Appendice

Polinomi di Taylor

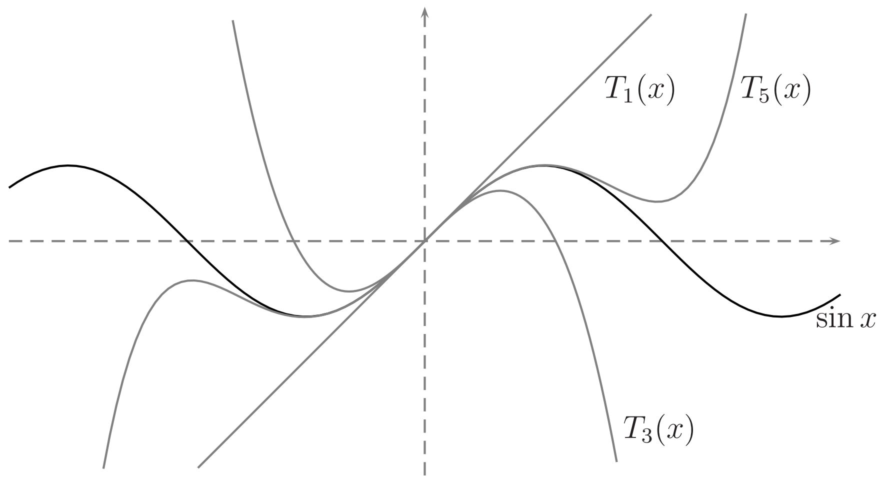
In molti problemi di analisi capita di dover considerare il comportamento di una funzione vicino ad un particolare punto. Uno strumento utile per questo scopo è il polinomio di Taylor: si approssima la funzione originale vicino al punto interessato con una funzione più semplice, un polinomio, in modo da riprodurne le caratteristiche del comportamento asintotico con la precisione necessaria. Vediamo la definizione precisa: se la funzione f è derivabile n volte in un intorno di un punto x_0 allora il polinomio di Taylor di ordine n della funzione f centrato nel punto x_0 è dato dalla formula

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Ad esempio i polinomi di Taylor di ordine da 0 a 5 della funzione $f(x) = \sin x$ nel punto $x_0 = 0$ si determinano facilmente dopo aver calcolato le prime 5 derivate della funzione $\sin x$ nel punto 0:

$$T_0(x) = 0, \quad T_1(x) = T_2(x) = x, \quad T_3(x) = T_4(x) = x - \frac{x^3}{3!}, \quad T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

Nel grafico seguente si può vedere come si realizza l'approssimazione. Vicino al punto scelto $x_0 = 0$, all'aumentare dell'ordine e dunque del grado, il grafico del polinomio di Taylor "aderisce" sempre di più al grafico della funzione originale. Notate anche che $T_1(x)$ rappresenta proprio la retta tangente al grafico della funzione nel punto x_0.



Questa proprietà di approssimazione del polinomio di Taylor si può enunciare in modo preciso: $T_n(x)$ è l'unico polinomio di grado minore o uguale a n tale che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

ossia per x che tende a x_0 la differenza tra $f(x)$ e $T_n(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a n. Con la notazione dell'"o-piccolo" la relazione diventa

$$f(x) = T_n(x) + o((x - x_0)^n).$$

Ricordando inoltre che due funzioni f e g sono asintoticamente equivalenti, ossia $f \sim g$, per x che tende a x_0 se e solo se f/g tende a 1 allora possiamo anche dire che

$$f(x) - T_{n-1}(x) \sim \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad \text{se } f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Ecco alcuni polinomi di Taylor centrati in 0 delle funzioni elementari:

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + o(x^3)$$

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)$$

$$(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 + o(x^4)$$

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 + o(x^3)$$

$$(1+x)^{-1/3} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 - \frac{14}{81}x^3 + o(x^3)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + o(x^7)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6)$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^7)$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + o(x^7)$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + o(x^7)$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x, \quad \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arctan x \quad \text{per } x > 0.$$

La determinazione di un polinomio di Taylor utilizzando solo la definizione può essere alle volte particolarmente onerosa perché implica il calcolo di parecchie derivate. Tuttavia se una funzione è la composizione di funzioni di cui si conoscono gli sviluppi si può anche svolgere il calcolo nel seguente modo facendo attenzione all'algebra degli "o-piccoli". Ad esempio calcoliamo il polinomio di Taylor di ordine 4 della funzione $\log(\cos x)$ in 0. Dallo sviluppo di $\cos x$

$$\log(\cos x) = \log\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)\right)$$

Posto $y = -\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)$, dato che y tende a 0 quando x tende a 0, abbiamo che per lo sviluppo di $\log(1+y)$

$$\log(\cos x) = \log(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + o(y^4).$$

Ora nell'effettuare la sostituzione, per evitare di fare conti inutili, è importante preoccuparsi solo del calcolo esatto dei coefficienti delle potenze di x di ordine minore o uguale a 4:

$$\begin{aligned}
\log(\cos x) &= \left[-\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)\right] - \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2!}x^2 + o(x^2)\right]^2 + o(x^4) \\
&= -\frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right)x^4 + o(x^4) \\
&= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

In modo simile sono stati calcolati i seguenti polinomi di Taylor in $x_0 = 0$:

$$\log(1+\sin x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)$$

$$\log(1+\tan x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{12}x^4 + o(x^4)$$

$$\log(\cos x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6)$$

$$(\cos x)^{\sin x} = 1 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{8}x^6 - \frac{1}{80}x^7 + o(x^7)$$

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + o(x^5)$$

$$e^{\tan x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4)$$

$$e^{1-\cos x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{720}x^6 + o(x^6)$$

$$e^{\cos x - 1} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{31}{720}x^6 + o(x^6)$$

$$(1+x)^x = 1 + x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{6}x^4 + o(x^4)$$
$$(1+\sin(x))^{\sin x} = 1 + x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$$
$$(1+\tan(x))^{\tan x} = 1 + x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^4 + o(x^4)$$
$$\tan(\sin x) = x + \frac{1}{5}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{107}{5040}x^7 + o(x^7)$$
$$\sin(\tan x) = x + \frac{1}{5}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{55}{1008}x^7 + o(x^7).$$

Concludiamo questa appendice con alcune informazioni utili:

PI greco: $\pi = 3.141592653589...$

Numero di Nepero: $e = 2.718281828459...$

Approssimazione di Stirling:
$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \left[1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]$

Costante di Eulero: $\gamma = 0.577215664901...$

Numeri armonici: $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \log n + \gamma + o(1).$