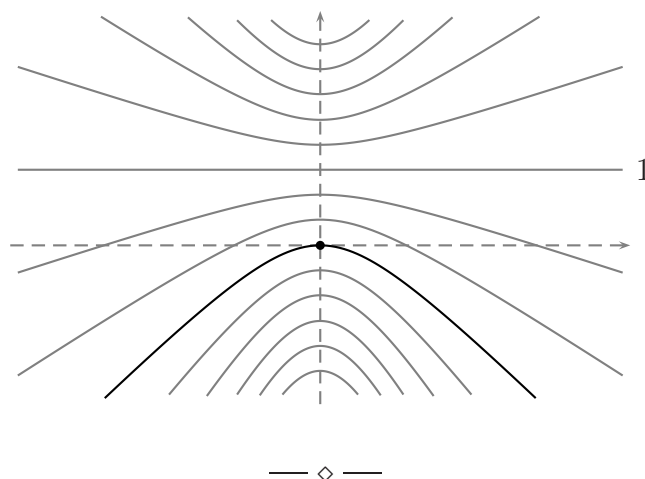
Esplicitiamo la funzione  $y(x)$ :

$$y(x) = 1 \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

Dato che  $y(0) = 0$  scegliamo il segno negativo e la soluzione è

$$y(x) = 1 - \sqrt{x^2 + 1} \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

Nel seguente grafico questa soluzione è evidenziata rispetto al flusso delle altre soluzioni ottenute variando la condizione iniziale. Anche questo caso c'è un'unica soluzione stazionaria  $y(x) = 1$ .



**Esempio 3.4** Risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2x (\cos y(x))^2 \\ y(0) = 2\pi \end{cases}$$

e determiniamo il limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x)$ .



Qui  $a(x) = 2x$  mentre  $b(y) = (\cos y)^2$ . Dato che  $b(y_0) = 1 \neq 0$ , la soluzione cercata risolve

$$\int_{2\pi}^{y(x)} \frac{1}{(\cos y)^2} dy = \int_0^x 2x dx$$

e dunque

$$[\tan y]_{2\pi}^{y(x)} = [x^2]_0^x$$

ossia

$$\tan y(x) = x^2.$$

Per esplicitare la  $y(x)$  dobbiamo invertire la funzione tangente:

$$y(x) = \arctan(x^2) + k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

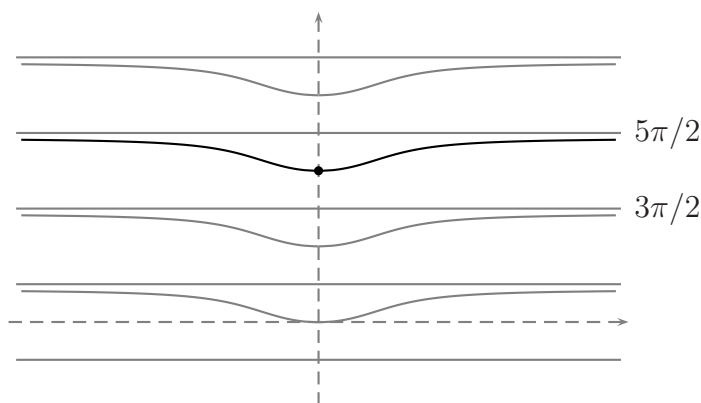
Il parametro  $k$  individua i diversi rami del grafico della tangente; nel nostro caso dobbiamo scegliere  $k = 2$  in modo da soddisfare la condizione iniziale  $y(0) = 2\pi$ . Quindi la soluzione è

$$y(x) = \arctan(x^2) + 2\pi \quad \text{per } x \in \mathbb{R}$$

e così

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}.$$

Nel seguente grafico questa soluzione è evidenziata rispetto al flusso delle altre soluzioni ottenute variando la condizione iniziale. Le soluzioni stazionarie sono infinite:  $y(x) = \pi/2 + k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$ .



— ◊ —

**Esempio 3.5** Risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2(1+x)y'(x) + xy(x)^3 = 0 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

e determiniamo il limite  $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y(x)$ .

Risistemando i termini abbiamo che per  $x \neq -1$

$$y'(x) = -\frac{x}{2(1+x)} \cdot y(x)^3.$$

Dato che  $b(y_0) = -1 \neq 0$ , la soluzione cercata risolve

$$\int_{-1}^{y(x)} \frac{1}{y^3} dy = -\frac{1}{2} \int_0^x \frac{x}{1+x} dx = -\frac{1}{2} \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx$$

e dunque

$$\left[\frac{1}{y^2}\right]_{-1}^{y(x)} = [x - \log|1+x|]_0^x$$

ossia

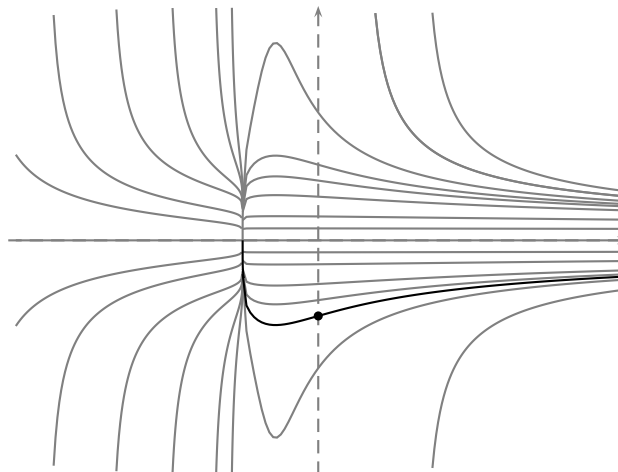
$$y(x)^2 = \frac{1}{x - \log|1+x| + 1}.$$

Ricordando che  $y(0) = -1$ , se esplicitiamo la  $y(x)$  otteniamo la soluzione

$$y(x) = -\frac{1}{\sqrt{x - \log(1+x) + 1}}$$

definita nell'intervallo massimale  $(-1, +\infty)$ .

La soluzione che abbiamo determinato è evidenziata nel seguente grafico rispetto al resto del flusso delle soluzioni ottenute variando la condizione iniziale. La soluzione stazionaria è  $y(x) = 0$ .



Ora calcoliamo il limite

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} -\frac{1}{\sqrt{x - \log(1+x) + 1}} = 0.$$