JOURNAL

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

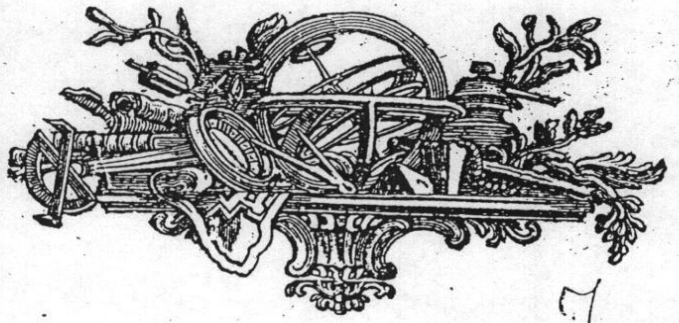
PUBLIÉ

PAR LE CONSEIL D'INSTRUCTION

DE CET ÉTABLISSEMENT.

QUINZIÈME CAHIER.

TOME VIII.



A PARIS,

DE L'IMPRIMERIE IMPÉRIALE.

Décembre 1809.

MÉMOIRE

Sur la Variation des Constantes arbitraires dans les questions de Mécanique;

Lu à l'Institut le 16 Octobre 1809;

Par M. POISSON.

LA solution de tous les problèmes de dynamique, est renfermée dans une formule générale, que l'on déduit du principe des vîtesses virtuelles, et qui se décompose, dans chaque cas particulier, en autant d'équations différentielles secondes que l'on a de variables à déterminer en fonctions du temps; mais ce n'est que pour un très-petit nombre de questions que l'on parvient à intégrer complétement ces équations; et le plus souvent on n'obtient pas d'autre intégrale que celles qui sont fournies par les principes généraux de la mécanique, tels que le principe de la conservation du centre de gravité, celui des aires et celui des forces vives. Il arrive quelquefois qu'en faisant abstraction d'une partie des forces appliquées aux mobiles, les équations du mouvement s'intègrent par les méthodes connues. Si les forces négligées sont très-petites par rapport à celles que l'on conserve, ces intégrales donnent la solution du problème par une première approximation, et servent de base à toutes les approximations suivantes. Ainsi, par exemple, les équations du mouvement elliptique sont les intégrales des équations du mouvement des planètes autour du Soleil, quand on néglige leur action réciproque. Les constantes arbitraires qui complètent ces intégrales, sont les six élémens elliptiques de chaque planète; savoir, le grand axe et l'excentricité de son ellipse, sa longitude à une époque déterminée, la longitude de son périhélie, l'inclinaison du plan de son orbite, et la longitude de ses nœuds sur un plan fixe. Ces quantités seraient donc invariables, si l'action réciproque des planètes était absolument insensible; mais les observations ont bientôt fait voir que les élémens

elliptiques ne sont pas constans, et que les orbites planétaires doivent être regardées comme des ellipses dont les dimensions et la position dans l'espace, varient par degrés insensibles. Pour déterminer ces variations par la théorie, il a fallu conserver dans les équations différentielles, les termes dus à l'action réciproque des planètes; et l'on imagina, pour résoudre ces nouvelles équations, de considérer comme variables les constantes arbitraires des intégrales relatives au mouvement elliptique. Il est remarquable que ce procédé, l'un des plus féconds de l'analyse, qui consiste à faire varier des quantités regardées d'abord comme constantes, soit indiqué ici aux géomètres par les résultats des observations, dont il n'est, pour ainsi dire, qu'une sorte de traduction. Depuis *Euler*, qui donna le premier les expressions différentielles des variations de la longitude du nœud et de l'inclinaison de l'orbite, on a trouvé, par différens moyens, les différentielles des autres élémens; mais dans les *Mémoires de Berlin*, pour les années 1781 et 1782, M. *Lagrange* a donné sur ce sujet une théorie générale et complète, dans laquelle les différentielles des élémens elliptiques sont exprimées au moyen des différences partielles d'une même fonction, prises par rapport aux coordonnées de la planète troublée, et multipliées par des fonctions de ces mêmes coordonnées; excepté, cependant, la différentielle de la longitude de la planète à une époque déterminée, que M. *Lagrange* avait exprimée en série, et que j'ai mise depuis sous une forme plus simple (*).

Il ne semblait pas que cette importante théorie pût encore être perfectionnée, lorsque les deux géomètres qui ont le plus contribué à la rendre complète, en ont fait de nouveau le sujet de leurs méditations. M. *Lagrange*, dans un Mémoire lu à l'Institut, il y a environ un an, et M. *Laplace*, dans un Supplément à la *Mécanique céleste*, publié à la même époque, ont su donner une forme nouvelle aux variations des élémens des planètes. Dans ces nouvelles formules, les différentielles des élémens sont exprimées au moyen des différences partielles d'une même

(*) Voyez le Mémoire sur les inégalités séculaires des moyens mouvemens des Planètes, *page 1.re* de ce volume.

fonction, comme dans les anciennes; mais ces différences sont prises par rapport aux élémens de la planète troublée, et multipliées par des fonctions de ces mêmes élémens qui ne renferment pas le temps d'une manière explicite; avantage précieux, sur-tout lorsqu'on veut calculer les inégalités séculaires, ou les inégalités à très-longues périodes, dépendantes d'un argument déterminé.

Jusqu'ici nous voyons que la théorie du mouvement des planètes autour du soleil, est la seule question de mécanique où l'on ait fait usage de la variation des constantes arbitraires. Il appartenait à l'auteur de la *Mécanique analytique*, de considérer la théorie de cette variation dans toute sa généralité, et d'en étendre l'usage à tous les problèmes de la mécanique: c'est, en effet, le but du dernier Mémoire que M. *Lagrange* a lu à l'Institut.

Les recherches que je soumets aujourd'hui à la classe, sont relatives à cette même théorie, que je reprends en entier sous un nouveau point de vue. Je considère le mouvement d'un système de corps liés entre eux d'une manière quelconque, et soumis à des forces dirigées vers des centres fixes ou mobiles, dont les intensités sont des fonctions quelconques des distances des corps à ces centres. Je suppose qu'on ait d'abord intégré les équations différentielles de ce mouvement, en négligeant une partie des forces données, et qu'ensuite on fasse varier les constantes arbitraires qui complètent ces intégrales, afin de les étendre au cas où l'on a égard à toutes les forces. Cela posé, je cherche les différentielles premières des constantes arbitraires devenues variables: j'exprime leurs valeurs au moyen des différences particulières d'une certaine fonction que l'on obtient en prenant l'intégrale de la somme des forces négligées dans le premier cas, multipliées respectivement par l'élément de leur direction. Ces différences partielles sont prises par rapport aux constantes arbitraires, et multipliées par des fonctions de ces mêmes quantités, qui ne renfermeront jamais le temps d'une manière explicite, ainsi que je le prouve par une démonstration directe. Les formules du dernier Mémoire de M. *Lagrange* sont inverses des nôtres: elles donnent les différences partielles de la même fonction, au moyen des différentielles

des constantes arbitraires. Je les rapporte dans la suite de ce Mémoire, afin de les comparer à celles que nous avons obtenues, et de montrer la singulière analogie qui existe entre ces deux genres de formules.

Après avoir trouvé les expressions générales des variations des constantes arbitraires, j'en fais l'application à deux problèmes particuliers. Je choisis, pour premier exemple, le mouvement d'un point attiré vers un centre fixe, suivant une loi quelconque. On parvient à séparer les variables dans les équations différentielles du mouvement, quelle que soit la loi de l'attraction; mais tant que cette loi reste indéterminée, il est impossible d'achever les intégrations et d'exprimer, sous forme finie, les valeurs des variables. Cette circonstance n'empêche pas de déterminer, au moyen de nos formules, les variations des six arbitraires contenues dans les intégrales de ces équations différentielles. J'ai pris pour ces constantes celle qui entre dans l'équation des forces vives, celle qui exprime l'aire décrite dans chaque unité de temps, par le rayon vecteur du mobile, l'inclinaison du plan de la trajectoire et la longitude de la ligne des nœuds sur un plan fixe, la distance angulaire de cette ligne à un point de l'orbite où la différentielle du rayon vecteur est égale à zéro, enfin la constante qui se trouve nécessairement ajoutée au temps, et qui provient de ce que les équations différentielles ne renfermant que l'élément de cette variable, il s'ensuit qu'on peut y satisfaire, en y substituant le temps augmenté d'une constante arbitraire. La forme des valeurs que l'on trouve pour les différentielles de ces six quantités, ne dépend pas de la loi de l'attraction; elles doivent dont s'accorder avec les différentielles des élémens des planètes, qui se rapportent au cas de la nature où cette force suit la raison inverse du carré des distances. En effet, nos valeurs coïncident, dans ce cas, avec celles de M. *Lagrange*, et, par quelques transformations, il est aisé de prouver qu'elles s'accordent aussi avec celles du Supplément à la *Mécanique céleste*.

Pour second exemple de l'application des formules générales, je prends les constantes arbitraires du mouvement de rotation d'un corps

solide de figure quelconque. On sait qu'*Euler* est parvenu à ramener aux quadratures les intégrales des équations de ce mouvement, lorsqu'aucune force n'agit sur les points du corps; nous partons donc de ces intégrales, et nous déterminons les variations des six arbitraires qu'elles présentent. Cette détermination exige le calcul de quinze coëfficiens, comme dans le premier exemple. Le résultat fait voir que tous ces coëfficiens sont, ou des constantes déterminées, ou des fonctions des constantes arbitraires; ce qui pourrait servir, s'il en était besoin, à confirmer la théorie générale. Quant aux différentielles des six constantes, elles sont absolument de même forme que celles des constantes analogues, dans le premier problème. Si, par exemple, on considère, dans le mouvement de rotation, le plan que M. *Laplace* a nommé *Plan invariable*, sa position ne changeant pas, tant qu'aucune force étrangère n'agit pas sur les points du corps, il s'ensuit que son inclinaison et la longitude de son nœud sur un plan fixe, doivent être au nombre des six constantes arbitraires, qui deviennent variables par l'effet des nouvelles forces; or on trouve, pour les différentielles de ces deux angles, des expressions de même forme que pour les différentielles de l'inclinaison et de la longitude du nœud de l'orbite, dans le mouvement d'un point attiré vers un centre fixe.

Si le mouvement de rotation que l'on considère est celui de la terre autour de son centre de gravité, le plan, qui serait invariable sans l'action du soleil et de la lune, diffère toujours très-peu de l'équateur. L'écart de ces deux plans est du même ordre que le déplacement des pôles de rotation à la surface de la terre, qui ne peut jamais devenir appréciable, ainsi que je l'ai prouvé dans mon dernier Mémoire. En négligeant donc cet écart, les différentielles de l'inclinaison et de la longitude du nœud du plan invariable, sur un plan fixe, appartiendront au plan de l'équateur; par conséquent les deux formules qui donnent ces différentielles, renfermeront toute la théorie de la précession des équinoxes et de la nutation de l'axe terrestre. Il suffit, dans cette théorie, de considérer les inégalités à longues périodes, et l'on peut faire abstraction des inégalités qui dépendent du mouvement diurne de

la terre; on peut aussi borner l'approximation aux premières puissances des forces perturbatrices et aux carrés des parallaxes des astres qui agissent sur le sphéroïde terrestre : nous avons fait ces réductions dans nos formules; en les comparant ensuite à celles du V.^e Livre de *la Mécanique céleste*, nous trouvons qu'elles sont identiquement les mêmes; ce qui peut encore servir à confirmer le résultat de nos calculs.

Expressions générales des variations des Constantes arbitraires.

[1.] Lorsque l'on considère le mouvement d'un système de corps, la position de chacun d'eux est déterminée, à chaque instant, par trois coordonnées qui sont des fonctions du temps, et le problème consiste à déterminer ces fonctions. En général, ces variables sont liées entre elles par une ou plusieurs équations données par la nature du système; de sorte qu'il ne reste qu'un nombre de variables indépendantes, égal à trois fois le nombre des corps, moins le nombre des équations de condition. Pour fixer les idées, je supposerai les variables indépendantes, au nombre de trois, que je représenterai par φ, ψ et θ, et je désignerai par φ', ψ', θ', leurs coëfficiens différentiels, $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$, dt étant l'élément du temps. En ayant égard aux équations de condition du système, on pourra toujours exprimer les coordonnés des corps et leurs différentielles premières en fonctions de ces six quantités; par conséquent toute fonction des coordonnées pourra être censée une fonction de φ, ψ, θ, et toute fonction qui renfermera en outre les vîtesses des corps parallèles aux axes des coordonnées, pourra être transformée en une fonction de φ, ψ, θ, φ', ψ', θ'. Si donc nous représentons par m, m', m'', &c. les masses des corps; par x, y, z, les coordonnées rectangulaires de m; par x', y', z', celles de m', &c.; et par T la demi-somme des forces vives de tous ces corps, de manière qu'on ait

$$T=\frac{m}{2}\cdot\left(\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}\right)+\frac{m'}{2}\cdot\left(\frac{dx'^2+dy'^2+dz'^2}{dt^2}\right)+\text{&c.};$$

nous pourrons regarder T comme une fonction de φ, ψ, θ, φ', ψ', θ', de forme donnée dans chaque cas particulier. De même, si nous

supposons que les forces qui agissent sur les corps sont dirigées vers des centres fixes ou mobiles, et que l'intensité de chacune d'elles est une fonction quelconque de la distance du mobile au centre d'action; en faisant la somme de ces forces multipliées chacune par l'élément de sa direction, nous aurons une formule différentielle intégrable, dont l'intégrale sera une fonction des coordonnées des corps et des centres d'action : cette intégrale, que nous représentons par V, sera donc une fonction de φ, ψ, θ, donnée dans chaque cas particulier. Quand les centres d'action seront en mouvement, la valeur des V renfermera le temps t; indépendamment des variables φ, ψ et θ; mais, dans aucun cas, cette fonction ne contiendra les variables φ', ψ' et θ'.

Cela posé, M. *Lagrange* a fait voir dans la *Mécanique analytique*, que l'on peut donner cette forme aux équations différentielles du mouvement du système que l'on considère :

$$d\cdot\frac{dT}{d\varphi'}:dt-\frac{dT}{d\varphi}+\frac{dV}{d\varphi}=0,$$

$$d\cdot\frac{dT}{d\psi'}:dt-\frac{dT}{d\psi}+\frac{dV}{d\psi}=0,$$

$$d\cdot\frac{dT}{d\theta'}:dt-\frac{dT}{d\theta}+\frac{dV}{d\theta}=0.$$

On peut les simplifier, en faisant

$$T-V=R,\quad \frac{dT}{d\varphi'}=s,\quad \frac{dT}{d\psi'}=u,\quad \frac{dT}{d\theta'}=v;$$

elles deviennent alors

$$\frac{ds}{dt}=\frac{dR}{d\varphi},\quad \frac{du}{dt}=\frac{dR}{d\psi},\quad \frac{dv}{dt}=\frac{dR}{d\theta};\qquad (1)$$

et comme V ne renferme pas les variables φ', ψ' et θ', il s'ensuit que les valeurs de s, u, v, sont la même chose que

$$s=\frac{dR}{d\varphi'},\quad u=\frac{dR}{d\psi'},\quad v=\frac{dR}{d\theta'}.\qquad (2)$$

De

De cette manière, les équations du mouvement sont ramenées à la forme la plus simple qu'on puisse leur donner.

[2.] En vertu des équations (2), les trois nouvelles variables s, u, v, sont des fonctions de φ, ψ, θ, φ', ψ', θ'; donc réciproquement φ', ψ', θ' peuvent être regardées comme des fonctions de φ, ψ, θ, s, u, v, données par ces mêmes équations. Ainsi, au lieu des six variables φ', ψ, θ, φ', ψ', θ', que nous avions d'abord, nous aurons maintenant les six variables φ, ψ, θ, s, u, v; et nous pourrons supposer une fonction quelconque des six premières, transformée en une fonction des six dernières.

En considérant R comme une fonction de φ, ψ, θ, s, u, v, ses différences partielles, relatives à φ, ψ, θ, ne seront pas les mêmes qu'en regardant cette quantité comme une fonction de φ, ψ, θ, φ', ψ', θ'. Pour les distinguer, nous désignerons par $\frac{dR}{d\varphi}$, $\frac{dR}{d\psi}$, $\frac{dR}{d\theta}$, sans parenthèses, les différences prises dans la première hypothèse, et nous emploîrons les notations $\left(\frac{dR}{d\varphi}\right)$, $\left(\frac{dR}{d\psi}\right)$, $\left(\frac{dR}{d\theta}\right)$, avec parenthèses, pour indiquer les différences relatives à la seconde hypothèse. Les dernières forment les seconds membres des équations (1); de sorte qu'il faudra écrire

$$\frac{ds}{dt}=\left(\frac{dR}{d\varphi}\right),\quad \frac{du}{dt}=\left(\frac{dR}{d\psi}\right),\quad \frac{dv}{dt}=\left(\frac{dR}{d\theta}\right).\qquad (1)$$

Or, les variables s, u, v n'entrant dans R qu'en tant qu'elles sont contenues dans les valeurs de φ', ψ', θ', données par les équations (2), il s'ensuit que l'on aura

$$\frac{dR}{d\varphi}=\left(\frac{dR}{d\varphi}\right)+\frac{dR}{d\varphi'}\cdot\frac{d\varphi'}{d\varphi}+\frac{dR}{d\psi'}\cdot\frac{d\psi'}{d\varphi}+\frac{dR}{d\theta'}\cdot\frac{d\theta'}{d\varphi},$$

$$\frac{dR}{d\psi}=\left(\frac{dR}{d\psi}\right)+\frac{dR}{d\varphi'}\cdot\frac{d\varphi'}{d\psi}+\frac{dR}{d\psi'}\cdot\frac{d\psi'}{d\psi}+\frac{dR}{d\theta'}\cdot\frac{d\theta'}{d\psi},$$

$$\frac{dR}{d\theta}=\left(\frac{dR}{d\theta}\right)+\frac{dR}{d\varphi'}\cdot\frac{d\varphi'}{d\theta}+\frac{dR}{d\psi'}\cdot\frac{d\psi'}{d\theta}+\frac{dR}{d\theta'}\cdot\frac{d\theta'}{d\theta};$$

donc, en mettant s, u, v, à la place de $\frac{dR}{d\varphi'}$, $\frac{dR}{d\psi'}$, $\frac{dR}{d\theta'}$, les équations (1) deviendront

$$\left.\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= \frac{dR}{d\varphi} - s\cdot\frac{d\varphi'}{d\varphi} - u\cdot\frac{d\psi'}{d\varphi} - v\cdot\frac{d\theta'}{d\varphi},\\ \frac{du}{dt} &= \frac{dR}{d\psi} - s\cdot\frac{d\varphi'}{d\psi} - u\cdot\frac{d\psi'}{d\psi} - v\cdot\frac{d\theta'}{d\psi},\\ \frac{dv}{dt} &= \frac{dR}{d\theta} - s\cdot\frac{d\varphi'}{d\theta} - u\cdot\frac{d\psi'}{d\theta} - v\cdot\frac{d\theta'}{d\theta}.\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

[3.] Si l'on prend les différences partielles de R, par rapport aux variables s, u, v, qui entrent dans R parce qu'elles sont contenues dans φ', ψ', θ', on aura

$$\begin{aligned}\frac{dR}{ds} &= \frac{dR}{d\varphi'}\cdot\frac{d\varphi'}{ds} + \frac{dR}{d\psi'}\cdot\frac{d\psi'}{ds} + \frac{dR}{d\theta'}\cdot\frac{d\theta'}{ds},\\ \frac{dR}{du} &= \frac{dR}{d\varphi'}\cdot\frac{d\varphi'}{du} + \frac{dR}{d\psi'}\cdot\frac{d\psi'}{du} + \frac{dR}{d\theta'}\cdot\frac{d\theta'}{du},\\ \frac{dR}{dv} &= \frac{dR}{d\varphi'}\cdot\frac{d\varphi'}{dv} + \frac{dR}{d\psi'}\cdot\frac{d\psi'}{dv} + \frac{dR}{d\theta'}\cdot\frac{d\theta'}{dv};\end{aligned}$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\begin{aligned}\frac{dR}{ds} &= s\cdot\frac{d\varphi'}{ds} + u\cdot\frac{d\psi'}{ds} + v\cdot\frac{d\theta'}{ds},\\ \frac{dR}{du} &= s\cdot\frac{d\varphi'}{du} + u\cdot\frac{d\psi'}{du} + v\cdot\frac{d\theta'}{du},\\ \frac{dR}{dv} &= s\cdot\frac{d\varphi'}{dv} + u\cdot\frac{d\psi'}{dv} + v\cdot\frac{d\theta'}{dv}.\end{aligned}$$

Ces équations sont identiques en y considérant R, φ', ψ', θ', comme des fonctions de φ, ψ, θ, s, u, v; par conséquent on peut les différencier par rapport à l'une quelconque de ces six variables; ce qui produira de nouvelles équations qui nous seront bientôt utiles.

1.° En différenciant la première successivement par rapport à φ, à ψ et à θ, il vient

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2R}{ds\,d\varphi} &= s\cdot\frac{d^2\varphi'}{ds\,d\varphi} + u\cdot\frac{d^2\psi'}{ds\,d\varphi} + v\cdot\frac{d^2\theta'}{ds\,d\varphi},\\ \frac{d^2R}{ds\,d\psi} &= s\cdot\frac{d^2\varphi'}{ds\,d\psi} + u\cdot\frac{d^2\psi'}{ds\,d\psi} + v\cdot\frac{d^2\theta'}{ds\,d\psi},\\ \frac{d^2R}{ds\,d\theta} &= s\cdot\frac{d^2\varphi'}{ds\,d\theta} + u\cdot\frac{d^2\psi'}{ds\,d\theta} + v\cdot\frac{d^2\theta'}{ds\,d\theta},\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

La seconde et la troisième donneraient semblablement

$$\begin{aligned}\frac{d^2R}{du\,d\varphi} &= s\cdot\frac{d^2\varphi'}{du\,d\varphi} + u\cdot\frac{d^2\psi'}{du\,d\varphi} + v\cdot\frac{d^2\theta'}{du\,d\varphi};\\ \frac{d^2R}{du\,d\psi} &= s\cdot\frac{d^2\varphi'}{du\,d\psi} + u\cdot\frac{d^2\psi'}{du\,d\psi} + v\cdot\frac{d^2\theta'}{du\,d\psi},\\ \frac{d^2R}{du\,d\theta} &= s\cdot\frac{d^2\varphi'}{du\,d\theta} + u\cdot\frac{d^2\psi'}{du\,d\theta} + v\cdot\frac{d^2\theta'}{du\,d\theta};\\ \frac{d^2R}{dv\,d\varphi} &= s\cdot\frac{d^2\varphi'}{dv\,d\varphi} + u\cdot\frac{d^2\psi'}{dv\,d\varphi} + v\cdot\frac{d^2\theta'}{dv\,d\varphi},\\ \frac{d^2R}{dv\,d\psi} &= s\cdot\frac{d^2\varphi'}{dv\,d\psi} + u\cdot\frac{d^2\psi'}{dv\,d\psi} + v\cdot\frac{d^2\theta'}{dv\,d\psi},\\ \frac{d^2R}{dv\,d\theta} &= s\cdot\frac{d^2\varphi'}{dv\,d\theta} + u\cdot\frac{d^2\psi'}{dv\,d\theta} + v\cdot\frac{d^2\theta'}{dv\,d\theta}.\end{aligned}$$

2.° En différenciant la première par rapport à u, la deuxième par rapport à s, et retranchant ensuite l'une de l'autre, on trouve:

$$\frac{d\psi'}{ds} = \frac{d\varphi'}{du}.$$

On trouvera d'une manière semblable deux équations analogues à celle-ci, savoir:

$$\frac{d\psi'}{dv} = \frac{d\theta'}{du}, \qquad \frac{d\theta'}{ds} = \frac{d\varphi'}{dv}.$$

[4.] Maintenant supposons que l'on connaisse une des intégrales premières des équations du mouvement, renfermant une seule constante arbitraire que nous désignerons par a; cette équation intégrale, résolue par rapport à a, sera de cette forme:

$$a = \text{fonct.}\,(\varphi, \psi, \theta, \varphi', \psi', \theta', t);$$

mais, comme nous regardons φ', ψ', θ' comme des fonctions de φ, ψ, θ, s, u, v, données par les équations (2), il est évident qu'on peut

supposer à la valeur de a, cette autre forme :

$$a = \text{fonct.}\,(\varphi, \downarrow, \theta, s, u, v, t);$$

on aura donc, en prenant la différentielle complète de a par rapport à t,

$$P\,dt + \frac{da}{d\varphi}\cdot d\varphi + \frac{da}{d\downarrow}\cdot d\downarrow + \frac{da}{d\theta}\cdot d\theta + \frac{da}{ds}\cdot ds + \frac{da}{du}\cdot du + \frac{da}{dv}\cdot dv = 0;$$

$P\,dt$ désignant la différentielle de la valeur de a, prise par rapport au temps t qui y entre explicitement. Or si l'on substitue, dans cette équation, $\varphi'\,dt$, $\downarrow'\,dt$, $\theta'\,dt$, à la place de $d\varphi$, $d\downarrow$, $d\theta$, et que l'on y considère φ', $\downarrow'$, θ' comme des fonctions de φ, $\downarrow$, θ, s, u, v, données par les équations (2); si de plus on remplace, dans la même équation, ds, du, dv par leurs valeurs tirées des équations (3); son premier membre deviendra une fonction de t, φ, $\downarrow$, θ, s, u, v, qui devra être identiquement nulle : de sorte qu'après ces substitutions on pourra différencier cette équation par rapport à l'une quelconque de ces sept variables.

Les substitutions que nous indiquons donnent :

$$\begin{aligned} P\,dt &+ \frac{da}{d\varphi}\cdot\varphi'\cdot dt + \frac{da}{d\downarrow}\cdot\downarrow'\cdot dt + \frac{da}{d\theta}\cdot\theta'\cdot dt \\ &+ \frac{da}{ds}\cdot\left(\frac{dR}{d\varphi} - s\cdot\frac{d\varphi'}{d\varphi} - u\cdot\frac{d\downarrow'}{d\varphi} - v\cdot\frac{d\theta'}{d\varphi}\right)\cdot dt \qquad \text{(a)} \\ &+ \frac{da}{du}\cdot\left(\frac{dR}{d\downarrow} - s\cdot\frac{d\varphi'}{d\downarrow} - u\cdot\frac{d\downarrow'}{d\downarrow} - v\cdot\frac{d\theta'}{d\downarrow}\right)\cdot dt \\ &+ \frac{da}{dv}\cdot\left(\frac{dR}{d\theta} - s\cdot\frac{d\varphi'}{d\theta} - u\cdot\frac{d\downarrow'}{d\theta} - v\cdot\frac{d\theta'}{d\theta}\right)\cdot dt = 0. \end{aligned}$$

Je différencie cette équation par rapport à φ; il est évident que j'aurai une première partie qui ne sera autre chose que le développement de la différentielle complète de $\frac{da}{d\varphi}$, par rapport à t; puis une seconde partie qui proviendra des différentielles relatives à φ, de φ', $\downarrow'$, θ', et des

quantités renfermées entre les parenthèses, c'est-à-dire, qu'on a de cette manière l'équation

$$\begin{aligned} d\cdot\frac{da}{d\varphi} &+ \frac{da}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi'}{d\varphi}\cdot dt + \frac{da}{d\downarrow}\cdot\frac{d\downarrow'}{d\varphi}\cdot dt + \frac{da}{d\theta}\cdot\frac{d\theta'}{d\varphi}\cdot dt \\ &+ \frac{da}{ds}\left(\frac{d^2R}{d\varphi^2} - s\cdot\frac{d^2\varphi'}{d\varphi^2} - u\cdot\frac{d^2\downarrow'}{d\varphi^2} - v\cdot\frac{d^2\theta'}{d\varphi^2}\right)dt \\ &+ \frac{da}{du}\left(\frac{d^2R}{d\varphi\,d\downarrow} - s\cdot\frac{d^2\varphi'}{d\varphi\,d\downarrow} - u\cdot\frac{d^2\downarrow'}{d\varphi\,d\downarrow} - v\cdot\frac{d^2\theta'}{d\varphi\,d\downarrow}\right)dt \\ &+ \frac{da}{dv}\left(\frac{d^2R}{d\varphi\,d\theta} - s\cdot\frac{d^2\varphi'}{d\varphi\,d\theta} - u\cdot\frac{d^2\downarrow'}{d\varphi\,d\theta} - v\cdot\frac{d^2\theta'}{d\varphi\,d\theta}\right)dt = 0. \end{aligned}$$

Si l'on considère une autre intégrale première des équations du mouvement, dont la constante arbitraire soit b, on aura une équation analogue à cette dernière et qui s'en déduira en y mettant b à la place de a. Je forme donc cette nouvelle équation, puis je la multiplie par $\frac{da}{ds}$, et je la retranche de la précédente, multipliée par $\frac{db}{ds}$; cette soustraction donne

$$\begin{aligned} &\frac{db}{ds}\cdot d\cdot\frac{da}{d\varphi} - \frac{da}{ds}\cdot d\cdot\frac{db}{d\varphi} \\ &+ \frac{d\varphi'}{d\varphi}\cdot\left(\frac{db}{ds}\cdot\frac{da}{d\varphi} - \frac{da}{ds}\cdot\frac{db}{d\varphi}\right)\cdot dt \\ &+ \frac{d\downarrow'}{d\varphi}\cdot\left(\frac{db}{ds}\cdot\frac{da}{d\downarrow} - \frac{da}{ds}\cdot\frac{db}{d\downarrow}\right)\cdot dt \\ &+ \frac{d\theta'}{d\varphi}\cdot\left(\frac{db}{ds}\cdot\frac{da}{d\theta} - \frac{da}{ds}\cdot\frac{db}{d\theta}\right)\cdot dt \\ &+ \left(\frac{db}{ds}\cdot\frac{da}{du} - \frac{da}{ds}\cdot\frac{db}{du}\right)\cdot\left(\frac{d^2R}{d\varphi\,d\downarrow} - s\cdot\frac{d^2\varphi'}{d\varphi\,d\downarrow} - u\cdot\frac{d^2\downarrow'}{d\varphi\,d\downarrow} - v\cdot\frac{d^2\theta'}{d\varphi\,d\downarrow}\right)\cdot dt \\ &+ \left(\frac{db}{ds}\cdot\frac{da}{dv} - \frac{da}{ds}\cdot\frac{db}{dv}\right)\cdot\left(\frac{d^2R}{d\varphi\,d\theta} - s\cdot\frac{d^2\varphi'}{d\varphi\,d\theta} - u\cdot\frac{d^2\downarrow'}{d\varphi\,d\theta} - v\cdot\frac{d^2\theta'}{d\varphi\,d\theta}\right)\cdot dt = 0. \end{aligned}$$

On trouvera d'une manière semblable une autre équation analogue à celle-ci, et qui s'en déduit en y échangeant les lettres φ et $\downarrow$ entre elles, et les lettres s et u aussi entre elles. On obtiendra encore une autre équation semblable, en échangeant dans la précédente les lettres s et v entre elles, et les lettres φ et θ aussi entre elles. Or, si l'on forme ces deux

nouvelles équations, qu'on les ajoute ensuite à leur analogue, on trouve que la somme des trois se réduit à

$$\frac{db}{ds}\cdot d\cdot\frac{da}{d\varphi}-\frac{da}{ds}\cdot d\cdot\frac{db}{d\varphi}+\frac{db}{du}\cdot d\cdot\frac{da}{d\downarrow}-\frac{da}{du}\cdot d\cdot\frac{db}{d\downarrow}$$
$$+\frac{db}{dv}\cdot d\cdot\frac{da}{d\theta}-\frac{da}{dv}\cdot d\cdot\frac{db}{d\theta}$$
$$+\frac{d\varphi'}{d\varphi}\cdot\left(\frac{db}{ds}\cdot\frac{da}{d\varphi}-\frac{db}{d\varphi}\cdot\frac{da}{ds}\right).dt+\frac{d\downarrow'}{d\downarrow}\cdot\left(\frac{db}{du}\cdot\frac{da}{d\downarrow}-\frac{db}{d\downarrow}\cdot\frac{da}{du}\right).dt$$
$$+\frac{d\theta'}{d\theta}\cdot\left(\frac{db}{dv}\cdot\frac{da}{d\theta}-\frac{db}{d\theta}\cdot\frac{da}{dv}\right).dt$$
$$+\frac{d\downarrow'}{d\varphi}\cdot\left(\frac{db}{ds}\cdot\frac{da}{d\downarrow}-\frac{db}{d\downarrow}\cdot\frac{da}{ds}\right).dt+\frac{d\varphi'}{d\downarrow}\cdot\left(\frac{db}{du}\cdot\frac{da}{d\varphi}-\frac{db}{d\varphi}\cdot\frac{da}{du}\right).dt$$
$$+\frac{d\downarrow'}{d\theta}\cdot\left(\frac{db}{dv}\cdot\frac{da}{d\downarrow}-\frac{db}{d\downarrow}\cdot\frac{da}{dv}\right).dt$$
$$+\frac{d\theta'}{d\varphi}\cdot\left(\frac{db}{ds}\cdot\frac{da}{d\theta}-\frac{db}{d\theta}\cdot\frac{du}{ds}\right).dt+\frac{d\theta'}{d\downarrow}\cdot\left(\frac{db}{du}\cdot\frac{da}{d\theta}-\frac{db}{d\theta}\cdot\frac{da}{du}\right).dt$$
$$+\frac{d\varphi'}{d\theta}\cdot\left(\frac{db}{dv}\cdot\frac{da}{d\varphi}-\frac{db}{d\varphi}\cdot\frac{da}{dv}\right).dt=0.$$

[5.] Différencions maintenant l'équation *(a)* par rapport à s; ce qui donne une première partie qui n'est autre chose que le développement de la différentielle complète de $\frac{da}{ds}$, par rapport à t, puis une seconde partie qui provient des différences relatives à s, de φ', $\downarrow'$, θ', et des quantités renfermées entre les parenthèses dans l'équation *(a)*; de sorte qu'on a, en réunissant ces deux parties,

$$d.\frac{da}{ds}+\frac{da}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi'}{ds}.dt+\frac{da}{d\downarrow}\cdot\frac{d\downarrow'}{ds}.dt+\frac{da}{d\theta}\cdot\frac{d\theta'}{ds}.dt$$
$$-\frac{da}{ds}\cdot\frac{d\varphi'}{d\varphi}.dt-\frac{da}{du}\cdot\frac{d\varphi'}{d\downarrow}.dt-\frac{da}{dv}\cdot\frac{d\varphi'}{d\theta}.dt$$
$$+\frac{da}{ds}\left(\frac{d^2R}{d\varphi\,ds}-s\cdot\frac{d^2\varphi'}{d\varphi\,ds}-u\cdot\frac{d^2\downarrow'}{d\varphi\,ds}-v\cdot\frac{d^2\theta'}{d\varphi\,ds}\right).dt$$
$$+\frac{da}{du}\left(\frac{d^2R}{d\downarrow ds}-s\cdot\frac{d^2\varphi'}{d\downarrow ds}-u\cdot\frac{d^2\downarrow'}{d\downarrow ds}-v\cdot\frac{d^2\theta'}{d\downarrow ds}\right).dt$$
$$+\frac{da}{dv}\left(\frac{d^2R}{d\theta\,ds}-s\cdot\frac{d^2\varphi'}{d\theta\,ds}-u\cdot\frac{d^2\downarrow'}{d\theta\,ds}-v\cdot\frac{d^2\theta'}{d\theta\,ds}\right).dt=0.$$

Or, en vertu des équations (4), celle-ci se réduit à

$$d.\frac{da}{ds}+\frac{da}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi'}{ds}.dt+\frac{da}{d\downarrow}\cdot\frac{d\downarrow'}{ds}.dt+\frac{da}{d\theta}\cdot\frac{d\theta'}{ds}.dt$$
$$-\frac{da}{ds}\cdot\frac{d\varphi'}{d\varphi}.dt-\frac{da}{du}\cdot\frac{d\varphi'}{d\downarrow}.dt-\frac{da}{dv}\cdot\frac{d\varphi'}{d\theta}dt=0.$$

Relativement à l'intégrale première dont la constante arbitraire est b, on aurait :

$$d.\frac{db}{ds}+\frac{db}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi'}{ds}.dt+\frac{db}{d\downarrow}\cdot\frac{d\downarrow'}{ds}.dt+\frac{db}{d\theta}\cdot\frac{d\theta'}{ds}.dt$$
$$-\frac{db}{ds}\cdot\frac{d\varphi'}{d\varphi}.dt-\frac{db}{du}\cdot\frac{d\varphi'}{d\downarrow}.dt-\frac{db}{dv}\cdot\frac{d\varphi'}{d\theta}.dt=0.$$

Multipliant cette équation par $\frac{da}{d\varphi}$, et en retranchant la précédente, multipliée par $\frac{db}{d\varphi}$, il vient :

$$\frac{da}{d\varphi}.d.\frac{db}{ds}-\frac{db}{d\varphi}.d.\frac{da}{ds}$$
$$+\frac{d\downarrow'}{ds}\cdot\left(\frac{db}{d\downarrow}\cdot\frac{da}{d\varphi}-\frac{da}{d\downarrow}\cdot\frac{db}{d\varphi}\right).dt+\frac{d\theta'}{ds}\left(\frac{db}{d\theta}\cdot\frac{da}{d\varphi}-\frac{da}{d\theta}\cdot\frac{db}{d\varphi}\right).dt$$
$$+\frac{d\varphi'}{d\varphi}\cdot\left(\frac{db}{d\varphi}\cdot\frac{da}{ds}-\frac{db}{ds}\cdot\frac{da}{d\varphi}\right).dt$$
$$+\frac{d\varphi'}{d\downarrow}\cdot\left(\frac{db}{d\varphi}\cdot\frac{da}{du}-\frac{db}{du}\cdot\frac{da}{d\varphi}\right).dt$$
$$+\frac{d\varphi'}{d\theta}\cdot\left(\frac{db}{a\varphi}\cdot\frac{da}{dv}-\frac{db}{dv}\cdot\frac{da}{d\varphi}\right).dt=0.$$

On obtiendra une autre équation analogue à celle-ci, en y échangeant les lettres φ et $\downarrow$ entre elles, et s et u aussi entre elles; on en obtiendra une troisième par l'échange des lettres φ et θ entre elles, et des lettres s et v aussi entre elles. Si l'on forme ces deux nouvelles équations et qu'on les ajoute à la précédente, on trouve, en ayant égard aux équations,

$$\frac{d\downarrow'}{ds}=\frac{d\varphi'}{du},\quad\frac{d\downarrow'}{dv}=\frac{d\theta'}{du},\quad\frac{d\varphi'}{dv}=\frac{d\theta'}{ds},$$

du n.° 3, que la somme se réduit à

$$\frac{da}{d\varphi}.d.\frac{db}{ds}-\frac{db}{d\varphi}.d.\frac{da}{ds}+\frac{da}{d\downarrow}.d.\frac{db}{du}-\frac{db}{d\downarrow}.d.\frac{da}{du}$$
$$+\frac{da}{d\theta}.d.\frac{db}{dv}-\frac{db}{d\theta}.d.\frac{da}{dv}$$
$$+\frac{d\varphi'}{d\varphi}.\left(\frac{db}{d\varphi}.\frac{da}{ds}-\frac{db}{ds}.\frac{da}{d\varphi}\right).dt+\frac{d\downarrow'}{d\downarrow}.\left(\frac{db}{d\downarrow}.\frac{da}{du}-\frac{db}{du}.\frac{da}{d\downarrow}\right).dt$$
$$+\frac{d\theta'}{d\theta}.\left(\frac{db}{d\theta}.\frac{da}{dv}-\frac{db}{dv}.\frac{da}{d\theta}\right).dt$$
$$+\frac{d\varphi'}{d\downarrow}.\left(\frac{db}{d\varphi}.\frac{da}{du}-\frac{db}{du}.\frac{da}{d\varphi}\right).dt+\frac{d\downarrow'}{d\varphi}.\left(\frac{db}{d\downarrow}.\frac{da}{ds}-\frac{db}{ds}.\frac{da}{d\downarrow}\right).dt$$
$$+\frac{d\theta'}{d\downarrow}.\left(\frac{db}{d\theta}.\frac{da}{du}-\frac{db}{du}.\frac{da}{d\theta}\right).dt$$
$$+\frac{d\varphi'}{d\theta}.\left(\frac{db}{d\varphi}.\frac{da}{dv}-\frac{db}{dv}.\frac{da}{d\varphi}\right).dt+\frac{d\downarrow'}{d\theta}.\left(\frac{db}{d\downarrow}.\frac{da}{dv}-\frac{db}{dv}.\frac{da}{d\downarrow}\right).dt$$
$$+\frac{d\theta'}{d\varphi}.\left(\frac{db}{d\theta}.\frac{da}{ds}-\frac{db}{ds}.\frac{da}{d\theta}\right).dt=0.$$

J'ajoute enfin cette équation à la dernière du n.° 4, ce qui donne

$$\frac{db}{ds}.d.\frac{da}{d\varphi}-\frac{da}{ds}.d.\frac{db}{d\varphi}+\frac{da}{d\varphi}.d.\frac{db}{ds}-\frac{db}{d\varphi}.d.\frac{da}{ds}$$
$$+\frac{db}{du}.d.\frac{da}{d\downarrow}-\frac{da}{du}.d.\frac{db}{d\downarrow}+\frac{da}{d\downarrow}.d.\frac{db}{du}-\frac{db}{d\downarrow}.d.\frac{da}{du}$$
$$+\frac{db}{dv}.d.\frac{da}{d\theta}-\frac{da}{dv}.d.\frac{db}{d\theta}+\frac{da}{d\theta}.d.\frac{db}{dv}-\frac{db}{d\theta}.d.\frac{da}{dv}.=0.$$

[6.] Il est visible que le premier membre de cette équation est une différentielle complète par rapport à t; en intégrant, nous aurons donc cette équation fort simple,

$$\frac{db}{ds}.\frac{da}{d\varphi}-\frac{da}{ds}.\frac{db}{d\varphi}+\frac{db}{du}.\frac{da}{d\downarrow}-\frac{da}{du}.\frac{db}{d\downarrow}+\frac{db}{dv}.\frac{da}{d\theta}$$
$$-\frac{da}{dv}.\frac{db}{d\theta}=const.$$

On conçoit que la constante qui fait le second membre de cette équation, sera en général une fonction de a et b, et des constantes arbitraires contenues dans les autres intégrales des équations du mouvement; quelquefois il pourra arriver que sa valeur ne renferme ni la

constante a ni la constante b; dans d'autres cas elle ne contiendra aucune constante arbitraire, et se réduira à une constante déterminée; mais, afin de rappeler l'origine de cette quantité, qui représente une certaine combinaison des différences partielles des valeurs de a et b, nous ferons usage de cette notation (b, a), pour la désigner; de manière que nous aurons généralement

$$\frac{db}{ds}.\frac{da}{d\varphi}-\frac{da}{ds}.\frac{db}{d\varphi}+\frac{db}{du}.\frac{da}{d\downarrow}-\frac{da}{du}.\frac{db}{d\downarrow}+\frac{db}{dv}.\frac{da}{d\theta}$$
$$-\frac{da}{dv}.\frac{db}{d\theta}=(b, a).$$

D'après cette notation, si l'on considérait une autre intégrale première dont la constante arbitraire fût représentée par c, on aurait semblablement

$$\frac{dc}{ds}.\frac{da}{d\varphi}-\frac{da}{ds}.\frac{dc}{d\varphi}+\frac{dc}{du}.\frac{da}{d\downarrow}-\frac{da}{du}.\frac{dc}{d\downarrow}+\frac{dc}{dv}.\frac{da}{d\theta}$$
$$-\frac{da}{dv}.\frac{dc}{d\theta}=(c, a).$$

On voit aussi que (a, b) doit représenter ce que devient (b, a), quand on y échange les lettres a et b entre elles. Or, si l'on effectue cette permutation dans la valeur de (b, a), cette quantité ne fait que changer de signe; on aura donc toujours

$$(b, a)=-(a, b).$$

Observons encore que si l'on combine la constante quelconque a avec elle-même, pour former la quantité (a, a), on aura

$$(a, a)=0;$$

comme il résulte de la valeur de (b, a), quand on y fait $a=b$.

[7.] L'analyse que nous venons d'exposer nous conduit donc à ce résultat remarquable, que si l'on prend les valeurs des constantes arbitraires a et b, contenues dans les intégrales des équations du mouvement d'un système de corps, et qu'on exprime ces valeurs en fonctions des variables indépendantes φ, $\downarrow$ et θ, et des quantités s, u, v, la

combinaison des différences partielles de ces fonctions, représentée par (a, b), sera toujours une quantité constante.

On doit observer ici que ce théorème a lieu pour un nombre quelconque de variables indépendantes, ce qui résulte évidemment de la marche de notre analyse, quoique nous n'ayons supposé que trois de ces variables. En général, la valeur de (b, a) étant symétrique par rapport à toutes les variables, elle se trouvera augmentée de deux nouveaux termes, par rapport à chaque nouvelle variable.

[8.] Lorsque les corps du système sont libres, c'est-à-dire, quand leurs coordonnées ne sont liées par aucune équation de condition, le nombre des variables indépendantes est triple de celui des corps. Dans ce cas, on peut prendre pour ces variables les coordonnées rectangulaires des mobiles; soient donc x, y, z, les coordonnées de l'un des corps du système; prenons $\varphi = x$, $\psi = y$, $\theta = z$, et nous aurons $\varphi' = x'$, $\psi' = y'$, $\theta' = z'$; x', y', z' désignant les différentielles dx, dy, dz, divisées par dt; nous aurons aussi, en ayant seulement égard à ce mobile, et en représentant sa masse par m,

$$T = \frac{m}{2} \cdot (x'^2 + y'^2 + z'^2);$$

d'où l'on tire

$$s = \frac{dT}{d\varphi'} = mx', \quad u = my', \quad v = mz';$$

et par conséquent

$$(a, b) = \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{da}{dx'} \cdot \frac{db}{dx} - \frac{da}{dx} \cdot \frac{db}{dx'} + \frac{da}{dy'} \cdot \frac{db}{dy} - \frac{da}{dy} \cdot \frac{db}{dy'} + \frac{da}{dz'} \cdot \frac{db}{dz} - \frac{da}{dz} \cdot \frac{db}{dz'} \right).$$

Relativement à chacun des autres corps du système, la valeur de (a, b) renfermera un terme semblable à celui-ci; si donc nous employons la caractéristique Σ, pour indiquer la somme de tous ces termes, étendue au système entier, nous aurons

$$(a, b) = \Sigma . \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{da}{dx'} \cdot \frac{db}{dx} - \frac{da}{dx} \cdot \frac{db}{dx'} + \frac{da}{dy'} \cdot \frac{db}{dy} - \frac{da}{dy} \cdot \frac{db}{dy'} + \frac{da}{dz'} \cdot \frac{db}{dz} - \frac{da}{dz} \cdot \frac{db}{dz'} \right).$$

D'après le théorème du n.° précédent, cette quantité doit être une constante; or c'est ce que nous pouvons vérifier dans un cas particulier fort étendu.

Supposons que les forces qui agissent sur les corps, sont leur attraction réciproque, et une force d'attraction dirigée vers un point fixe, que nous prendrons pour l'origine des coordonnées; le principe des forces vives et celui des aires fournissent, dans ce cas, quatre intégrales premières des équations du mouvement, qui sont résolues par rapport aux constantes arbitraires; et si l'on fait usage de la caractéristique Σ, on a pour ces intégrales

$$\beta = \Sigma . m . (xy' - yx'), \quad \beta' = \Sigma . m . (zx' - z'x), \quad \beta'' = \Sigma . m . (yz' - yz'),$$
$$h = 2\Sigma . m . Fr - \Sigma . m . (x'^2 + y'^2 + z'^2);$$

$\beta, \beta', \beta'', h$ sont les quatre constantes arbitraires, r représente le rayon vecteur de m, de sorte qu'on a $r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$; Fr est une fonction de r, telle que $\frac{d.Fr}{dr}$ exprime la loi de l'attraction qu'on suppose dirigée vers l'origine des coordonnées.

Au moyen de ces valeurs de $h, \beta, \beta', \beta''$, on trouve sans peine

$$(h, \beta) = 0, \quad (h, \beta') = 0, \quad (h, \beta'') = 0;$$
$$(\beta, \beta') = \beta'', \quad (\beta'', \beta) = \beta', \quad (\beta', \beta'') = \beta;$$

par conséquent ces six expressions (h, β), (h, β'), &c., ont des valeurs constantes; ce qui est conforme à notre théorème.

[9.] Reprenons maintenant les équations différentielles du mouvement d'un système quelconque de corps, et continuons toujours de supposer les variables indépendantes au nombre de trois; de sorte que ces équations soient comme précédemment (n.° 2):

$$ds = \left(\frac{dR}{d\varphi}\right).dt, \quad du = \left(\frac{dR}{d\psi}\right).dt, \quad dv = \left(\frac{dR}{d\theta}\right).dt. \quad \text{(a)}$$

Imaginons qu'on applique aux corps du système, de nouvelles forces dirigées vers des centres fixes ou mobiles, et dont les intensités soient fonctions des distances des corps à ces centres; ces forces ne changeront pas les expressions des quantités s, u, v, qui ne dépendent que de la fonction T du n.° 1.er, et qui seront comme dans ce n.°

$$s = \frac{dT}{d\varphi'}, \quad u = \frac{dT}{d\psi}, \quad v = \frac{dT}{d\theta'}; \qquad \text{(b)}$$

mais chacune des équations du mouvement se trouvera augmentée d'un nouveau terme, c'est-à-dire, que l'on aura

$$\left.\begin{aligned} ds &= \left(\frac{dR}{d\varphi}\right).dt + \frac{d\Omega}{d\varphi}.dt, \\ du &= \left(\frac{dR}{d\psi}\right).dt + \frac{d\Omega}{d\psi}.dt, \\ dv &= \left(\frac{dR}{d\theta}\right).dt + \frac{d\Omega}{d\theta}.dt; \end{aligned}\right\} \qquad \text{(c)}$$

en désignant par $-\Omega$, l'intégrale de la somme des nouvelles forces multipliées chacune par l'élément de sa direction.

Il est inutile de renfermer entre des parenthèses les différences partielles de la fonction Ω, ainsi que nous le faisons pour celles de la fonction R, d'après la remarque du n.° 2; en effet, la fonction Ω ne contenant pas les variables φ', ψ', θ', ses différences partielles relatives φ, ψ, θ ne changent pas, quand on regarde φ', ψ', θ', comme des fonctions de φ, ψ, θ, s, u, v, données par les équations (b).

Cela posé, supposons qu'on ait intégré complètement les équations *(a)*, et désignons par a, b, c, e, f, g, les six constantes arbitraires contenues dans ces intégrales, de sorte que φ, ψ, θ soient censées des fonctions connues de t et de ces constantes. Si, pour satisfaire aux équations (c), nous regardons ces mêmes constantes comme de nouvelles variables, nous aurons un nombre d'inconnues double de celui de ces équations; par conséquent il nous sera permis d'assujettir en outre les quantités a, b, c, e, f, g, aux trois équations de condition que nous jugerons convenables.

Nous suivrons ici la marche que l'on suit dans la théorie des perturbations des planètes, et dont l'avantage est de conduire à des équations différentielles du premier ordre, par rapport aux six nouvelles variables. Nous supposerons donc, comme dans cette théorie, que les différentielles premières des variables primitives φ, ψ, θ, conservent la même forme dans l'hypothèse de a, b, c, e, f, g, variables, et dans celle où ces quantités sont constantes; c'est-à-dire que nous poserons égale à zéro, la partie de chaque différentielle $d\varphi$, $d\psi$, $d\theta$, qui provient de la variation des quantités a, b, c, e, f, g; ce qui nous donnera trois équations de condition.

Pour abréger, désignons en général par la caractéristique δ, placée devant une fonction de t, et de ces quantités, la différentielle de cette fonction, prise par rapport à ces quantités seulement; de manière qu'on ait, par exemple,

$$\delta\varphi = \frac{d\varphi}{da}.da + \frac{d\varphi}{db}.db + \frac{d\varphi}{dc}.dc + \frac{d\varphi}{de}.de + \frac{d\varphi}{df}.df + \frac{d\varphi}{dg}.dg;$$

nos trois équations de condition seront

$$\delta\varphi = 0, \quad \delta\psi = 0, \quad \delta\theta = 0;$$

et jointes aux trois équations (c), elles suffiront pour déterminer les six inconnues a, b, c, d, f, g. Cherchons donc ce que deviennent les équations (c), quand on y introduit les nouvelles variables.

Puisque les valeurs connues de φ, ψ, θ en fonctions de t, a, b, c, e, f, g, satisfont aux équations (a) dans l'hypothèse de a, b, c, e, f, g, constantes, il s'ensuit que, dans le cas où ces quantités varient, les équations (c) se réduiront à

$$\delta s = \frac{d\Omega}{d\varphi}.dt, \quad \delta u = \frac{d\Omega}{d\psi}.dt, \quad \delta v = \frac{d\Omega}{d\theta}.dt.$$

En effet, dans ce dernier cas, la différentielle de s, par exemple, sera composée de deux parties : l'une qui aurait lieu si a, b, c, e, f, g étaient

constantes, et qui sera égale à $\left(\frac{dR}{d\varphi}\right).dt$, en vertu de la première équation (a); l'autre provenant de la variation de ces quantités, et par conséquent égale à δs, d'après notre notation; la première des équations (c) devient donc

$$ds = \left(\frac{dR}{d\varphi}\right).dt + \delta s = \left(\frac{dR}{d\varphi}\right).dt + \frac{d\Omega}{d\varphi}.dt;$$

ou bien en réduisant

$$\delta s = \frac{d\Omega}{d\varphi}.dt;$$

et de même pour les deux autres équations (c).

Telles sont les six équations différentielles qui déterminent les six quantités a, b, c, e, f, g; elles sont du premier ordre et linéaires par rapport aux différentielles de ces variables; de manière qu'on pourrait en déduire, par de simples éliminations, les valeurs de ces différentielles sous forme finie; mais, en suivant une marche différente, nous allons parvenir à des formules très-simples qui donneront directement ces valeurs.

[10.] Supposons qu'on ait tiré des intégrales des équations (a), la valeur d'une des constantes arbitraires, de a, par exemple, et que cette valeur soit exprimée, comme dans le n.° 4, en fonctions de $t, \varphi, \downarrow, \theta, s, u, v$; de sorte qu'on ait

$$a = \text{fonct.}\,(t, \varphi, \downarrow, \theta, s, u, v).$$

Cette équation, en y regardant a comme une constante, étant une des intégrales premières des équations (a), il s'ensuit que la différentielle complète de la valeur de a doit se réduire à zéro, quand on y substitue les valeurs de s, u, v, données par ces équations; donc, si l'on y substitue les valeurs de ces différentielles données par les équations (c), on aura simplement

$$da = \frac{da}{ds}\cdot\frac{d\Omega}{d\varphi}.dt + \frac{da}{du}\cdot\frac{d\Omega}{d\downarrow}.dt + \frac{da}{dv}\cdot\frac{d\Omega}{d\theta}.dt.$$

Or, Ω étant une fonction donnée de $\varphi, \downarrow, \theta$, si l'on y met, à la place

de ces variables, leurs valeurs connues en fonctions de t et des constantes arbitraires a, b, c, e, f, g, cette quantité Ω deviendra aussi une fonction de ces constantes. On aura donc, en la considérant successivement comme fonction de $\varphi, \downarrow, \theta$, et comme fonction de a, b, c, e, f, g:

$$\frac{d\Omega}{d\varphi} = \frac{d\Omega}{da}\cdot\frac{da}{d\varphi} + \frac{d\Omega}{db}\cdot\frac{db}{d\varphi} + \frac{d\Omega}{dc}\cdot\frac{dc}{d\varphi} + \frac{d\Omega}{de}\cdot\frac{de}{d\varphi} + \frac{d\Omega}{df}\cdot\frac{df}{d\varphi} + \frac{d\Omega}{dg}\cdot\frac{dg}{d\varphi},$$

$$\frac{d\Omega}{d\downarrow} = \frac{d\Omega}{da}\cdot\frac{da}{d\downarrow} + \frac{d\Omega}{db}\cdot\frac{db}{d\downarrow} + \frac{d\Omega}{dc}\cdot\frac{dc}{d\downarrow} + \frac{d\Omega}{de}\cdot\frac{de}{d\downarrow} + \frac{d\Omega}{df}\cdot\frac{df}{d\downarrow} + \frac{d\Omega}{dg}\cdot\frac{dg}{d\downarrow},$$

$$\frac{d\Omega}{d\theta} = \frac{d\Omega}{da}\cdot\frac{da}{d\theta} + \frac{d\Omega}{db}\cdot\frac{db}{d\theta} + \frac{d\Omega}{dc}\cdot\frac{dc}{d\theta} + \frac{d\Omega}{de}\cdot\frac{de}{d\theta} + \frac{d\Omega}{df}\cdot\frac{df}{d\theta} + \frac{d\Omega}{dg}\cdot\frac{dg}{d\theta};$$

et par conséquent,

$$\begin{aligned}
da = {} & \left(\frac{da}{ds}\cdot\frac{da}{d\varphi} + \frac{da}{du}\cdot\frac{da}{d\downarrow} + \frac{da}{dv}\cdot\frac{da}{d\theta}\right)\cdot\frac{d\Omega}{da}.dt \\
& + \left(\frac{da}{ds}\cdot\frac{db}{d\varphi} + \frac{da}{du}\cdot\frac{db}{d\downarrow} + \frac{da}{dv}\cdot\frac{db}{d\theta}\right)\cdot\frac{d\Omega}{db}.dt \\
& + \left(\frac{da}{ds}\cdot\frac{dc}{d\varphi} + \frac{da}{du}\cdot\frac{dc}{d\downarrow} + \frac{da}{dv}\cdot\frac{dc}{d\theta}\right)\cdot\frac{d\Omega}{dc}.dt \\
& + \left(\frac{da}{ds}\cdot\frac{de}{d\varphi} + \frac{da}{du}\cdot\frac{de}{d\downarrow} + \frac{da}{dv}\cdot\frac{de}{d\theta}\right)\cdot\frac{d\Omega}{de}.dt \\
& + \left(\frac{da}{ds}\cdot\frac{d}{d\varphi} + \frac{da}{du}\cdot\frac{df}{d\downarrow} + \frac{da}{dv}\cdot\frac{df}{d\theta}\right)\cdot\frac{d\Omega}{df}.dt \\
& + \left(\frac{da}{ds}\cdot\frac{dg}{d\varphi} + \frac{da}{du}\cdot\frac{dg}{d\downarrow} + \frac{da}{dv}\cdot\frac{dg}{d\theta}\right)\cdot\frac{d\Omega}{dg}.dt.
\end{aligned}$$

Mais la quantité Ω ne renfermant que $\varphi, \downarrow, \theta$, et étant indépendante de s, u, v, il en résulte que, quand on la regarde comme une fonction des quantités a, b, c, e, f, g, et celles-ci comme des fonctions de $\varphi, \downarrow, \theta, s, u, v$, les différences partielles de Ω, prises par rapport à s, u, v, doivent être égales à zéro; nous aurons donc aussi

$$\frac{d\Omega}{ds}=\frac{d\Omega}{da}\cdot\frac{da}{ds}+\frac{d\Omega}{db}\cdot\frac{db}{ds}+\frac{d\Omega}{dc}\cdot\frac{dc}{ds}+\frac{d\Omega}{de}\cdot\frac{de}{ds}+\frac{d\Omega}{df}\cdot\frac{df}{ds}+\frac{d\Omega}{dg}\cdot\frac{dg}{ds}=0;$$

$$\frac{d\Omega}{du}=\frac{d\Omega}{da}\cdot\frac{da}{du}+\frac{d\Omega}{db}\cdot\frac{db}{du}+\frac{d\Omega}{dc}\cdot\frac{dc}{du}+\frac{d\Omega}{de}\cdot\frac{de}{du}+\frac{d\Omega}{df}\cdot\frac{df}{du}+\frac{d\Omega}{dg}\cdot\frac{dg}{du}=0,$$

$$\frac{d\Omega}{dv}=\frac{d\Omega}{da}\cdot\frac{da}{dv}+\frac{d\Omega}{db}\cdot\frac{db}{dv}+\frac{d\Omega}{dc}\cdot\frac{dc}{dv}+\frac{d\Omega}{de}\cdot\frac{de}{dv}+\frac{d\Omega}{df}\cdot\frac{df}{dv}+\frac{d\Omega}{dg}\cdot\frac{dg}{dv}=0.$$

Je multiplie ces quantités nulles, la première par $\frac{da}{d\varphi}$, la deuxième par $\frac{da}{d\psi}$, la troisième par $\frac{da}{d\theta}$, puis je les retranche de la valeur précédente de da: en faisant attention à ce que désignent les notations (a, b), (a, c), &c. du n.° 6, on trouve

$$da=(a,b).\frac{d\Omega}{db}.dt+(a,c).\frac{d\Omega}{dc}.dt+(a,e).\frac{d\Omega}{de}.dt+(a,f).\frac{d\Omega}{df}.dt+(a,g).\frac{d\Omega}{dg}.dt.$$

On trouvera par une analyse semblable,

$$db=-(a,b).\frac{d\Omega}{da}.dt+(b,c).\frac{d\Omega}{dc}.dt+(b,e).\frac{d\Omega}{de}.dt+(b,f).\frac{d\Omega}{df}.dt+(b,g).\frac{d\Omega}{dg}.dt,$$

$$dc=-(a,c).\frac{d\Omega}{da}.dt-(b,c).\frac{d\Omega}{db}.dt+(c,e).\frac{d\Omega}{de}.dt+(c,f).\frac{d\Omega}{df}.dt+(c,g).\frac{d\Omega}{dg}.dt,$$

$$de=-(a,e).\frac{d\Omega}{da}.dt-(b,e).\frac{d\Omega}{db}.dt-(c,e).\frac{d\Omega}{dc}.dt+(e,f).\frac{d\Omega}{df}.dt+(e,g).\frac{d\Omega}{dg}.dt,$$

$$df=-(a,f).\frac{d\Omega}{da}.dt-(b,f).\frac{d\Omega}{db}.dt-(c,f).\frac{d\Omega}{dc}.dt-(e,f).\frac{d\Omega}{de}.dt+(f,g).\frac{d\Omega}{dg}.dt,$$

$$dg=-(a,g).\frac{d\Omega}{da}.dt-(b,g).\frac{d\Omega}{db}.dt-(c,g).\frac{d\Omega}{dg}.dt-(e,g).\frac{d\Omega}{de}.dt-(f,g).\frac{d\Omega}{df}.dt;$$

où l'on doit se rappeler qu'en général $(b, a)=-(a, b)$.

D'après le théorème du n.° 7, les coëfficiens (a, b), (a, c), &c., sont des fonctions de a, b, c, e, f, g; il s'ensuit donc que, dans les questions de mécanique, les différentielles premières des constantes arbitraires peuvent s'exprimer au moyen des différences partielles de la fonction Ω, prises par rapport à ces quantités, et multipliées par des fonctions de ces mêmes quantités, qui ne renferment pas le temps d'une manière explicite.

C'est le beau théorème que M. *Lagrange* et M. *Laplace* ont d'abord trouvé, relativement aux différentielles des élémens elliptiques, et que M. *Lagrange* a ensuite étendu à un système quelconque de corps soumis à des forces dirigées vers des centres fixes ou mobiles, dont les intensités sont fonctions des distances des corps à ces centres.

[11.] Nous rapporterons ici les formules du Mémoire de M. *Lagrange*, afin de les comparer à celles que nous venons de trouver, et de montrer l'analogie singulière qui existe entre les unes et les autres. Voici ces formules:

$$\frac{d\Omega}{da}.dt=[a,b].db+[a,c].dc+[a,e].de+[a,f].df+[a,g].dg,$$

$$\frac{d\Omega}{db}.dt=-[a,b].da+[b,c].dc+[b,e].de+[b,f].df+[b,g].dg,$$

$$\frac{d\Omega}{dc}.dt=-[a,c].da-[b,c].db+[c,e].de+[c,f].df+[c,g].dg,$$

$$\frac{d\Omega}{de}.dt=-[a,e].da-[b,e].db-[c,e].dc+[e,f].df+[e,g].dg,$$

$$\frac{d\Omega}{df}.dt = -[a,f].da - [b,f].db - [c,f].dc - [e,f].de + [f,g].dg,$$

$$\frac{d\Omega}{dg}.dt = -[a,g].da - [b,g].db - [c,g].dc - [e,g].de - [f,g].df.$$

Les notations $[a,b]$, $[a,c]$, &c. désignent certaines combinaisons des différences partielles, relatives à a, b, c, e, f, g, des valeurs de Φ, $\downarrow$, θ, u, s, v, données par les intégrales des équations (a) que l'on suppose connues. On a, en général,

$$[a,b] = \frac{d\varphi}{da}\cdot\frac{ds}{db} - \frac{d\varphi}{db}\cdot\frac{ds}{da} + \frac{d\downarrow}{da}\cdot\frac{du}{db} - \frac{d\downarrow}{db}\cdot\frac{du}{da} + \frac{d\theta}{da}\cdot\frac{dv}{db} - \frac{d\theta}{db}\cdot\frac{dv}{da};$$

et l'on voit que relativement à ces coèfficiens de M. *Lagrange*, comme par rapport aux nôtres, on a

$$[a,b] = -[b,a],\ [a,a] = 0.$$

M. *Lagrange* démontre directement que les quantités $[a,b]$, $[a,c]$, &c. sont des fonctions de a, b, c, e, f, g, qui ne renferment pas le terme d'une manière explicite; d'où l'on conclut ensuite que, par des éliminations entre les équations que nous citons, on obtiendra des valeurs de da, db, dc, de, df, dg, exprimées au moyen des différences partielles de Ω prises par rapport à a, b, c, &c., et multipliées par des fonctions de ces constantes. Nos formules ont l'avantage de donner immédiatement ces valeurs.

Il est sans doute inutile d'observer que toutes ces formules ont lieu pour un nombre quelconque de constantes arbitraires, lequel nombre sera toujours double de celui des variables indépendantes.

Variations des Constantes arbitraires, relatives au mouvement d'un Corps attiré vers un point fixe.

[12.] En désignant par x, y, z, les coordonnées du corps parallèles à trois axes rectangulaires, menés par le point fixe; par r, son rayon vecteur, de sorte qu'on ait $r = \sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$; par Φr, la loi de l'attraction; par t, le temps dont l'élément sera supposé constant: les équations différentielles du mouvement seront

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{x.\varphi r}{r} = 0,\quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{y.\varphi r}{r} = 0,\quad \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{z.\varphi r}{r} = 0. \quad (1)$$

Si, outre l'attraction dirigée vers le point fixe, on applique au mobile d'autres forces dirigées vers des centres fixes ou mobiles, et fonctions des distances à ces centres, les équations du mouvement deviendront

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{x.\varphi r}{r} = \frac{d\Omega}{dx},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{y.\varphi r}{r} = \frac{d\Omega}{dy},$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{z.\varphi r}{r} = \frac{d\Omega}{dz};$$

— Ω désignant l'intégrale de la somme des nouvelles forces multipliées chacune par l'élément de sa direction.

Il s'agit donc de trouver les intégrales des premières équations, et ensuite de faire varier leurs constantes arbitraires, pour étendre ces mêmes intégrales aux secondes équations, conformément à la théorie générale qu'on vient d'exposer.

[13.] Le principe des aires nous fournit d'abord ces trois intégrales

$$xdy - ydx = \beta dt,\quad zdx - xdz = \beta' dt,\quad ydz - zdy = \beta'' dt;$$

dans lesquelles β, β', β'', sont des constantes arbitraires; on en déduit cette équation.

$$\beta''x + \beta'y + \beta z = 0, \quad (2)$$

qui nous apprend que la trajectoire décrite par le mobile est une courbe plane, dont le plan passe par le centre fixe; ce qui est d'ailleurs une chose évidente en elle-même. Cette équation est celle du plan de cette courbe; et il est facile d'en conclure que si l'on appelle γ l'inclinaison de ce plan sur celui des x, y, et α l'angle compris entre l'intersection de ces deux

plans et l'axe des x, on aura

$$\text{tang. } \gamma . \text{ sin. } \alpha = \frac{\beta''}{\beta}, \quad \text{tang. } \gamma . \text{ cos. } \alpha = -\frac{\beta'}{\beta};$$

d'où l'on tire

$$\text{tang. } \alpha = -\frac{\beta''}{\beta'}, \quad \text{tang. } \gamma . = \frac{\sqrt{(\beta'^2+\beta''^2)}}{\beta}.$$

Ainsi les deux angles α et γ, qui déterminent la position du plan de la trajectoire, sont donnés en fonction des trois constantes arbitraires β, β' et β''.

[14.] L'équation (2) est une des intégrales finies des équations (1): pour achever d'intégrer ces équations, je multiplie la première par $2dx$, la deuxième par $2dy$, la troisième par $2dz$; je les ajoute ensuite, et en observant que $x\,dx + y\,dy + z\,dz = r\,dr$, je trouve

$$d.\left(\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}\right) + 2\,\varphi r\,.\,dr = 0;$$

intégrant, et faisant, pour abréger, $\int \varphi r.\,dr = -R$, il vient

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2} - 2R + h = 0;$$

h étant la constante arbitraire.

J'ajoute une seconde fois les équations (1), après avoir multiplié la première par x, la deuxième par y, la troisième par z; ce qui donne

$$\frac{x\,d^2x + y\,d^2y + z\,d^2z}{dt^2} + r\,.\,\varphi r = 0:$$

or, on a identiquement

$$\frac{d^2.r^2}{2} = x\,d^2x + y\,d^2y + z\,d^2z + dx^2 + dy^2 + dz^2;$$

d'où l'on conclut, en ayant égard aux deux équations précédentes,

$$\frac{d^2.r^2}{2.dt^2} = 2R - h - r\,.\,\varphi r;$$

multipliant par $d.r^2$, et intégrant, il vient

$$\frac{1}{4}\left(\frac{d.r^2}{dt}\right)^2 = 4\int R\,r\,dr - hr^2 - 2\int \varphi r\,.\,r^2\,dr - k^2;$$

k^2 étant la constante arbitraire. En intégrant par parties, on a

$$2\int R\,r\,dr = Rr^2 - \int r^2\,dR = Rr^2 + \int r^3\,\varphi r\,.\,dr;$$

l'équation précédente devient donc

$$\frac{r^2\,dr^2}{dt^2} = 2Rr^2 - hr^2 - k^2.$$

En la résolvant par rapport à dt, et intégrant ensuite, on trouve

$$t + l = \int \frac{r\,dr}{\sqrt{(2Rr^2 - hr^2 - k^2)}}; \qquad (3)$$

l étant une nouvelle constante arbitraire.

Cette équation est la seconde intégrale finie des équations (1); elle donnera, par la méthode des quadratures, t en fonction de r, et réciproquement r en fonction de t.

[15.] Pour obtenir la troisième intégrale finie, désignons par dv l'angle compris entre deux rayons vecteurs consécutifs; nous aurons, pour le carré de l'élément de la trajectoire, $dr^2 + r^2\,dv^2$, lequel carré est aussi $dx^2 + dy^2 + dz^2$; par conséquent, d'après l'une des équations du n.° précédent,

$$\frac{dr^2 + r^2\,dv^2}{dt^2} = 2R - h.$$

Multipliant par r^2, et substituant pour $\frac{r^2\,dr^2}{dt^2}$, sa valeur $2Rr^2 - hr^2 - k^2$, il vient

$$\frac{r^4\,dv^2}{dt^2} = k^2, \quad \text{ou } r^2\,dv = k\,dt.$$

Si l'on met, dans cette dernière équation, pour dt sa valeur en r et dr, et que l'on intègre ensuite, on aura

$$v - g = \int \frac{k\,dr}{r\,.\,\sqrt{(2Rr^2 - hr^2 - k^2)}}; \qquad (4)$$

g étant la constante arbitraire.

Cette équation est la troisième intégrale cherchée. La trajectoire étant une courbe plane, il s'ensuit que l'angle v est la longitude du rayon

vecteur r, comptée dans le plan de cette courbe, à partir d'une ligne fixe; cette dernière intégrale donne donc, par les quadratures, la relation qui existe entre la longitude et le rayon vecteur, c'est-à-dire, l'équation polaire de la trajectoire.

[16.] Nous avons donc les trois équations (2), (3), (4), pour les intégrales complètes des équations (1); les six constantes arbitraires qu'elles renferment, et qui vont devenir variables, sont $h, k, l, g, \alpha, \gamma$; car l'équation (2) ne renferme réellement que les rapports $\frac{\beta'}{\beta}$, $\frac{\beta''}{\beta}$, qui sont des fonctions de α et γ.

La constante k peut s'exprimer en fonction de β, β', β''; sa valeur, qui nous sera nécessaire dans les calculs suivans, s'obtient de cette manière.

L'équation $k\,dt = r^2\,dv$, nous montre que $k\,dt$ est le double de l'aire décrite pendant l'instant dt, par le rayon vecteur du mobile; car l'aire comprise entre deux rayons vecteurs consécutifs est évidemment égale à $\frac{r^2\,dv}{2}$; d'ailleurs les aires décrites par les projections de ce rayon sur les trois plans des coordonnées rectangulaires, pendant le même instant, ou, ce qui est la même chose, les projections sur ces trois plans, de l'aire décrite dans l'espace par le rayon vecteur, sont $\frac{1}{2}\beta.dt$, $\frac{1}{2}\beta'.dt$, $\frac{1}{2}\beta''.dt$; on aura donc, d'après un théorème connu,

$$k^2 = \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2;$$

équation qu'il est d'ailleurs aisé de vérifier.

D'après cette équation et les valeurs de α et γ du n.° 13, on aura aussi

$$\beta = k \,.\, \cos.\,\gamma,$$
$$\beta' = -\,k \,.\, \sin.\,\gamma \,.\, \cos.\,\alpha,$$
$$\beta'' = k \,.\, \sin.\,\gamma \,.\, \sin.\,\alpha.$$

Ces différentes équations nous seront utiles dans la suite de nos calculs.

[17.] Pour déterminer au moyen des formules générales du n.° 10, les différentielles de nos six constantes $h, k, l, g, \alpha, \gamma$, il faut calculer les valeurs des quantités $(h,k), (h,l)$, &c. qui sont en même nombre que les combinaisons deux à deux de six lettres, c'est-à-dire, au nombre de quinze. Ce calcul dépend des trois variables indépendantes que nous choisirons; le plus simple est de prendre, comme dans le n.° 8, $\varphi = x$, $\downarrow = y$, $\theta = z$, ce qui donne $s = mx'$, $u = my'$, $v = mz'$; x', y', z', désignant les différentielles dx, dy, dz, divisées par dt, et m, la masse du mobile. On peut omettre ce facteur m qui disparaîtrait de lui-même dans les valeurs des différentielles de h, k, &c. que nous cherchons, du moins quand on suppose que les forces appliquées au mobile agissent sur tous les points de sa masse. En effet, dans ce cas, la fonction Ω a pour facteur m; cette masse se trouve au dénominateur dans les valeurs des coëfficiens $(h,k), (h,l)$, &c.; donc elle disparaît dans les valeurs de dh, dk, &c. Nous aurons donc simplement $s = x'$, $u = y'$; $v = z'$; et, par rapport à deux constantes quelconques a et b (n.° 8),

$$(a,b) = \frac{da}{dx'}\cdot\frac{db}{dx} - \frac{da}{dx}\cdot\frac{db}{dx'} + \frac{da}{dy'}\cdot\frac{db}{dy} - \frac{da}{dy}\cdot\frac{db}{dy'} + \frac{da}{dz'}\cdot\frac{db}{dz} - \frac{da}{dz}\cdot\frac{db}{dz'}.$$

Cela posé, calculons d'abord les six quantités $(h,k), (h,\alpha), (h,\gamma), (k,\alpha), (k,\gamma), (\alpha,\gamma)$ qui ne renferment pas les lettres l et g.

Nous avons

$$\beta = xy' - yx', \quad \beta' = zx' - xz', \quad \beta'' = yz' - zy';$$
$$h = 2R - x'^2 - y'^2 - z'^2;$$

les constantes α, γ, k sont données en fonctions de β, β', β'', par les trois équations,

$$\text{tang.}\,\alpha = -\frac{\beta''}{\beta'}, \quad \text{tang.}\,\gamma = \frac{\sqrt{(\beta'^2+\beta''^2)}}{\beta}, \quad k^2 = \beta^2+\beta'^2+\beta''^2;$$

en y substituant les valeurs de β, β', β'', on aurait donc celles de α, γ, k, en fonctions de x, y, z, x', y', z'; mais on va voir qu'on peut se dispenser de faire cette substitution.

Si l'on a en général deux constantes a et b, dont la seconde soit une fonction d'autres constantes, par exemple, de β, β', β'', on conçoit, d'après la forme de la quantité (a, b), qu'on peut la partager de cette manière :

$$(a, b) = (a, \beta).\frac{db}{d\beta} + (a, \beta').\frac{db}{d\beta'} + (a, \beta'').\frac{db}{d\beta''}. \quad \text{(a)}$$

Il en résulte d'abord

$$(h, \alpha) = 0, \quad (h, \gamma) = 0, \quad (h, k) = 0;$$

car on a déjà trouvé (n.° 8),

$$(h, \beta) = 0, \quad (h, \beta') = 0, \quad (h, \beta'') = 0.$$

L'équation (a) donne aussi

$$(k, \alpha) = (\beta, \alpha).\frac{\beta}{k} + (\beta', \alpha).\frac{\beta'}{k} + (\beta'', \alpha).\frac{\beta''}{k},$$

$$(\beta, \alpha) = -(\beta, \beta'').\frac{\cos.^2 \alpha}{\beta'} + (\beta, \beta').\frac{\beta''.\cos.^2 \alpha}{\beta'^2},$$

$$(\beta', \alpha) = -(\beta', \beta'').\frac{\cos.^2 \alpha}{\beta'},$$

$$(\beta'', \alpha) = +(\beta'', \beta').\frac{\beta''.\cos.^2 \alpha}{\beta'^2};$$

d'ailleurs, on trouve directement (n.° 8),

$$(\beta, \beta') = \beta'', \quad (\beta, \beta'') = -\beta', \quad (\beta', \beta'') = \beta;$$

substituant toutes ces valeurs dans celles de (k, α), il vient

$$(k, \alpha) = 0.$$

J'ai trouvé par un calcul semblable, que je crois superflu de rapporter ici,

$$(k, \gamma) = 0, \quad (\alpha, \gamma) = \frac{1}{k.\sin.\gamma}.$$

[18.] Cherchons maintenant les valeurs des quatre quantités (h, l), (k, l)

$(k, l), (\alpha, l), (\gamma, l)$, qui renferment l sans contenir g; et pour cela, reprenons l'équation du n.° 14,

$$t + l = \int \frac{r\,dr}{\sqrt{(2Rr^2 - hr^2 - k^2)}}.$$

La constante l dépend de l'origine que l'on donne à cette intégrale; supposons qu'elle s'évanouisse, quand on y donne à r sa plus petite ou sa plus grande valeur; de sorte que $-l$ soit la valeur de t qui répond à cette valeur extrême de r; celle-ci est donnée par l'équation

$$\frac{dr}{dt} = 0, \quad \text{ou } 2Rr^2 - hr^2 - k^2 = 0;$$

elle est donc une certaine fonction de h et k; par conséquent, l'intégrale prise dans cette hypothèse, sera une fonction de r, h, k, et l'on aura

$$l = -t + \text{fonct.}\,(r, h, k).$$

Or, si l'on fait d'abord abstraction des constantes h et k, la valeur de l ne contiendra pas les variables x', y', z'; de plus, on aura

$$\frac{dl}{dx} = \frac{dl}{dr}.\frac{dr}{dx} = \frac{dl}{dr}.\frac{x}{r}, \quad \frac{dl}{dy} = \frac{dl}{dr}.\frac{y}{r}, \quad \frac{dl}{dz} = \frac{dl}{dr}.\frac{z}{r};$$

en observant donc que $\frac{dl}{dr}$ est la même chose que $-\frac{dt}{dr}$, nous aurons, par rapport à une constante quelconque a,

$$(l, a) = -\frac{1}{r}.\frac{dt}{dr}.\left(x.\frac{da}{dx'} + y.\frac{da}{dy'} + z.\frac{da}{dz'}\right).$$

Pour avoir égard aux constantes h et k contenues dans la valeur de l, il faudrait ajouter

$$(h, a).\frac{dl}{dh} + (k, a).\frac{dl}{dk},$$

à cette valeur de (l, a); mais on peut omettre ces deux termes, parce qu'ils sont toujours nuls, a devant représenter l'une des quatre constantes h, k, α, γ. Il ne s'agit donc que de mettre successivement ces constantes à la place de a, dans la valeur de (l, a).

Relativement à k, α, γ, ou à toute autre fonction de β, β', β'', il est

aisé de voir que l'on a

$$x \cdot \frac{da}{dx'} + y \cdot \frac{da}{dy'} + z \cdot \frac{da}{dz'} = 0;$$

donc aussi

$$(l, k) = 0, \quad (l, \alpha) = 0, \quad (l, \gamma) = 0.$$

Si l'on prend $a = h$, on aura

$$\frac{dh}{dx'} = -2x', \quad \frac{dh}{dy'} = -2y', \quad \frac{dh}{dz'} = -2z';$$

donc

$$(l, h) = \frac{2}{r} \cdot \frac{dt}{dr} \cdot (xx' + yy' + zz');$$

c'est-à-dire,

$$(l, h) = 2.$$

[19.] Il ne nous reste plus à déterminer que les cinq quantités (g, h), (g, k), (g, α), (g, γ), (g, l), qui renferment la lettre g.

Reprenons donc l'équation du n.° 15

$$g = v - \int \frac{k\,dr}{r \cdot \sqrt{(2Rr^2 - hr^2 - k^2)}};$$

et supposons que cette intégrale s'évanouisse comme la précédente, quand on y met pour r sa plus petite ou sa plus grande valeur : g sera la longitude du point de la trajectoire où le rayon vecteur est un *maximum* ou un *minimum*; cette longitude étant comptée, ainsi que v, dans le plan de la trajectoire, à partir d'une ligne arbitraire. Nous prendrons, pour cette ligne, l'intersection de ce plan, avec celui des x, y.

En désignant par P l'intégrale prise dans cette hypothèse, nous aurons

$$P = \text{fonct.}\,(r, h, k), \quad \frac{dP}{dr} = \frac{k}{r \cdot \sqrt{(2Rr^2 - hr^2 - k^2)}} = \frac{k\,dt}{r^2\,dr};$$

et ensuite, par rapport à une constante quelconque a,

$$g = v - P, \quad (g, a) = (v, a) - (P, a).$$

Or, si l'on fait d'abord abstraction des constantes h et k contenues dans P, on aura

$$(P, a) = -\frac{da}{dx'} \cdot \frac{dP}{dr} \cdot \frac{x}{r} - \frac{da}{dy'} \cdot \frac{dP}{dr} \cdot \frac{y}{r} - \frac{da}{dz'} \cdot \frac{dP}{dr} \cdot \frac{z}{r};$$

à quoi l'on doit ajouter, pour avoir égard aux constantes,

$$(h, a) \cdot \frac{dP}{dh} + (k, a) \cdot \frac{dP}{dk};$$

mais on peut omettre le second terme, parce que a devant représenter l'une des cinq constantes h, k, α, γ et l, on a toujours, d'après ce qu'on a trouvé dans les deux derniers n.os, $(k, a) = 0$. Nous aurons donc, en mettant pour $\frac{dP}{dr}$, sa valeur,

$$(P, a) = -\frac{k\,dt}{r^3\,dr} \cdot \left(x \cdot \frac{da}{dx'} + y \cdot \frac{da}{dy'} + z \cdot \frac{da}{dz'}\right) + (h, a) \cdot \frac{dP}{dh}.$$

Pour déterminer la valeur de (v, a), j'observe que v est une fonction des coordonnées x, y, z, et des angles α et γ, qui fixent la position du plan de la trajectoire : on trouve, en effet, par une construction fort simple,

$$\sin. v = \frac{z}{r \cdot \sin. \gamma}, \quad \cos. v = \frac{x \cdot \cos. \alpha + y \cdot \sin. \alpha}{r}.$$

L'une ou l'autre de ces deux équations donnera la valeur de v; mais les calculs qui nous restent à faire seront plus faciles, en faisant usage de la première; alors v est une fonction de x, y, z et γ; par conséquent on a

$$(v, a) = -\frac{dv}{dx} \cdot \frac{da}{dx'} - \frac{dv}{dy} \cdot \frac{da}{dy'} - \frac{dv}{dz} \cdot \frac{da}{dz'} + (\gamma, a) \cdot \frac{dv}{d\gamma};$$

d'ailleurs la valeur de sin. v donne, en différenciant,

$$\frac{dv}{dx} = \frac{-xz}{r^3 \cdot \cos. v \cdot \sin. \gamma}, \quad \frac{dv}{dy} = \frac{-yz}{r^3 \cdot \cos. v \cdot \sin. \gamma},$$

$$\frac{dv}{dr} = \frac{x^2 + y^2}{r^3 \cdot \cos. v \cdot \sin. \gamma}, \quad \frac{dv}{d\gamma} = \frac{-z \cdot \cos. \gamma}{r \cdot \cos. v \cdot \sin.^2 \gamma};$$

on aura donc

$$(\nu, a) = \frac{1}{r^3 \cdot \cos.\nu \cdot \sin.\gamma} \cdot \left(x z \cdot \frac{da}{dx'} + yz \cdot \frac{da}{dy'} - (x^2+y^2) \cdot \frac{da}{dz'} \right) - \frac{z \cdot \cos.\gamma}{r \cdot \cos.\nu \cdot \sin.^2\gamma} \cdot (\nu, a).$$

[20.] La question est maintenant réduite à substituer dans ces valeurs de (P, a) et (ν, a), les constantes h, k, α, γ, l à la place de a. Soit donc:

1.° $a = h$. Nous aurons d'abord

$$x \cdot \frac{dh}{dx'} + y \cdot \frac{dh}{dy'} + z \cdot \frac{dh}{dz'} = -2 \cdot \frac{rdr}{dt};$$

par conséquent,

$$(P, h) = \frac{2k}{r^2}.$$

Ensuite on aura

$$xz \cdot \frac{dh}{dx'} + yz \cdot \frac{dh}{dy'} - (x^2+y^2) \cdot \frac{dh}{dz'} = 2(x^2+y^2) \cdot z' - 2xz \cdot x' - 2yz \cdot y'.$$

Si l'on fait attention aux valeurs de β' et β'', cette quantité est la même chose que $2y\beta'' - 2x\beta'$; mais aussi, en vertu des équations du n.° 16,

$$y\beta'' - x\beta' = k \cdot \sin.\gamma \cdot (y \cdot \sin.\alpha + x \cdot \cos.\alpha);$$

donc, d'après la valeur de cos. ν du n.° précédent,

$$y\beta'' - x\beta' = kr \cdot \sin.\gamma \cdot \cos.\nu.$$

Substituant ces valeurs dans celle de (ν, h), et observant que $(\gamma, h) = 0$, on trouve

$$(\nu, h) = \frac{2k}{r^2} = (P, h);$$

d'où il résulte enfin $(g, h) = 0$.

2.° $a = k$. Dans ce cas, la valeur de (P, k) est nulle, parce que $(h, k) = 0$, et que k étant une fonction de β, β', β'', on a

$$x \cdot \frac{dk}{dx'} + y \cdot \frac{dk}{dy'} + z \cdot \frac{dk}{dz'} = 0.$$

En écrivant la quantité

$$\left(xz \cdot \frac{dk}{dx'} + yz \cdot \frac{dk}{dy'} - (x^2+y^2) \cdot \frac{dk}{dz'} \right),$$

sous cette forme

$$\left(x \cdot \frac{dk}{dx'} + y \cdot \frac{dk}{dy'} + z \cdot \frac{dk}{dz'} \right) \cdot z - (x^2+y^2+z^2) \cdot \frac{dk}{dz'};$$

on voit qu'elle se réduit à

$$-r^2 \cdot \frac{dk}{dz'};$$

donc, à cause de $(\gamma, k) = 0$, on aura

$$(\nu, k) = -\frac{dk}{dz'} \cdot \frac{1}{r \cdot \cos.\nu \cdot \sin.\gamma}.$$

Or, on a

$$\frac{dk}{dz'} = -\frac{\beta'}{k} \cdot x + \frac{\beta''}{k} \cdot y = r \cdot \sin.\gamma \cdot \cos.\nu;$$

donc enfin $(\nu, k) = (\gamma, k) = -1$.

3.° $a = \gamma$. La valeur de (P, γ) est nulle, par la même raison que dans le cas précédent, et la valeur de (ν, γ) se réduit aussi, par la même raison, à

$$(\nu, \gamma) = -\frac{d\gamma}{dz'} \cdot \frac{1}{r \cdot \cos.\nu \cdot \sin.\gamma}.$$

Or, l'équation, tang. $\gamma = \frac{\sqrt{(\beta'^2+\beta''^2)}}{\beta}$, donne, en différenciant par rapport à z', et observant que cette variable n'entre pas dans β:

$$\frac{d\gamma}{dz'} = \frac{\cos.^2\gamma}{\beta \cdot \sqrt{(\beta'^2+\beta''^2)}} \left(\beta' \cdot \frac{d\beta'}{dz'} + \beta'' \cdot \frac{d\beta''}{dz'} \right) = \frac{\cos.^2\gamma}{\beta \cdot \sqrt{(\beta'^2+\beta''^2)}} (y\beta'' - x\beta');$$

nous avons aussi

$$y\beta'' - x\beta' = kr \cdot \sin.\gamma \cdot \cos.\nu;$$

et les équations du n.° 16 donnent

$$\beta = k.\ \cos.\gamma,\quad \sqrt{(\beta'^2 + \beta''^2)} = k\ .\ \sin.\gamma;$$

nous aurons donc, en faisant les substitutions nécessaires,

$$(\nu, \gamma) = (g, \gamma) = -\frac{\cos.\gamma}{k\ .\ \sin.\gamma}.$$

4.° $a = \alpha$. On aura encore $(P, \alpha) = 0$, et

$$(\nu, \alpha) = -\frac{1}{r\ .\ \cos.\nu\ .\ \sin.\gamma}\cdot\frac{d\alpha}{dz'} - \frac{z\ .\ \cos.\gamma}{r\ .\ \cos.\nu\ .\ \sin.^2\gamma}\ .(\gamma, \alpha).$$

L'équation tang. $\alpha = -\frac{\beta''}{\beta'}$ donne

$$\frac{d\alpha}{dz'} = -\frac{\cos.^2\alpha}{\beta'^2}\ .(\beta'' x + \beta' y) = \frac{\beta z\ .\ \cos.^2\alpha}{\beta'^2},$$

à cause que $\beta'' x + \beta' y + \beta z = 0$. Mettant pour β et β' leurs valeurs $k.\ \cos.\gamma$, et $-k\ .\ \sin.\gamma\ .\ \cos.\alpha$ (n.° 16), on aura

$$\frac{d\alpha}{dz'} = \frac{z.\ \cos.\gamma}{k.\sin.^2\gamma}.$$

On a aussi (n.° 17),

$$(\gamma, \alpha) = -\frac{1}{k\ .\ \sin.\gamma};$$

substituant donc ces valeurs dans celle de (ν, α), on voit qu'elle se réduit à zéro; donc aussi

$$(g, \alpha) = 0.$$

[21.] La quantité (g, l) qui nous reste encore à calculer est celle qui présente le plus de difficulté, à cause des intégrales qui entrent dans les valeurs de g et de l, et qui ne peuvent pas s'effectuer, tant que la loi de l'attraction reste indéterminée.

Nous avons d'abord $(h, l) = -2$; de plus l étant une fonction de h et k qui ne renferme pas x', y', z' explicitement, il s'ensuit

$$x.\frac{dl}{dx'} + y.\frac{dl}{dy'} + z.\frac{dl}{dz'} = \left(x.\frac{dk}{dx'} + y.\frac{dk}{dy'} + z.\frac{dk}{dz'}\right).\frac{dl}{dk} + \left(x.\frac{dh}{dx'} + y.\frac{dh}{dy'} + z.\frac{dh}{dz'}\right).\frac{dl}{dh}.$$

Nous savons déjà que la quantité qui multiplie $\frac{dl}{dk}$ est nulle, et que celle qui multiplie $\frac{dl}{dh}$ est égale à $-2r.\ \frac{dr}{dt}$; la valeur de (P, l) deviendra donc

$$(P, l) = \frac{2k}{r^2}\cdot\frac{dl}{dh} - 2\frac{dP}{dh}.$$

Nous aurons aussi

$$xz.\frac{dl}{dx'} + yz.\frac{dl}{dy'} - (x^2+y^2).\frac{dl}{dz'} = \left(xz.\frac{dk}{dx'} + yz.\frac{dk}{dy'} - (x^2+y^2).\frac{dk}{dz'}\right).\frac{dl}{dk} + \left(xz.\frac{dh}{dx'} + yz.\frac{dh}{dy'} - (x^2+y^2).\frac{dh}{dz'}\right).\frac{dl}{dh}.$$

On a déjà vu que la quantité qui multiplie $\frac{dl}{dh}$ est égale à $2kr\ .\ \sin.\gamma\ .\ \cos.\nu$; et que celle qui multiplie $\frac{dl}{dk}$ est égale à $-r^3\ .\ \sin.\gamma\ .\ \cos.\nu$; on aura donc

$$xz.\frac{dl}{dx'} + yz.\frac{dl}{dy'} - (x^2+y^2)\frac{dl}{dz'} = -r^3.\sin.\gamma.\cos.\nu.\frac{dl}{dk} + 2kr.\ \sin.\gamma.\cos.\nu.\frac{dl}{dh};$$

et, à cause de $(\gamma, l) = 0$, la valeur de (ν, l) deviendra

$$(\nu, l) = \frac{2k}{r^2}\cdot\frac{dl}{dh} - \frac{dl}{dk};$$

par conséquent

$$(g, l) = (\nu, l) - (P, l) = 2\ .\ \frac{dP}{dh} - \frac{dl}{dk}.$$

Les valeurs de P et l sont

$$P = \int\frac{k\,dr}{r\ .\ \sqrt{(2Rr^2 - hr^2 - k^2)}},$$

$$l = -t + \int\frac{r\,dr}{\sqrt{(2Rr^2 - hr^2 - k^2)}};$$

si les limites de ces intégrales étaient indépendantes de k et de l, il suffirait, pour avoir les différences partielles $\frac{dP}{dh}$, $\frac{dl}{dk}$, de différencier sous le signe intégral, par rapport à h et à k; on aurait donc alors

$$\frac{dP}{dh} = \tfrac{1}{2}\int \frac{k\,r\,dr}{(2Rr^2 - hr^2 - k^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{dl}{dk} = \int \frac{k\,r\,dr}{(2Rr^2 - hr^2 - k^2)^{\frac{3}{2}}};$$

et, par conséquent,

$$\frac{2\,dP}{dh} - \frac{dl}{dk} = 0.$$

Mais, si ces intégrales doivent s'évanouir pour une valeur de r, qu'on suppose une fonction quelconque de h et k, les valeurs de $\frac{dP}{dh}$ et $\frac{dl}{dk}$ ne sont plus complètes; et, si nous désignons par ρ cette valeur de r, par y ce que devient le radical $\sqrt{(2Rr^2 - hr^2 - k^2)}$, quand on fait $r = \rho$, il est aisé de prouver que les valeurs complètes de ces différences partielles seront

$$\frac{dP}{dh} = \tfrac{1}{2}\int \frac{k\,r\,dr}{(2Rr^2 - hr^2 - k^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{k}{\rho y}\cdot\frac{d\rho}{dh},$$

$$\frac{dl}{dk} = \int \frac{k\,r\,dr}{(2Rr^2 - hr^2 - k^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\rho}{y}\cdot\frac{d\rho}{dk}.$$

En effet, l'intégrale

$$\int \frac{k\,dr}{r\sqrt{(2Rr^2 - hr^2 - k^2)}},$$

prise depuis $r = \rho$, jusqu'à une valeur indéterminée de r, représente la somme des valeurs de $\frac{k\,dr}{r\sqrt{(2Rr^2 - hr^2 - k^2)}}$, comprises dans cet intervalle; si donc ρ devenait $\rho + \delta\rho$, $\delta\rho$ étant un accroissement quelconque, cette intégrale serait diminuée de la somme des valeurs de la même quantité $\frac{k\,dr}{r\sqrt{(2Rr^2 - hr^2 - k^2)}}$, comprises depuis $r = \rho$ jusqu'à $r = \rho + \delta\rho$; mais si $\delta\rho$ est infiniment petit, cette dernière somme sera évidemment égale à $\frac{k\delta\rho}{\rho y}$; donc lorsque h devient $h + dh$, et que, par conséquent, ρ devient $\rho + \frac{d\rho}{dh}\cdot dh$, la valeur de P doit être

être diminuée de $\frac{k}{\rho y}\cdot\frac{d\rho}{dh}\cdot dh$; ce qui produit le terme $-\frac{k}{\rho y}\cdot\frac{d\rho}{dh}$, dans l'expression de $\frac{dP}{dh}$.

On prouvera de même que la variation de la limite $r = \rho$, donne le terme $-\frac{\rho}{y}\cdot\frac{d\rho}{dk}$, dans la valeur de $\frac{dl}{dk}$.

Maintenant, en ayant égard aux valeurs complètes de $\frac{dP}{dh}$ et $\frac{dl}{dk}$, nous aurons

$$(g, l) = \frac{1}{y}\cdot\left(\rho\cdot\frac{d\rho}{dk} - \frac{2k}{\rho}\cdot\frac{d\rho}{dh}\right);$$

quantité qui sera toujours une fonction de k et de h; ce qui est conforme au théorème du n.° 7.

[21.] On peut écrire sous une autre forme la valeur de (g, l). En effet, nous avons désigné par y ce que devient le radical $\sqrt{(2Rr^2 - hr^2 - k^2)}$, quand on y fait $r = \rho$; l'équation

$$2Rr^2 - hr^2 - k^2 = y^2,$$

deviendra donc identique après cette substitution; il sera donc permis de la différencier, soit par rapport à h, soit par rapport à k; ainsi en désignant par q ce que devient $\frac{d.Rr^2}{dr}$, quand on y fait $r = \rho$, on aura

$$q\cdot\frac{d\rho}{dh} - \frac{1}{2}\cdot\rho^2 - h\rho\cdot\frac{d\rho}{dh} = y\rho\cdot\frac{dy}{dh},$$

$$q\cdot\frac{d\rho}{dk} - h\rho\cdot\frac{d\rho}{dk} - k = y\rho\cdot\frac{dy}{dk};$$

d'où l'on tire

$$\left(\rho\cdot\frac{d\rho}{dk} - \frac{2k}{\varphi}\cdot\frac{d\rho}{d}\right)\cdot(q - h\rho) = \left(\rho\cdot\frac{dy}{dk} - \frac{2k}{\rho}\cdot\frac{d\rho}{dh}\right)\cdot y,$$

et par conséquent

$$(g, l) = \frac{\rho\cdot\frac{dy}{dk} - \frac{2k}{\rho}\cdot\frac{dy}{dh}}{q - h\rho}.$$

Cette expression fait voir clairement que (g, l) sera nul en général, si, comme nous l'avons supposé (n.os 18 et 19), ρ est la plus petite ou la plus grande valeur de r; car l'une et l'autre de ces valeurs sont données par l'équation

$$2Rr^2 - hr^2 - k^2 = 0, \quad \text{ou } y = 0.$$

Ainsi, dans notre hypothèse, on a

$$(g, l) = 0.$$

[22.] Rassemblons maintenant les valeurs de (h, k), (h, α), &c. que nous avons trouvées, savoir :

$$(h, k) = 0,\ (h, \alpha) = 0,\ (h, \gamma) = 0,\ (h, g) = 0,\ (h, l) = -2;$$
$$(k, \alpha) = 0,\ (k, \gamma) = 0,\ (k, g) = 1,\ (k, l) = 0;$$
$$(\alpha, \gamma) = \frac{1}{k \cdot \sin. \gamma},\ (\alpha, g) = 0,\ (\alpha, l) = 0;$$
$$(\gamma, g) = \frac{\cos. \gamma}{k \cdot \sin. \gamma},\ (\gamma, l) = 0;$$
$$(g, l) = 0;$$

et substituons les dans les valeurs de $dh, dk, dl, dg, d\alpha, d\gamma$, formées d'après les valeurs générales du n.° 10; nous aurons

$$dh = -2 \cdot \frac{d\Omega}{dl} \cdot dt,$$
$$dl = 2 \cdot \frac{d\Omega}{dh} \cdot dt,$$
$$dk = \frac{d\Omega}{dg} \cdot dt,$$
$$dg = -\frac{d\Omega}{dk} \cdot dt - \frac{\cos. \gamma}{k \cdot \sin. \gamma} \cdot \frac{d\Omega}{d\gamma} \cdot dt,$$
$$= \frac{\cos. \gamma}{k \cdot \sin. \gamma} \cdot \frac{d\Omega}{dg} \cdot dt - \frac{1}{k \cdot \sin. \gamma} \cdot \frac{d\Omega}{d\alpha} \cdot dt,$$
$$d\alpha = \frac{1}{k \cdot \sin. \gamma} \cdot \frac{d\Omega}{d\gamma} \cdot dt.$$

[23.] Ces formules ont lieu pour une loi quelconque d'attraction, c'est-à-dire, pour une forme indéterminée de la fonction φr, qui représente

cette loi (n.° 12) : pour les appliquer au mouvement des planètes autour du soleil, il faut prendre la loi de la nature; il faut donc supposer $\varphi r = \frac{\mu}{r^2}$, μ étant une constante égale à la somme des masses du soleil et de la planète que l'on considère. Nous aurons alors

$$R = -\int \varphi r \cdot dr = \frac{\mu}{r};$$

le *maximum* et le *minimum* des valeurs de r seront donc données par l'équation

$$2\mu r - hr^2 - k^2 = 0;$$

d'où il suit que $\frac{2\mu}{h}$ est la somme de ces deux valeurs, et $\frac{k^2}{h}$, leur produit; désignant donc la plus grande par $a(1+e)$, et la plus petite par $a(1-e)$, on aura

$$\frac{\mu}{h} = a, \quad \frac{k^2}{h} = a^2(1-e^2);$$

ou bien

$$h = \frac{\mu}{a}, \quad k = \sqrt{[\mu a(1-e^2)]}.$$

La constante a sera le demi-grand axe de l'ellipse, e sera son excentricité; et si nous faisons $\frac{\mu}{a^3} = n^2$, nous aurons nt pour le moyen mouvement de la planète. Sa distance moyenne au périhélie, ou ce qu'on appelle l'*anomalie moyenne*, sera de la forme $nt + c$, c désignant une nouvelle constante, telle qu'en la comparant à notre constante l, nous avons $c = nl$; d'où l'on tire

$$l = \frac{c a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}.$$

Ces valeurs des constantes h, k, l, en fonction des trois élémens elliptiques a, e, c, donnent, en différenciant,

$$dh = -\frac{\mu}{a^2} \cdot da,$$
$$dl = \frac{dc}{n} + \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\mu}} \cdot c\,da,$$

$$dk = \frac{\sqrt{[\mu(1-e^2)]}}{2\sqrt{a}} \cdot da - \frac{\sqrt{\mu a}}{\sqrt{(1-e^2)}} \cdot e\,de;$$

d'où l'on tire réciproquement, en mettant $a^3 n^2$ à la place de μ,

$$da = -\frac{dh}{an^2},$$

$$dc = n\,dl + \frac{3}{2} \cdot \frac{c\,dh}{a^2 n^2},$$

$$de = -\frac{\sqrt{(1-e^2)}}{a^2 ne} \cdot dk - \frac{(1-e^2)}{2a^2 n^2 e} \cdot dh.$$

La quantité Ω peut être considérée comme une fonction de h, l, k, ou comme une fonction de a, c, e; on a donc l'équation identique

$$\frac{d\Omega}{dh}.dh + \frac{d\Omega}{dl}.dl + \frac{d\Omega}{dk}.dk = \frac{d\Omega}{da}.da + \frac{d\Omega}{dc}.dc + \frac{d\Omega}{de}.de;$$

mettant dans son second membre, à la place de da, dc et de, leurs valeurs précédentes; égalant ensuite de part et d'autre les coëfficiens de dh, dl, dk, on trouve

$$\frac{d\Omega}{dh} = -\frac{1}{an^2} \cdot \frac{d\Omega}{da} + \frac{3}{2} \cdot \frac{c}{a^2 n^2} \cdot \frac{d\Omega}{dc} - \frac{(1-e^2)}{2a^2 n^2 e} \cdot \frac{d\Omega}{de},$$

$$\frac{d\Omega}{dk} = -\frac{\sqrt{(1-e^2)}}{a^2 ne} \cdot \frac{d\Omega}{de},$$

$$\frac{d\Omega}{dl} = n \cdot \frac{d\Omega}{dc}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans celles de dh, dl et dk du n.° précédent, et ensuite celles-ci dans les valeurs de da, dc, de, on aura

$$da = \frac{2}{an} \cdot \frac{d\Omega}{dc} \cdot dt,$$

$$dc = -\frac{2}{an} \cdot \frac{d\Omega}{da} \cdot dt - \frac{(1-e^2)}{a^2 ne} \cdot \frac{d\Omega}{de} \cdot dt,$$

$$de = -\frac{\sqrt{(1-e^2)}}{a^2 ne} \cdot \frac{d\Omega}{dg} \cdot dt + \frac{(1-e^2)}{a^2 ne} \cdot \frac{d\Omega}{dc} \cdot dt.$$

Nos valeurs de $dg, d\gamma, d\alpha$ du n.° précédent deviennent, en y mettant pour $\frac{d\Omega}{dk}$, sa valeur, et $a^2 n \sqrt{(1-e^2)}$, à la place de k,

$$dg = \frac{\sqrt{(1-e^2)}}{a^2 ne} \cdot \frac{d\Omega}{de} \cdot dt - \frac{\cos.\gamma}{a^2 n.\sqrt{(1-e^2)}.\sin.\gamma} \cdot \frac{d\Omega}{d\gamma} \cdot dt,$$

$$d\gamma = \frac{\cos.\gamma}{a^2 n.\sqrt{(1-e)}.\sin.\gamma} \cdot \frac{d\Omega}{d\gamma} \cdot dt - \frac{1}{a^2 n.\sqrt{(1-e^2)}.\sin.\gamma} \cdot \frac{d\Omega}{d\alpha} \cdot dt,$$

$$d\alpha = \frac{1}{a^2 n.\sqrt{(1-e^2)}.\sin.\gamma} \cdot \frac{d\Omega}{d\gamma} \cdot dt.$$

Ces différentielles des six élémens elliptiques $a, c, e, g, \gamma, \alpha$, coïncident avec celles que M. *Lagrange* a trouvées, d'une manière toute différente, dans son *Mémoire sur les variations des élémens elliptiques*, art. 24. Il faut observer que, dans cet article, les lettres b, f, g, h représentent les quantités qui sont désignées dans nos formules par les lettres c, g, α, γ; dans les deux mémoires, les lettres Ω, n, a, c, ont la même signification.

[24.] Notre analyse suppose que l'anomalie moyenne est exprimée par $nt + c$, dans le mouvement troublé, comme dans le mouvement elliptique; elle suppose aussi qu'en prenant la différence partielle de Ω par rapport à a, qui entre dans la valeur de dc, on fait varier tout ce qui dépend de a, et par conséquent le coëfficient n qui multiplie t. Cette manière de différencier a l'inconvénient de faire sortir le temps t hors des signes *sin.* et *cos.*, même dans des cas où les quantités que l'on considère doivent rester périodiques; mais on peut l'éviter, en supposant que l'anomalie moyenne est représentée par $\int n\,dt + c$, dans le mouvement troublé, et que l'on ne fait pas varier $\int n\,dt$, en prenant la différentielle de Ω par rapport à a. Il est aisé de démontrer que cette seconde manière revient au même que la première; de sorte que, dans l'un et l'autre cas, la valeur de dc conserve la même forme.

En effet, on a $nt = \int n\,dt + \int t\,dn$; il faut donc, dans le second cas, ajouter le terme $\int t\,dn$, à l'anomalie moyenne, pour qu'elle coïncide avec celle du premier cas; par conséquent il faut retrancher le terme $t\,dn$, de la valeur précédente de dc, pour qu'elle convienne au second

cas; mais, d'un autre côté, la différence partielle $\frac{d\Omega}{da}$ se trouvera diminuée du terme $\frac{d\Omega}{dn} \cdot \frac{dn}{da}$, qui exprime la partie de cette différence relative à n, que l'on ne fait pas varier dans le second cas; ainsi, pour passer du premier cas au second, il faut retrancher la quantité

$$t\,dn - \frac{2\,c}{an} \cdot \frac{d\Omega}{dn} \cdot \frac{dn}{da} \cdot dt,$$

de notre valeur de dc. Or, on a évidemment

$$\frac{d\Omega}{dn} = \frac{d\Omega}{dc} \cdot t;$$

mettant donc pour $\frac{d\Omega}{dc}$, sa valeur $\frac{an}{2} \cdot \frac{da}{dt}$, la quantité qu'on doit retrancher de dc, deviendra

$$t\,dn - t \cdot \frac{dn}{da} \cdot da;$$

quantité nulle, puisque n n'étant fonction que de a, la différentielle dn est égale à $\frac{dn}{da} \cdot da$.

Concluons donc que l'expression précédente de dc convient également à l'anomalie $nt + c$, et à l'anomalie $\int n\,dt + c$.

[25.] Puisque g exprime dans nos formules la distance du périhélie à la ligne des nœuds, il s'ensuit que dg exprime la quantité dont ce point s'écarte de cette ligne mobile, pendant l'instant dt. Pour avoir, à un instant quelconque, le déplacement du périhélie, indépendamment du mouvement des nœuds, menons par le soleil, dans le plan de l'orbite, une ligne arbitraire, et supposons que cette ligne reste fixe pendant l'instant dt; soit ω, la distance variable du périhélie à cette ligne fixe; il est évident qu'en négligeant les quantités infiniment petites du second ordre, $d\omega$ sera égal à dg, plus le mouvement du nœud pendant l'instant dt, projeté sur le plan de l'orbite, c'est-à-dire, que l'on aura

$$d\omega = dg + \cos.\,\gamma.\,d\alpha;$$

ou bien, en substituant les valeurs précédentes de dg et $d\alpha$,

$$d\omega = \frac{\sqrt{(1-e^2)}}{a^2 n e} \cdot \frac{d\Omega}{de} \cdot dt.$$

Cette formule coïncide avec la quatrième de M. *Laplace* (Supplément au troisième volume de la *Mécanique céleste*, page 6), en observant que nous appelons $-\Omega$, ce que M. *Laplace* appelle R, et que toutes ses formules supposent que l'on a pris μ pour unité de masse, ce qui donne $a^3 n^2 = 1$.

[26.] Pour comparer nos cinq autres formules à celles de la *Mécanique céleste*, observons que, dans celles-ci, l'anomalie moyenne du mouvement elliptique est représentée par $nt + \varepsilon - \omega$: la constante ε est la longitude moyenne de la planète, à l'époque d'où l'on compte le temps; $nt + \varepsilon$ est cette longitude à un instant quelconque, et ω est, comme précédemment, la longitude du périhélie; toutes ces longitudes sont comptées dans le plan de l'orbite, à partir d'une même ligne. Or, nous avons représenté l'anomalie moyenne par $nt + c$; il faut donc faire $c = \varepsilon - \omega$; ce qui donne

$$d\varepsilon = dc + d\omega;$$

substituant les valeurs de dc et $d\omega$, il vient

$$d\varepsilon = -\frac{2}{an} \cdot \frac{d\Omega}{da} \cdot dt + \frac{\sqrt{(1-e^2)}}{a^2 n e}\left[1 - \sqrt{(1-e^2)}\right] \cdot \frac{d\Omega}{de} \cdot dt;$$

formule qui coïncide avec la seconde de M. *Laplace*.

Soit aussi

$$p = \sin.\,\gamma \cdot \sin.\,\alpha, \quad q = \sin.\,\gamma \cdot \cos.\,\alpha;$$

et par conséquent,

$$dp = \cos.\,\gamma \cdot \sin.\,\alpha \cdot d\gamma + q \cdot d\alpha,$$
$$dq = \cos.\,\gamma \cdot \cos.\,\alpha \cdot d\gamma - p \cdot d\alpha.$$

Nous pourrons considérer Ω, soit comme une fonction de c, g, α, γ, soit comme une fonction de $\varepsilon, \omega, p, q$; ce qui donne l'équation

identique

$$\frac{d\Omega}{dc}.dc+\frac{d\Omega}{dg}.dg+\frac{d\Omega}{d\alpha}.d\alpha+\frac{d\Omega}{d\gamma}.d\gamma=\frac{d\Omega}{d\epsilon}.d\epsilon+\frac{d\Omega}{d\omega}.d\omega+\frac{d\Omega}{dp}.dp+\frac{d\Omega}{dq}.dq;$$

substituant dans son second membre, à la place de $d\epsilon$, $d\omega$, dp, dq, leurs valeurs en fonction de dc, dg, $d\alpha$, $d\gamma$, et également ensuite de part et d'autre les coëfficiens de ces dernières différentielles, on trouve

$$\frac{d\Omega}{dc}=\frac{d\Omega}{d\epsilon},$$

$$\frac{d\Omega}{dg}=\frac{d\Omega}{d\epsilon}+\frac{d\Omega}{d\omega},$$

$$\frac{d\Omega}{d\alpha}=\cos.\gamma.\frac{d\Omega}{d\epsilon}+\cos.\gamma.\frac{d\Omega}{d\omega}+q.\frac{d\Omega}{dp}-p.\frac{d\Omega}{dq},$$

$$\frac{d\Omega}{d\gamma}=\cos.\gamma.\sin.\alpha.\frac{d\Omega}{dp}+\cos.\gamma.\cos.\alpha.\frac{d\Omega}{dq}.$$

Si l'on substitue maintenant ces valeurs dans celles de da, de, $d\alpha$ et $d\gamma$, du n.° 23, et ensuite les valeurs de $d\alpha$ et $d\gamma$, dans les précédentes de dp et dq, on aura

$$da=\frac{2}{an}.\frac{d\Omega}{d\epsilon}.dt,$$

$$de=-\frac{\sqrt{(1-e^2)}}{a^2ne}.\frac{d\Omega}{d\omega}.dt-\frac{\sqrt{(1-e^2)}}{a^2ne}[1-\sqrt{(1-e^2)}].\frac{d\Omega}{d\epsilon}.dt,$$

$$dp=\frac{\cos.\gamma}{na^2.\sqrt{(1-e^2)}}.\frac{d\Omega}{dq}.dt,$$

$$dq=\frac{-\cos.\gamma}{na^2.\sqrt{(1-e^2)}}.\frac{d\Omega}{dp}.dt.$$

Ces quatre formules coïncident avec les formules analogues du supplément à la *Mécanique céleste*, en observant de faire $\gamma=0$ dans les deux dernières, parce que M. *Laplace* rapporte les variations des quantités p et q à un plan infiniment peu incliné à celui de l'orbite.

[27.] En général, la forme des équations auxquelles on parvient dépend

dépend du choix qu'on fait des constantes arbitraires, et elle peut varier d'une infinité de manières. On peut observer qu'on aurait, pour les différentielles de ces constantes, des expressions qui ne contiendraient qu'une seule différence partielle de Ω, dans les valeurs de chaque différentielle, et qui conviendraient à une loi quelconque d'attraction, en prenant pour constantes arbitraires les cinq quantités h, k, l, α et γ du n.° 22, et la quantité ω du n.° 25. Il est aisé de voir que les valeurs de leurs différentielles seraient données par ces équations,

$$dh=-2.\frac{d\Omega}{dl}.dt,$$

$$dl=2.\frac{d\Omega}{dh}.dt,$$

$$dk=\frac{d\Omega}{d\omega}.dt,$$

$$d\omega=-\frac{d\Omega}{dk}.dt;$$

$$d\alpha=\frac{1}{k.\sin.\gamma}.\frac{d\Omega}{d\gamma}.dt,$$

$$d\gamma=-\frac{1}{k.\sin.\gamma}.\frac{d\Omega}{d\alpha}.dt,$$

qui sont les plus simples que l'on puisse obtenir.

On aurait aussi des équations dont chacune ne contiendrait qu'une seule différence partielle, en prenant pour constantes arbitraires les valeurs des trois coordonnées x, y, z, et des trois vîtesses $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, qui répondent à une époque déterminée, par exemple, à l'instant où l'on a $t=0$. Si l'on désigne ces coordonnées par a, b, c, et par a', b', c' les trois vîtesses correspondantes, on aura

$$da=-\frac{d\Omega}{da'}.dt,\quad da'=\frac{d\Omega}{da}.dt;$$

$$db=-\frac{d\Omega}{db'}.dt,\quad db'=\frac{d\Omega}{db}.dt;$$

$$dc=-\frac{d\Omega}{dc'}.dt,\quad dc'=\frac{d\Omega}{dc}.dt;$$

Nous ne nous arrêterons point à démontrer ces formules, qui ne nous semblent pas devoir être d'une grande utilité.

Variations des Constantes arbitraires relatives au mouvement de rotation.

[28.] Nous allons d'abord chercher les équations du mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, dans le cas où aucune force n'agit sur les points de ce corps; ensuite nous ferons varier les constantes arbitraires contenues dans ces équations, afin de les étendre au cas où des forces données sont appliquées à ces points.

Soit dm un élément quelconque de la masse du corps; x, y, z les trois coordonnées rectangulaires de cet élément, parallèles à trois axes fixes, menés par le point fixe donné, point que nous appellerons dorénavant le centre du corps; soient aussi x_i, y_i, z_i les coordonnées du même élément, rapportées à la même origine et aux trois axes principaux du corps, c'est-à-dire, aux trois axes rectangulaires, par rapport auxquels on a

$$\int x_i y_i \, dm = 0, \quad \int x_i z_i \, dm = 0, \quad \int y_i z_i \, dm = 0;$$

ces intégrales devant être étendues à la masse entière du mobile.

Les valeurs de x, y, z, en fonction de x_i, y_i, z_i, sont de cette forme,

$$\begin{aligned} x &= a x_i + b y_i + c z_i, \\ y &= a' x_i + b' y_i + c' z_i, \\ z &= a'' x_i + b'' y_i + c'' z_i. \end{aligned}$$

Les neuf coèfficiens a, b, c, &c. sont les cosinus des angles que font les axes des x, y, z, avec ceux des x_i, y_i, z_i; le coèfficient a, par exemple, est le cosinus de l'angle que fait l'axe des x_i avec l'axe de x; et de même pour les huit autres. Ils sont liés entre eux par les six équations de condition,

$$\begin{aligned} a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1, & a b + a' b' + a'' b'' &= 0, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1, & a c + a' c' + a'' c'' &= 0, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1, & b c + b' c' + b'' c'' &= 0, \end{aligned}$$

qui résultent de ce qu'on doit avoir identiquement

$$x^2 + y^2 + z^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2.$$

Réciproquement les valeurs de x_i, y_i, z_i, en fonction de x, y, z, sont

$$\begin{aligned} x_i &= a x + a' y + a'' z, \\ y_i &= b x + b' y + b'' z, \\ z_i &= c x + c' y + c'' z; \end{aligned}$$

et, au lieu des six équations de condition précédentes, on peut prendre ces six autres qui leur sont équivalentes,

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1, & a a' + b b' + c c' &= 0, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1, & a a'' + b b'' + c c'' &= 0, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 &= 1, & a' a'' + b' b'' + c' c'' &= 0. \end{aligned}$$

Soit qu'on emploie ces équations, soit qu'on fasse usage des précédentes, on voit que six des neuf coèfficiens a, b, c, &c. sont des fonctions de trois autres, ou, plus généralement, ces neuf coèfficiens sont des fonctions de trois quantités indépendantes entre elles; et en effet, la position des trois axes principaux, par rapport aux axes des x, y, z, peut toujours être déterminée au moyen de trois angles, savoir : l'angle compris entre l'axe des x, et l'intersection du plan des x, y, avec le plan des x_i, y_i; l'angle compris entre cette intersection et l'axe des x_i; enfin l'inclinaison du plan des x_i, y_i, sur le plan des x, y. En désignant le premier de ces angles par $\downarrow$, le second par φ, et l'inclinaison par θ, on aura, d'après les formules connues,

$$\begin{aligned} a &= \cos.\theta \,.\, \sin.\downarrow \,.\, \sin.\varphi + \cos.\downarrow \,.\, \cos.\varphi, \\ b &= \cos.\theta \,.\, \sin.\downarrow \,.\, \cos.\varphi - \cos.\downarrow \,.\, \sin.\varphi, \\ c &= \sin.\theta \,.\, \sin.\downarrow, \\ a' &= \cos.\theta \,.\, \cos.\downarrow \,.\, \sin.\varphi - \sin.\downarrow \,.\, \cos.\varphi, \\ b' &= \cos.\theta \,.\, \cos.\downarrow \,.\, \cos.\varphi + \sin.\downarrow \,.\, \sin.\varphi, \\ c' &= \sin.\theta \,.\, \cos.\downarrow, \end{aligned}$$

$$a'' = -\sin.\theta \,.\, \sin.\varphi,$$
$$b'' = -\sin.\theta \,.\, \cos.\varphi,$$
$$c'' = \cos.\theta.$$

Pour abréger, nous appellerons dans la suite le plan des x_1, y_1 l'*équateur* du corps; son intersection, avec le plan arbitraire des x, y, sera la ligne des *nœuds :* les angles $\downarrow$ et φ expriment dans les formules que nous citons, les *longitudes* de l'axe des x et de l'axe principal des x_1, comptées à partir de la ligne des nœuds, la première sur le plan des x, y, et la seconde sur l'équateur.

[29.] Pendant le mouvement du corps, les angles θ, $\downarrow$ et φ varient, ainsi que les coordonnées x, y, z; mais les coordonnées x_1, y_1, z_1, restent les mêmes pour un même élément; on a donc, en différenciant les valeurs de x, y, z, par rapport au temps,

$$dx = x_1\,da + y_1\,db + z_1\,dc,$$
$$dy = x_1\,da' + y_1\,db' + z_1\,dc',$$
$$dz = x_1\,da'' + y_1\,db'' + z_1\,dc''.$$

Si l'on égale à zéro ces valeurs de dx, dy, dz, on déterminera les coordonnées x_1, y_1, z_1 des points du corps que l'on peut regarder comme immobiles pendant un instant infiniment petit; or, si l'on fait, pour abréger,

$$a\,db + a'\,db' + a''\,db'' = -r\,dt,$$
$$a\,dc + a'\,dc' + a''\,dc'' = +q\,dt,$$
$$b\,dc + b'\,dc' + b''\,dc'' = -p\,dt;$$

dt étant l'élément du temps; si, de plus, on a égard aux équations de condition du n.° précédent et à leurs différentielles, il sera aisé de transformer les trois équations $dx = 0$, $dy = 0$, $dz = 0$, en celles-ci :

$$qz_1 - ry_1 = 0, \quad pz_1 - rx_1 = 0, \quad py_1 - qx_1 = 0,$$

qui nous apprennent que les points du corps qui restent immobiles pendant l'instant dt, sont rangés sur une même ligne droite, passant par le centre du corps.

Cette droite est ce qu'on appelle l'*axe instantanée* de rotation; les trois dernières équations sont celles de ses projections sur les trois plans principaux; d'où l'on conclut que les trois quantités p, q, r déterminent la position de cet axe, par rapport aux trois axes principaux; de manière que si l'on appelait α, β, γ les angles qu'il fait avec les axes des x_1, y_1, z_1, on aurait

$$\cos.\alpha = \frac{p}{\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}}, \text{ par rapport à l'axe des } x_1;$$
$$\cos.\beta = \frac{q}{\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}}, \text{ par rapport à l'axe des } y_1;$$
$$\cos.\gamma = \frac{r}{\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}}, \text{ par rapport à l'axe des } z_1.$$

[30.] Le corps tourne pendant l'instant dt autour de l'axe instantanée comme autour d'un axe fixe; par conséquent la vîtesse angulaire relative à cet axe, est la même pour tous les points du corps. Pour la déterminer, considérons le point qui se trouve sur l'axe des z_1, à une distance du centre égale à l'unité; nous aurons $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 1$, la vîtesse absolue de ce point sera

$$\sqrt{\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right)} = \frac{\sqrt{(dc^2+dc'^2+dc''^2)}}{dt};$$

et comme la distance à l'axe instantanée est sin. γ, on aura, pour la vîtesse angulaire cherchée,

$$\frac{\sqrt{(dc^2+dc'^2+dc''^2)}}{\sin.\gamma\,.\,dt} = \frac{\sqrt{(dc^2+dc'^2+dc''^2)}}{dt\,.\,\sqrt{(p^2+q^2)}} \cdot \sqrt{(p^2+q^2+r^2)},$$

en mettant, pour sin. γ, sa valeur. Or, en ayant égard aux équations de condition du n.° 28, on a

$$(p^2+q^2)\,dt^2 = dc^2 + dc'^2 + dc''^2 - (c\,dc + c'\,dc' + c''\,dc'')^2;$$

quantité qui se réduit à $dc^2 + dc'^2 + dc''^2$, à cause que l'équation $c^2 + c'^2 + c''^2 = 1$ donne $c\,dc + c\,dc' + c''\,dc'' = 0$. Nous aurons donc $\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}$ pour la vîtesse angulaire autour de l'axe instantanée.

Cette vîtesse peut être décomposée en trois autres autour de trois

axes fixes rectangulaires ; et pour avoir la vîtesse autour de l'un de ces axes, il faut multiplier $\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}$ par le cosinus de l'angle qu'il fait avec l'axe instantanée. Si donc ces trois axes sont ceux qui coïncident, au commencement de l'instant dt, avec les axes principaux, on aura p, pour la vîtesse autour de l'axe des $x_{,}$; q, pour la vîtesse autour de l'axe des $y_{,}$; r, pour la vîtesse autour de l'axe des $z_{,}$. Ainsi ces trois quantités p, q, r expriment les vîtesses angulaires autour des axes principaux, supposés fixes pendant l'instant dt.

[31.] Les véritables inconnues du problème sont les trois angles $\downarrow$, θ, φ, puisqu'ils font connaître à chaque instant la position du corps, par rapport à des plans fixes. Il s'agit donc de trouver leurs valeurs en fonctions du temps, ou du moins, les équations dont ces valeurs dépendent. Or, si l'on substitue dans les valeurs de p, q, r, celles des neuf quantités a, b, c, &c. données plus haut (n.° 28), on trouve, toute réduction faite,

$$p\,dt = \sin.\,\varphi\,.\,\sin.\,\theta\,.\,d\downarrow - \cos.\,\varphi\,.\,d\theta,$$
$$q\,dt = \cos.\,\varphi\,.\,\sin.\,\theta\,.\,d\downarrow + \sin.\,\varphi\,.\,d\theta,$$
$$r\,dt = d\varphi - \cos.\,\varphi\,.\,d\downarrow;$$

équations qui détermineront les valeurs de φ, $\downarrow$ et θ, quand celles de p, q, r seront connues.

[32.] Le principe des aires va nous fournir trois autres équations qui serviront à terminer p, q, r.

Pour former ces équations, imaginons, par le centre du corps, un plan fixe qui coïncide avec l'équateur, au commencement de l'instant dt; sur ce plan, projetons l'élément quelconque dm; le rayon vecteur de la projection de ce point sera $\sqrt{(x_{,}^2+y_{,}^2)}$, et l'aire décrite par ce rayon, pendant l'instant dt, sera égale à $\frac{r\,dt}{2}.(x_{,}^2+y_{,}^2)$, puisque r est la vîtesse angulaire autour de l'axe des $z_{,}$, perpendiculaire à l'équateur. On trouvera de même $\frac{q\,dt}{2}.(x_{,}^2+z_{,}^2)$, pour l'aire décrite par le rayon

vecteur de l'élément dm, projeté sur le plan des $x_{,}$, $y_{,}$, et $\frac{p\,dt}{2}.(y_{,}^2-$

pour l'aire décrite par le rayon vecteur du même élément, projet le plan des $y_{,}$, $z_{,}$. Connaissant ces trois aires, il est facile d'en d celle qui se rapporte à un quatrième plan fixe quelconque ; car on par la théorie des projections, qu'il faut pour cela multiplier ch des trois aires données, par le cosinus de l'angle que l'axe perpendic à son plan fait avec l'axe perpendiculaire au nouveau plan fix prendre la somme des trois résultats. Or, a'', b'', c'' sont les c des angles que fait l'axe des $z_{,}$, avec les axes des x, y, z (n.° 28); l'aire décrite par le rayon vecteur de dm, projeté sur le plan des sera égale à

$$\frac{a''\,p\,dt}{2}.(y_{,}^2+z_{,}^2)+\frac{b''\,q\,dt}{2}.(x_{,}^2+z_{,}^2)+\frac{c''\,r\,dt}{2}.(x_{,}^2+$$

Maintenant, si l'on multiplie cette aire par la masse dm, qu'on l'i et qu'on étende l'intégrale à la masse entière du corps, il suit du cipe des aires que cette intégrale sera une quantité indépendan temps, ou une constante arbitraire; en la désignant donc par $\frac{1}{2}\beta$, on aura

$$A\,a''\,p + B\,b''\,q + C\,c''\,r = \beta;$$

A, B, C étant les trois momens d'inertie du corps, relatifs à ses principaux, c'est-à-dire, les trois intégrales $\int(y_{,}^2+z_{,}^2).dm$, $\int(x_{,}^2+z_{,}$ $\int(x_{,}^2+y_{,}^2).dm$.

On trouvera de la même manière, en considérant les aires pro sur les plans des $x_{,}$, $z_{,}$ et des $y_{,}$, $z_{,}$, ces deux autres équations,

$$A\,a'\,p + B\,b'\,q + C\,c'\,r = \beta',$$
$$A\,a\,p + B\,b\,q + C\,c\,r = \beta'';$$

β' et β'' étant deux nouvelles constantes arbitraires.

[33.] Telles sont les trois équations qui résultent du princip aires ; pour en éliminer les quantités a, b, c, &c., je les différencie

je les ajoute ensemble, après avoir multiplié la première par c'', la deuxième par c', la troisième par c; en faisant attention aux équations de condition du n.° 28, à leurs différentielles et aux valeurs des p, q, r du n.° 29, on trouve pour cette somme

$$C\,dr + (B - A).pq\,dt = 0.$$

En multipliant de même les différentielles de ces équations, la première par b'', la deuxième par b', la troisième par b, et les ajoutant ensuite, il vient

$$B\,dq + (A - C).pr\,dt = 0.$$

Enfin, si l'on ajoute ces mêmes différentielles, après les avoir multipliées, la première par a'', la deuxième par a', la troisième par a, on a

$$A\,dp + (C - B).qr\,dt = 0.$$

[34.] Ces trois équations, que l'on peut substituer à celles des aires, sont faciles à intégrer. En les multipliant, la première par r, la seconde par q, la troisième par p, les ajoutant ensuite, et intégrant, on trouve

$$A\,p^2 + B\,q^2 + C\,r^2 + h = 0;$$

h étant la constante arbitraire. De même, en les multipliant respectivement par Cr, Bq, Ap, les ajoutant ensuite, et intégrant, il vient

$$C^2 r^2 + B^2 q^2 + A^2 p^2 = k^2; \qquad \text{(k)}$$

k étant une seconde constante arbitraire. Enfin, si l'on prend dans ces deux intégrales les valeurs de p et q, qu'on les substitue dans la première de nos trois équations, qu'on résolve ensuite cette équation par rapport à dt, et qu'on intègre, on aura

$$t + l = \int \frac{\sqrt{(AB)}.C\,dr}{[k^2 + Ah + (A-C).Cr^2]^{\frac{1}{2}}.[-k^2 - Bh + (C-B).Cr^2]^{\frac{1}{2}}};$$

l étant une troisième constante arbitraire.

Cette équation donnera, par les quadratures, la valeur de t en fonction de r, et réciproquement, la valeur de r en fonction de t; ensuite les

les deux équations précédentes donneront les valeurs de p et q, aussi en fonction de t.

[35.] Si les trois équations du n.° 32 étaient réellement distinctes entre elles, elles donneraient, sans nouvelle intégration et sans qu'on fût obligé de recourir aux équations du n.° 31, les valeurs de φ, $\downarrow$ et θ, au moyen de celles de p, q, r, maintenant connues; mais l'une de ces trois équations est une suite des deux autres, en vertu de l'équation (k) du n.° précédent; car si l'on fait la somme de leurs carrés, on trouve facilement qu'elle se réduit à

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2;$$

résultat qui rentre dans l'équation (k), et qui donne entre les quatre constantes β, β', β'' et k, l'équation de condition

$$k^2 = \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2.$$

Les équations du n.° 32 ne pourront donc servir à déterminer que deux des trois angles φ, $\downarrow$ et θ, et il faudra une nouvelle intégration pour déterminer le troisième.

Pour rendre cette intégration possible, il est nécessaire de rapporter la position de l'équateur à un plan particulier, dont M. *Laplace* a donné la théorie générale, et qu'il a nommé le *plan invariable*. Par rapport à ce plan, la somme des projections des aires décrites par les rayons vecteurs des molécules du corps, multipliées par les masses de ces molécules, est un *maximum* et égale à $\sqrt{(\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2)}$, ou à k; au contraire, par rapport à tout plan perpendiculaire à celui-là, cette somme est égale à zéro. Sa position ne varie pas, tant qu'aucune force n'agit sur les molécules du corps; elle est déterminée, relativement aux plans arbitraires des coordonnées x, y, z, par ces équations

$$\cos.\gamma = \frac{\beta}{k}, \quad \sin.\gamma.\cos.\alpha = \frac{\beta'}{k}, \quad \sin.\gamma.\sin.\alpha = \frac{\beta''}{k}; \qquad \text{(b)}$$

dans lesquelles γ représente l'inclinaison du plan invariable sur le plan des x, y, et α la longitude de l'axe des x, comptée sur ce dernier plan,

à partir de l'intersection des deux plans. Je ne m'arrêterai point ici à démontrer ces propriétés du plan invariable qui sont bien connues et qui se déduisent fort simplement de la théorie des projections, comme je l'ai fait voir dans une autre occasion.

[36.] On conçoit qu'il est avantageux de choisir ce plan pour l'un de ceux des coordonnées, puisque ce choix rendra nulles deux des trois constantes β, β', β''; supposons donc que le plan arbitraire des x, y coïncide avec le plan invariable; nous aurons $\beta' = 0$, $\beta'' = 0$, $\beta = k$; désignons de plus par ψ_1, φ_1 et θ_1, ce que deviennent les angles ψ, φ et θ relativement à ce plan particulier des x, y; enfin substituons dans les équations du n.° 32, à la place des a, b, c, &c. leurs valeurs en fonction de ψ_1, θ_1 et φ_1; ces équations deviendront

$$Cr.\cos.\theta_1 - Bq.\sin.\theta_1.\cos.\varphi_1 - Ap.\sin.\varphi_1.\sin.\psi_1 = k,$$

$$(Cr.\sin.\theta_1 + Bq.\cos.\theta_1.\cos.\varphi_1 + Ap.\cos.\theta_1.\sin.\varphi_1).\cos.\psi_1 + (Bq.\sin.\varphi_1 - Ap.\cos.\varphi_1).\sin.\psi_1 = 0,$$

$$(Cr.\sin.\theta_1 + Bq.\cos.\theta_1.\cos.\varphi_1 + Ap.\cos.\theta_1.\sin.\varphi_1).\sin.\psi_1 - (Bq.\sin.\varphi_1 - Ap.\cos.\varphi_1).\cos.\psi_1 = 0.$$

L'angle ψ_1 disparaît de lui-même dans les deux dernières, qui se changent en celles-ci,

$$Cr.\sin.\theta_1 + Bq.\cos.\theta_1.\cos.\varphi_1 + Ap.\cos.\theta_1.\sin.\varphi_1 = 0,$$

$$Bq.\sin.\varphi_1 - Ap.\cos.\varphi_1 = 0.$$

En les combinant avec la première, on en tire

$$\cos.\theta_1 = \frac{Cr}{k}, \quad \sin.\theta_1.\cos.\varphi_1 = -\frac{Bq}{k}, \quad \sin.\theta_1.\sin.\varphi_1 = -\frac{Ap}{k};$$

équations qui s'accordent entre elles, à cause que $k^2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2$. Il est bon d'observer qu'on aurait pu les déduire des équations (b) que nous venons de citer, en prenant pour le plan arbitraire des x, y, le plan même de l'équateur.

[37.] Les valeurs de p, q, r feront donc connaître immédiatement

celles des angles θ_1 et φ_1. Pour déterminer le troisième angle ψ_1, je forme l'équation

$$\sin.^2\theta_1 . d\psi_1 = \sin.\theta_1 . \sin.\varphi_1 . pdt + \sin.\theta_1 . \cos.\varphi_1 . qdt,$$

que je déduis des deux premières du n.° 31, dans lesquelles j'ai mis φ_1, ψ_1 et θ_1 à la place de φ, ψ et θ. Cette équation, d'après celles que nous venons de trouver, est la même chose que

$$(k^2 - C^2r^2).d\psi_1 = -(Ap^2 + Bq^2).kdt;$$

et à cause de $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + h = 0$ [n.° 34], elle donne

$$d\psi_1 = \frac{(h + Cr^2).kdt}{k^2 - C^2r^2}.$$

Substituant pour dt sa valeur en r et dr, et intégrant, on a

$$\psi_1 + g = \int \frac{k.(h + Cr^2).\sqrt{(AB)}.Cdr}{[k^2 - C^2r^2].[k^2 + Ah + (A-C).Cr^2]^{\frac{1}{2}}.[-k^2 - Bh + (C-B).Cr^2]^{\frac{1}{2}}};$$

g étant la constante arbitraire.

On aura donc, par les quadratures, la valeur de ψ_1 en fonction de r, et par conséquent en fonction de t.

[38.] Il ne nous suffira pas, dans ce qui va suivre, de connaître les angles ψ_1, θ_1 et φ_1, qui se rapportent au plan invariable; il nous sera nécessaire d'avoir les expressions des angles ψ, θ et φ, qui sont relatifs à un plan fixe quelconque, ce qui n'offre plus maintenant qu'une simple question de trigonométrie sphérique.

Concevons, en effet, une sphère d'un rayon arbitraire dont le centre soit au centre du corps, et considérons, sur sa surface, le triangle sphérique déterminé par le plan de l'équateur, le plan invariable et le plan arbitraire des coordonnées x, y; supposons toujours la position du plan invariable déterminée par rapport au plan des x, y, par les angles γ et α, comme dans le n.° 35 : les angles ψ et α, comptés sur le plan des x, y, exprimeront les distances de l'axe des x aux intersections de ce plan avec l'équateur et avec le plan invariable; par conséquent, la

différence $\downarrow - \alpha$ sera un des côtés de notre triangle. De même les angles φ_1 et φ, comptés sur l'équateur, exprimant les distances de l'axe des x aux intersections de ce plan avec le plan invariable et avec le plan des x, y, il s'ensuit que la différence $\varphi_1 - \varphi$ sera un second côté de ce triangle. L'angle $\downarrow_1$, qui se compte sur le plan invariable, exprime la distance de son intersection avec l'équateur à une ligne menée arbitrairement; nous pouvons prendre, pour cette ligne, l'intersection du plan invariable avec le plan des x, y, et alors l'angle $\downarrow_1$ sera le troisième côté du triangle. Les trois angles sont l'inclinaison γ, opposée au côté $\varphi_1 - \varphi$; l'inclinaison θ_1, opposée au côté $\downarrow - \alpha$; le supplément $200° - \theta$ de l'inclinaison θ, opposé au côté $\downarrow_1$; nous aurons donc, par les règles connues,

$$\cos.\,\theta = \cos.\,\gamma \,.\, \cos.\,\theta_1 - \sin.\,\gamma \,.\, \sin.\,\theta_1 \,.\, \cos.\,\downarrow_1,$$
$$\sin.\,(\varphi_1 - \varphi) \,.\, \sin.\,\theta = \sin.\,\downarrow_1 \,.\, \sin.\,\gamma,$$
$$\sin.\,(\downarrow - \alpha) \,.\, \sin.\,\theta = \sin.\,\downarrow_1 \,.\, \sin.\,\theta_1.$$

Ces trois équations donneront les valeurs de θ, φ et $\downarrow$, en fonction de θ_1, φ_1, $\downarrow_1$ et des constantes α et γ; et comme les valeurs de θ_1, φ_1, $\downarrow_1$ contiennent déjà les constantes h, k, l, g, il s'ensuit que celles de $\downarrow$, θ et φ seront des fonctions du temps et des six constantes arbitraires k, h, l, g, α, γ.

[39.] Maintenant, supposons qu'on applique aux différens points du corps solide dont nous considérons la rotation, des forces dirigées vers des centres fixes ou mobiles et fonctions des distances à ces centres. Désignons par $-\Omega$ l'intégrale de la somme de ces forces multipliées chacune par l'élément de sa direction, et cherchons par les formules du n.° 10, les variations des arbitraires $k, h, l, g, \alpha, \gamma$, dues à ces forces.

On doit observer que les angles α et γ devenant variables, le plan que nous considérions précédemment comme invariable [n.° 35], cessera de l'être; mais il sera toujours, à chaque instant, le plan par rapport

auquel la somme des projections des aires décrites par les rayons vecteurs des molécules du corps, est un *maximum* et égale à k: pour cette raison nous l'appellerons *le plan principal de projection.*

[40.] Les variables indépendantes sont au nombre de trois, dans ce problème, comme dans celui du mouvement d'un corps attiré vers un centre fixe; nous prendrons naturellement les trois angles φ, $\downarrow$, θ, pour ces variables; nous aurons alors [n.° 9]

$$s = \frac{dT}{d\varphi'_1}, \quad u = \frac{dT}{d\downarrow'}, \quad v = \frac{dT}{d\theta'};$$

φ'; $\downarrow'$, θ' désignant les différentielles $d\varphi$, $d\downarrow$, $d\theta$, divisées par dt.

Nous avons aussi

$$T = \tfrac{1}{2} \cdot \int \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} \,.\, dm;$$

l'intégrale étant prise par rapport à dm, et étendue à la masse entière du corps. Substituant pour dx, dy, dz, leurs valeurs [n.° 29], et observant que les trois intégrales $\int x_1 y_1 dm$, $\int x_1 z_1 dm$, $\int y_1 z_1 dm$, sont nulles par la propriété des axes principaux, il vient

$$T = \frac{da^2 + da'^2 + da''^2}{2\,dt^2} \cdot \int x_1^2\, dm + \frac{db^2 + db'^2 + db''^2}{2\,dt^2} \cdot \int y_1^2\, dm + \frac{dc^2 + dc'^2 + dc''^2}{2\,dt^2} \cdot \int z_1^2\, dm.$$

Nous avons déjà remarqué [n.° 30] que

$$dc^2 + dc'^2 + dc''^2 = (p^2 + q^2) \,.\, dt^2;$$

on a de même

$$db^2 + db'^2 + db''^2 = (r^2 + p^2) \,.\, dt^2,$$
$$da^2 + da'^2 + da''^2 = (q^2 + r^2) \,.\, dt^2;$$

donc, à cause de

$$C = \int (x_1^2 + y_1^2) \,.\, dm, \quad B = \int (z_1^2 + x_1^2) \,.\, dm, \quad A = \int (y_1^2 + z_1^2) \,.\, dm,$$

on aura

$$T = \frac{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}{2}.$$

Les équations du n.° 31 donnent

$$r = \varphi' - \cos.\theta \,.\, \downarrow',$$
$$q = \cos.\varphi \,.\, \sin.\theta \,.\, \downarrow' + \sin.\varphi \,.\, \theta',$$
$$p = \sin.\varphi \,.\, \sin.\theta \,.\, \downarrow' - \cos.\varphi \,.\, \theta';$$

substituant donc ces valeurs dans celles de T, il sera ensuite aisé d'en déduire les valeurs de s, u, v.

Nous voyons d'abord que φ' n'entrant pas dans les valeurs de p et q, on aura simplement

$$s = \frac{dT}{dr} \cdot \frac{dr}{d\varphi'} = Cr;$$

de même θ' n'entrant pas dans r, on aura

$$v = \frac{dT}{dq} \cdot \frac{dq}{d\theta'} + \frac{dT}{dp} \cdot \frac{dp}{d\theta'} = Bq \,.\, \sin.\varphi - Ap \,.\, \cos.\varphi;$$

enfin $\downarrow'$ entrant dans les trois quantités p, q, r, on aura

$$u = \frac{dT}{dr} \cdot \frac{dr}{d\downarrow'} + \frac{dT}{dq} \cdot \frac{dq}{d\downarrow'} + \frac{dT}{dp} \cdot \frac{dp}{d\downarrow'},$$
$$= -Cr \,.\, \cos.\theta + Ap \,.\, \sin.\theta \,.\, \sin.\varphi + Bq \,.\, \cos.\theta \,.\, \cos.\varphi.$$

Ces équations donnent aussi les valeurs de p, q, r, en fonction de φ, $\downarrow$, θ, s, u, v, savoir :

$$Cr = s,$$
$$Bq = (u + s \,.\, \cos.\theta) \,.\, \frac{\cos.\varphi}{\sin.\theta} + v \,.\, \sin.\varphi,$$
$$Ap = (u + s \,.\, \cos.\theta) \,.\, \frac{\sin.\varphi}{\sin.\theta} - v \,.\, \cos.\varphi.$$

[41.] Au moyen de ces valeurs, l'équation (k) du n.° 34 devient

$$k^2 = v^2 + \frac{s^2 + u^2 + 2 \,.\, \cos.\theta \,.\, us}{\sin.^2\theta}.$$

Il nous serait également facile d'exprimer la constante h en fonction de φ, $\downarrow$, θ, s, u, v; mais il sera plus simple de la conserver sous la forme

$$h = -Ap^2 - Bq^2 - Cr^2,$$

et d'y considérer p, q, r, comme des fonctions données de ces six variables.

Quant aux constantes β, β', β'' du n.° 32, si l'on substitue dans leurs valeurs, celles de p, q, r, en fonction de φ, $\downarrow$, θ, s, u, v, et celles de a, b, &c. du n.° 28, on trouve

$$\beta = -u$$
$$\beta' = (s + u \,.\, \cos.\theta) \,.\, \frac{\cos.\downarrow}{\sin.\theta} + v \,.\, \sin.\downarrow,$$
$$\beta'' = (s + u \,.\, \cos.\theta) \,.\, \frac{\sin.\downarrow}{\sin.\theta} - v \,.\, \cos.\downarrow.$$

Ces valeurs de β, β', β'', substitués dans l'équation

$$k^2 = \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2,$$

donnent aussi la valeur précédente de k^2.

Les équations (b) du n.° 35 donnent

$$\text{tang.}\,\alpha = \frac{\beta''}{\beta'}, \qquad \text{tang.}\,\gamma = \frac{\sqrt{(\beta'^2 + \beta''^2)}}{\beta};$$

ainsi α et γ sont des fonctions de β, β', β''; par conséquent on peut regarder les quatre constantes h, k, α, γ, comme exprimées, en fonction de φ, $\downarrow$, θ, s, u, v; en reprenant donc la formule générale du n.° 6, savoir :

$$(a, b) = \frac{da}{ds} \cdot \frac{db}{d\varphi} - \frac{da}{d\varphi} \cdot \frac{db}{ds} + \frac{da}{du} \cdot \frac{db}{d\downarrow} - \frac{da}{d\downarrow} \cdot \frac{db}{du}$$
$$+ \frac{da}{dv} \cdot \frac{db}{d\theta} - \frac{da}{d\theta} \cdot \frac{db}{dv},$$

et en y substituant successivement, à la place de a et b, les valeurs de α, γ, h et k, il sera facile de calculer les six quantités (h, k), (h, α), (h, γ), (k, α), (k, γ), (α, γ).

[42.] Pour faire le calcul plus facilement, j'ai d'abord cherché les valeurs de (β, β'), (β'', β), (β', β''), et j'ai trouvé

$$(\beta, \beta') = \beta'', \quad (\beta'', \beta) = \beta', \quad (\beta', \beta'') = \beta.$$

Or, nous avons, d'après l'équation (a) du n.° 17,

$$(\gamma, \alpha) = (\gamma, \beta'') \cdot \frac{d\alpha}{d\beta''} + (\gamma, \beta') \cdot \frac{d\alpha}{d\beta'}$$

$$= (\gamma, \beta'') \cdot \frac{\cos.^2 \alpha}{\beta'} - (\gamma, \beta') \cdot \frac{\beta'' \cdot \cos.^2 \alpha}{\beta'^2},$$

$$(\gamma, \beta'') = (\beta, \beta'') \cdot \frac{d\gamma}{d\beta} + (\beta', \beta'') \cdot \frac{d\gamma}{d\beta'} = \frac{k^2 \beta' \cdot \cos.^2 \gamma}{\beta^2 \sqrt{(\beta'^2 + \beta''^2)}},$$

$$(\gamma, \beta') = (\beta, \beta') \cdot \frac{d\gamma}{d\beta'} + (\beta'', \beta') \cdot \frac{d\gamma}{d\beta''} = -\frac{k^2 \beta'' \cdot \cos.^2 \gamma}{\beta^2 \sqrt{(\beta''^2 + \beta''^2)}};$$

d'où nous concluons

$$(\gamma, \alpha) = \frac{1}{k \cdot \sin. \gamma},$$

en ayant égard aux équations du n.° 35,

$$\beta = k \cdot \cos. \gamma, \quad \beta' = k \cdot \sin. \gamma \cdot \cos. \alpha, \quad \beta'' = k \cdot \sin. \gamma \cdot \sin. \alpha.$$

J'ai trouvé par un calcul semblable, en considérant k comme une fonction de β, β', β'', ainsi que γ et α,

$$(k, \gamma) = 0, \quad (k, \alpha) = 0.$$

En combinant la constante h avec les constantes β, β', β'', on trouve

$$(h, \beta) = 0, \quad (h, \beta') = 0, \quad (h, \beta'') = 0.$$

En effet, on peut partager la quantité (h, β) de cette manière

$$(h, \beta) = -2p \cdot (Ap, \beta) - 2q \cdot (Bq, \beta) - 2r \cdot (Cr, \beta);$$

or, β ne renfermant que la variable u, et les valeurs de Ap, Bq, Cr, ne contenant pas la variable $\downarrow$, il en résulte

$$(Ap, \beta) = 0, \quad (Bq, \beta) = 0, \quad (Cr, \beta) = 0.$$

Si (h, β) est nul, l'analogie fait voir que (h, β') et (h, β'') doivent l'être aussi; et c'est d'ailleurs ce qu'on peut vérifier par un calcul direct.

Il résulte de là qu'en considérant k, α, γ comme des fonctions de β, β', β'', on aura

$$(h, k) = 0, \quad (h, \alpha) = 0, \quad (h, \gamma) = 0;$$

car, par exemple,

$$(h, k) = (h, \beta) \cdot \frac{dk}{d\beta} + (h, \beta') \cdot \frac{dk}{d\beta'} + (h, \beta'') \cdot \frac{dk}{d\beta''}.$$

[43.] Pour suivre le même ordre que dans le problème du mouvement d'un point attiré vers un centre fixe, cherchons maintenant les valeurs des quatre quantités $[l, k]$, $[l, h]$, $[l, \alpha]$, $[l, \gamma]$ qui renferment la lettre l sans contenir la lettre g. En mettant s à la place de Cr, dans la dernière équation du n.° 34, nous aurons

$$t + l = \int \frac{\sqrt{(AB)} \cdot C\,ds}{[k^2 C + ACh + (A - C) \cdot s^2]^{\frac{1}{2}} \cdot [-k^2 C - BCh + (C - B) \cdot s^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Supposons, pour simplifier, que cette intégrale ait pour origine une valeur de s, indépendante des constantes arbitraires h, k, &c.; supposons, par exemple, qu'elle doive s'évanouir pour une valeur de s déterminée, telle que $s = 0$; la valeur de l sera de cette forme,

$$l = -t + \text{fonct. } (s, h, k);$$

on aura $\frac{dl}{ds} = \frac{dt}{ds}$, et les différences partielles $\frac{dl}{dh}$, $\frac{dl}{dk}$ s'obtiendront en différenciant sous le signe intégral, par rapport à h et à k.

Si nous combinons l avec une constante quelconque a, et si nous faisons d'abord abstraction des constantes h et k qui entrent dans l, cette quantité sera seulement fonction de la variable s; de sorte que nous aurons

$$(l, a) = \frac{dl}{ds} \cdot \frac{da}{d\varphi} = \frac{dt}{ds} \cdot \frac{da}{d\varphi}.$$

Il faudrait ajouter à cette valeur de $[l, a]$, pour avoir égard aux constantes h et k, les deux termes

$$(h, a) \cdot \frac{dl}{dh} + (k, a) \cdot \frac{dl}{dk};$$

mais a devant représenter l'une des quatre constantes h, k, α, γ, ces deux termes sont toujours nuls, d'après ce qu'on a vu dans le numéro précédent.

Relativement à la constante h, on a

$$\frac{dh}{d\varphi} = -2p \cdot \frac{d \cdot Ap}{d\varphi} - 2q \cdot \frac{d \cdot Bq}{d\varphi} - 2r \cdot \frac{d \cdot Cr}{d\varphi}.$$

Les valeurs de Ap, Bq, Cr, du n.° 40 donnent

$$\frac{d \cdot Cr}{d\varphi} = 0, \quad \frac{d \cdot Ap}{d\varphi} = Bq, \quad \frac{d \cdot Bq}{d\varphi} = -Ap;$$

donc

$$\frac{dh}{d\varphi} = 2(A-B) \cdot pq = 2\frac{ds}{dt},$$

en vertu de l'équation $C\,dr + (B-A) \cdot pq \cdot dt = 0$ [n.° 33], et de $Cr = s$; donc enfin

$$(l, h) = 2.$$

Comme aucune des trois constantes β, β', β'', ne renferme la variable φ, il s'ensuit, que si a exprime une fonction quelconque de ces constantes, on aura (l, a); donc

$$(l, k) = 0, \quad (l, \alpha) = 0, \quad (l, \gamma) = 0.$$

[44.] Il nous reste encore à calculer les valeurs des cinq quantités $[g, h]$, $[g, k]$, $[g, \alpha]$, $[g, \gamma]$, $[g, l]$ qui renferment la lettre g.

La dernière équation du n.° 36 nous donne, en y mettant s à la place de Cr,

$$\psi_1 + g = \int \frac{(hC + s^2) \cdot \sqrt{(AB)} \cdot k\,ds}{(k^2 - s^2) \cdot [k^2C + ACh + (A-C) \cdot s^2]^{\frac{1}{2}} \cdot [-k^2C - BCh + (C-B) \cdot s^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Nous supposerons cette intégrale prise, comme la précédente, de manière qu'elle s'évanouisse pour une valeur de s, indépendante des constantes arbitraires h, k, &c. Si, pour abréger, nous la représentons par P, nous aurons

$$g = P - \psi_1, \quad (g, a) = (P, a) - (\psi_1, a);$$

a étant une constante quelconque. La valeur de P sera de la forme

$$P = \text{fonct.}\ (s, h, k);$$

on aura

$$\frac{dP}{ds} = \frac{k(Ch + s^2)}{C(k^2 - s^2)} \cdot \frac{dt}{ds};$$

et pour obtenir les différences partielles de P, par rapport à h et à k, il suffira de différencier sous le signe intégral, par rapport à ces quantités. On conclut de là

$$(P, a) = \frac{k(Ch + s^2)}{C(k^2 - s^2)} \cdot \frac{dt}{ds} \cdot \frac{da}{d\varphi} + (h, a) \cdot \frac{dP}{dh}.$$

Nous omettons le terme $(k, a) \cdot \frac{dP}{dh}$, parce que a devant représenter l'une des cinq constantes h, k, l, α et γ, nous savons déjà que ce terme sera toujours nul.

Pour déterminer la quantité $[\psi_1, a]$, il faut avoir l'expression de ψ_1 en fonction de ψ, θ, φ, s, u, v; or, nous avons trouvé [n.° 38],

$$\cos.\,\theta = \cos.\,\gamma \cdot \cos.\,\theta_1 - \sin.\,\gamma \cdot \sin.\,\theta_1 \cdot \cos.\,\psi_1;$$

et nous avons aussi

$$k \cdot \cos.\,\gamma = \beta = -u, \quad k \cdot \cos.\,\theta_1 = Cr = s;$$

d'où l'on tire

$$-\cos.\,\psi_1 = \frac{k^2 \cdot \cos.\,\theta + us}{\sqrt{(k^2 - u^2)} \cdot \sqrt{(k^2 - s^2)}};$$

équation qui donnera la valeur de ψ_1, et qui fait voir que cette quantité est une fonction de k, s, u, θ. On aura donc

$$(\psi_1, a) = \frac{d\psi_1}{ds} \cdot \frac{da}{d\varphi} + \frac{d\psi_1}{du} \cdot \frac{da}{d\psi} - \frac{d\psi_1}{d\theta} \cdot \frac{da}{dv};$$

on omet le terme $(k, a) \cdot \frac{d\psi_1}{dk}$, par la raison que nous venons de dire.

Nous aurons aussi [n.° 38],

$$\sin.\,\psi_1 = \frac{\sin.\,(\psi - \alpha) \cdot \sin.\,\theta}{\sin.\,\theta_1} = \frac{k \cdot \sin.\,(\psi - \alpha) \cdot \sin.\,\theta}{\sqrt{(k^2 - s^2)}}.$$

En différenciant donc la valeur de *cos.* $\downarrow_1$; et substituant celle de *sin.* $\downarrow_1$, nous aurons

$$\frac{d\downarrow_1}{du} = \frac{s + u \cdot \cos.\theta}{k^2 \cdot \sin.^3\gamma \cdot \sin.\theta \cdot \sin.(\downarrow - \alpha)},$$

$$\frac{d\downarrow_1}{ds} = \frac{u + s \cdot \cos.\theta}{(k^2 - s^2) \cdot \sin.\gamma \cdot \sin.\theta \cdot \sin.(\downarrow - \alpha)},$$

$$\frac{d\downarrow_1}{d\theta} = -\frac{1}{\sin.\gamma \cdot \sin.(\downarrow - \alpha)};$$

et par conséquent

$$(\downarrow_1, a) = \frac{u + s \cdot \cos.\theta}{(k^2 - s^2) \cdot \sin.\gamma \cdot \sin.\theta \cdot \sin.(\downarrow - \alpha)} \cdot \frac{da}{d\varphi}$$
$$+ \frac{s + u \cdot \cos.\theta}{k^2 \cdot \sin.^3\gamma \cdot \sin.\theta \cdot \sin.(\downarrow - \alpha)} \cdot \frac{da}{d\downarrow}$$
$$+ \frac{1}{\sin.\gamma \cdot \sin.(\downarrow - \alpha)} \cdot \frac{da}{d\nu}.$$

La question est donc réduite maintenant à substituer successivement, dans ces valeurs de (P, a) et $(\downarrow_1, a)$, h, k, α, γ, l à la place de a.

[45.] Soit en premier lieu $a = h$, nous aurons

$$\frac{dh}{d\varphi} = 2(A-B).pq = 2\frac{ds}{dt}, \quad \frac{dh}{d\downarrow} = 0, \quad \frac{dh}{d\nu} = 2p.\cos.\varphi - 2q.\sin.\varphi;$$

$$(P, h) = \frac{2k(h + Cr^2)}{k^2 - s^2};$$

$$(\downarrow_1, h) = \frac{2}{(k^2 - s^2).\sin.\gamma.\sin.(\downarrow - \alpha)} \cdot \left[\frac{u + s \cdot \cos.\theta}{\sin.\theta} \cdot (A-B).pq \right.$$
$$\left. + (p \cdot \cos.\varphi - q \cdot \sin.\varphi) \cdot (A^2p^2 + B^2q^2)\right].$$

En observant que

$$\frac{u + s\cos.\theta}{\sin.\theta} = Ap \cdot \sin.\varphi + Bq \cdot \cos.\varphi,$$

$$k.\sin.\gamma.\sin.(\downarrow - \alpha) = \beta'.\sin.\downarrow - \beta''.\cos.\downarrow = Bq.\sin.\varphi - Ap.\cos.\varphi;$$

on trouve que la valeur de $[\downarrow_1, h]$ se réduit à

$$(\downarrow_1, h) = -\frac{2k(Ap^2 + Bq^2)}{k^2 - s^2};$$

donc, à cause de $h + Cr^2 + Bq^2 + Ap^2 = 0$, on aura

$$(g, h) = (P, h) - (\downarrow_1, h) = 0.$$

[46.] Relativement à la constante k, dont nous avons donné la valeur dans le n.° 41, nous avons

$$\frac{dk}{d\varphi} = 0, \quad \frac{dk}{d\downarrow} = 0, \quad \frac{dk}{d\nu} = \frac{\nu}{k} = \frac{Bq.\sin.\varphi - Ap.\cos.\varphi}{k};$$

d'où nous concluons

$$(P, k) = 0, \quad (\downarrow_1, k) = 1, \quad (g, k) = -1.$$

Si l'on considérait la constante β, on aurait évidemment

$$(g, \beta) = 0;$$

car β étant égal à u, ses différences partielles, relatives à φ, $\downarrow$ et ν, sont nulles, et par conséquent aussi les quantités (P, β), $(\downarrow_1, \beta)$.

Comme nous avons $\cos.\gamma = \frac{\beta}{k}$, il s'ensuit

$$(g, \gamma) = (g, \beta).\frac{d\gamma}{d\beta} + (g, k).\frac{d\gamma}{dk} = (g, k).\frac{\beta}{k^2\sin.\gamma};$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(g, \gamma) = -\frac{\cos.\gamma}{k.\sin.\gamma}.$$

Si nous prenons $a = \alpha$, l'équation

$$\text{tang.}\,\alpha = \frac{\beta''}{\beta'}$$

donnera

$$\frac{d\alpha}{d\downarrow} = \cos.^2\alpha \cdot \left(\frac{1}{\beta'} \cdot \frac{d\beta''}{d\downarrow} - \frac{\beta''}{\beta'^2} \cdot \frac{d\beta'}{d\downarrow}\right) = 1,$$

à cause que $\frac{d\beta''}{d\downarrow} = \beta'$, $\frac{d\beta'}{d\downarrow} = -\beta''$. La même équation donne encore $\frac{d\alpha}{d\varphi} = 0$, parce que la variable φ n'est contenue ni dans β', ni dans β''; et enfin,

$$\frac{d\alpha}{d\nu} = \cos.^2\alpha \cdot \left(\frac{1}{\beta'} \cdot \frac{d\beta''}{d\nu} - \frac{\beta''}{\beta'^2} \cdot \frac{d\beta''}{d\nu}\right) = -\frac{(\beta'.\cos.\downarrow + \beta''.\sin.\downarrow)}{k^2.\sin.^2\gamma};$$

on aura donc

$$(P,\alpha)=0,(\downarrow_{,},\alpha)=\frac{1}{k^{2}.\sin.^{3}\gamma.\sin.(\downarrow-\alpha)}.\left[\frac{s+u.\cos.\theta}{\sin.\theta}-\beta'.\cos.\downarrow-\beta''.\sin.\downarrow\right].$$

Cette dernière quantité se réduit à zéro, parce que les valeurs de β' et β'' donnent

$$\beta' . \cos.\downarrow+\beta'' . \sin.\downarrow=\frac{s+u.\cos.\theta}{\sin.\theta};$$

donc aussi

$$(g,\alpha)=0.$$

[47.] Prenons enfin $a=l$; nous aurons $(h,l)=-2$, et

$$\frac{dl}{d\varphi}=\frac{dh}{d\varphi}\cdot\frac{dl}{dh}+\frac{dk}{d\varphi}\cdot\frac{dl}{dk}=2\cdot\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dl}{dh};$$

par conséquent

$$(P,l)=\frac{2k(h+Cr^{2})}{k^{2}-s^{2}}\cdot\frac{dl}{dh}-2\frac{dP}{dh}.$$

Nous aurons aussi

$$\frac{dl}{d\downarrow}=\frac{dh}{d\downarrow}\cdot\frac{dl}{dh}+\frac{dk}{d\downarrow}\cdot\frac{dl}{dk}=0,$$

$$\frac{dl}{d\nu}=\frac{dh}{d\nu}\cdot\frac{dl}{dh}+\frac{dk}{d\nu}\cdot\frac{dl}{dk}=2(p.\cos.\Phi-q.\sin.\varphi).\frac{dl}{dh}+(Bq.\sin.\varphi-Ap.\cos.\varphi).\frac{dl}{dk};$$

Si l'on substitue ces valeurs de $\frac{dl}{d\varphi}$, $\frac{dl}{d\nu}$, dans $(\downarrow_{,},l)$, que l'on réunisse tout ce qui multiplie $\frac{dl}{dh}$ et tout ce qui multiplie $\frac{dl}{dk}$, il sera aisé de voir, comme dans le n.° 45, que le coëfficient de $\frac{dl}{dh}$ se réduit à $-\frac{2k(Ap^{2}+Bq^{2})}{k^{2}-s^{2}}$, et celui de $\frac{dl}{dk}$, à l'unité; de sorte que l'on aura

$$(\downarrow_{,},l)=-\frac{2k(Ap^{2}+Bq^{2})}{k^{2}-s^{2}}\cdot\frac{dl}{dh}+\frac{dl}{dk};$$

donc, à cause de $h+Cr^{2}+Bq^{2}\ Ap^{2}=0$, on aura

$$(g,l)=(P,l)-(\downarrow_{,},l)=-\frac{dl}{dk}-2\frac{dP}{dh};$$

Pour avoir $\frac{dP}{dh}$, il faut [n.° 44] différencier sous le signe intégral par rapport à h, ce qui donne

$$\frac{dP}{dh}=\int\frac{k\,dt}{k^{2}-s^{2}}-\tfrac{1}{2}\cdot\int\frac{Ak.(Ch+s^{2}).dt}{(k^{2}-s^{2}).[k^{2}C+ACh+(A-C).s^{2}]}-\tfrac{1}{2}\cdot\int\frac{Bk.(Ch+s^{2}).dt}{(k^{2}-s^{2}).[k^{2}C+BCh+(B-C).s^{2}]},$$

quantité qu'on peut écrire de cette autre manière,

$$\frac{dP}{dh}=\tfrac{1}{2}\cdot\int\frac{Ckdt}{k^{2}C+ACh+(A-C).s^{2}}+\tfrac{1}{2}\cdot\int\frac{Ckdt}{k^{2}C+BCh+(B-C).s^{2}}.$$

De même en différenciant la valeur de l sous le signe intégral [n.° 43] par rapport à k, on trouve

$$\frac{dl}{dk}=-\int\frac{Ckdt}{k^{2}C+ACh+(A-C).s^{2}}-\int\frac{Ckdt}{k^{2}C+BCh+(B-C).s^{2}}.$$

Ces valeurs substituées dans (g,l) donnent évidemment

$$(g,l)=0.$$

[48.] Rassemblons les valeurs de (h,k), (h,l), &c., trouvées dans es numéros précédens, savoir:

$$(h,k)=0,\quad(h,\alpha)=0,\quad(h,\gamma)=0,\quad(h,l)=-2,$$
$$(h,g)=0,\quad(k,\alpha)=0,\quad(k,\gamma)=0,\quad(k,l)=0,$$
$$(k,g)=1,\quad(\alpha,\gamma)=-\frac{1}{k.\sin.\gamma},\quad(\alpha,l)=0,$$
$$(\alpha,g)=0,\quad(\gamma,l)=0,\quad(\gamma,g)=\frac{\cos.\gamma}{k.\sin.\gamma},$$
$$(g,l)=0;$$

et substituons les dans les formules générales du n.° 10; nous aurons, pour les valeurs cherchées des différentielles de $h, l, k, g, \alpha, \gamma$.

$$dh = -2 \cdot \frac{d\Omega}{dl} \cdot dt,$$

$$dl = 2 \cdot \frac{d\Omega}{dh} \cdot dt,$$

$$dk = \frac{d\Omega}{dg} \cdot dt,$$

$$dg = -\frac{d\Omega}{dk} \cdot dt - \frac{\cos.\gamma}{k \cdot \sin.\gamma} \cdot \frac{d\Omega}{d\gamma} \cdot dt,$$

$$d\gamma = \frac{\cos.\gamma}{k \cdot \sin.\gamma} \cdot \frac{d\Omega}{dg} + \frac{1}{k \cdot \sin.\gamma} \cdot \frac{d\Omega}{d\alpha} \cdot dt,$$

$$d\alpha = -\frac{1}{k \cdot \sin.\gamma} \cdot \frac{d\Omega}{d\gamma} \cdot dt.$$

Si l'on compare ces formules à celles que nous avons trouvées dans le n.° 22, on voit qu'elles sont les mêmes, au signe près de l'angle α; résultat singulier, si l'on considère le peu de rapport qu'ont entre eux les problèmes du mouvement de rotation et du mouvement d'un point attiré vers un centre fixe. Ce résultat tient à l'analogie qui existe entre les constantes arbitraires que nous avons choisies dans les deux problèmes. En effet, dans l'un et l'autre, h est la constante qui entre dans l'équation des forces vives; l est la constante ajoutée au temps et provenant de ce que les équations du mouvement ne contiennent que l'élément de cette variable; dans le mouvement de rotation, γ est l'inclinaison du plan principal de projection sur un plan fixe; dans l'autre problème, γ est l'inclinaison, sur un plan fixe, du plan de la trajectoire, qui est évidemment le plan principal de projection : de même α exprime dans les deux problèmes, la longitude de l'intersection de ce plan avec le plan fixe, comptée sur ce dernier plan, à partir d'une ligne fixe; mais cette longitude n'est pas comptée dans le même sens, dans les deux cas; ce qui produit la différence de signe que l'on remarque dans nos formules. Il en est de même des constantes k et g, qui représentent des quantités analogues dans les deux problèmes.

La conclusion qu'il faut tirer de cette dernière partie de notre Mémoire, est donc que les perturbations du mouvement de rotation d'un corps

corps solide de figure quelconque, dues à des forces d'attraction quelconques, dépendent des mêmes équations que les perturbations du mouvement d'un point attiré vers un centre fixe; ainsi, par exemple, la précession des équinoxes et la nutation de l'axe terrestre seront exprimées par les mêmes formules que les variations des élémens elliptiques des planètes.

Équations dont dépendent les Mouvemens de l'axe de rotation de la Terre.

[49.] Les forces qui agissent sur le sphéroïde terrestre et qui produisent la *précession* et la *nutation*, étant très-petites, on néglige leur carré dans le calcul de ces mouvemens. Supposons donc que le corps solide dont nous venons de considérer le mouvement de rotation, soit la Terre, et cherchons ce que deviennent les formules que nous avons trouvées, quand on borne l'approximation aux premières puissances des forces perturbatrices.

Pour déterminer la position de l'équateur, par rapport au plan principal de projection, ou au plan qui serait invariable sans l'action des forces perturbatrices, nous avons les équations [n.° 36],

$$\sin.\theta_{,} \cdot \cos.\varphi_{,} = -\frac{Bq}{k}, \quad \sin.\theta_{,} \cdot \sin.\varphi_{,} = -\frac{Ap}{k};$$

d'où l'on tire

$$\sin.\theta_{,} = \frac{\sqrt{(A^2p^2 + B^2q^2)}}{k}.$$

Or, dans le mouvement de rotation de la Terre, les quantités p et q sont de l'ordre des forces perturbatrices; leurs valeurs ne renferment aucune inégalité à longue période qui puisse devenir sensible (*); il s'ensuit donc que l'équateur terrestre et le plan principal de projection coïncideront toujours à très-peu près : leur écart réciproque, ou l'angle $\theta_{,}$, sera du même ordre que le déplacement des pôles à la surface de la Terre.

(*) Voyez le Mémoire sur le *Mouvement de rotation de la Terre*, qui fait partie de ce volume.

Reprenons aussi les trois équations du n.° 38; savoir:

$$\cos.\theta = \cos.\gamma \,.\, \cos.\theta_{,} - \sin.\gamma \,.\, \sin.\theta_{,} \,.\, \cos.\downarrow_{,},$$

$$\sin.(\downarrow - \alpha) = \frac{\sin.\theta_{,} \,.\, \sin.\downarrow_{,}}{\sin.\theta},$$

$$\sin.(\Phi_{,} - \Phi) = \frac{\sin.\gamma \,.\, \sin.\downarrow_{,}}{\sin.\theta}.$$

En négligeant l'angle $\theta_{,}$, elles donnent

$$\theta = \gamma, \quad \downarrow = \alpha, \quad \Phi = \Phi_{,} - \downarrow_{,};$$

ce qui résulte en effet de la coïncidence de l'équateur avec le plan principal de projection.

Si l'on veut déterminer les mouvemens de l'axe terrestre, dus aux forces perturbatrices, il faut conserver, dans les valeurs de $\downarrow$ et θ, les termes dépendans de la première puissance de ces forces: en négligeant donc seulement leurs carrés, on aura d'abord $\cos.\theta_{,} = 1$, et ensuite, d'après les équations précédentes,

$$\sin.\theta_{,}.\cos.\downarrow_{,} = \sin.\theta_{,}.\cos.(\Phi_{,}-\Phi) = -\frac{Bq\,.\,\cos.\varphi}{k} - \frac{Ap\,.\,\sin.\varphi}{k};$$

$$\sin.\theta_{,}.\sin.\downarrow_{,} = \sin.\theta_{,}.\sin.(\Phi_{,}-\Phi) = \frac{Bq\,.\,\sin.\varphi}{k} - \frac{Ap\,.\,\cos.\varphi}{k};$$

par conséquent,

$$\cos.\theta = \cos.\gamma + \frac{\sin.\gamma}{k}\,.\,(Bq\,.\,\cos.\varphi + Ap\,.\,\sin.\varphi),$$

$$\sin.(\downarrow - \alpha) = \frac{Bq\,.\,\sin.\varphi - Ap\,.\,\cos.\varphi}{k\,.\,\sin.\theta};$$

d'où l'on tire, en négligeant toujours les quantités du second ordre,

$$\theta = \gamma - \frac{Bq\,.\,\cos.\varphi + Ap\,.\,\sin.\varphi}{k},$$

$$\downarrow = \alpha + \frac{Bq\,.\,\sin.\varphi - Ap\,.\,\cos.\varphi}{k\,.\,\sin.\theta}.$$

Nous avons trouvé ces valeurs rigoureuses:

$$d\gamma = \frac{dt}{k\,.\,\sin.\gamma}\,.\,\frac{d\Omega}{d\alpha} + \frac{\cos.\gamma\,.\,dt}{k\,.\,\sin.\gamma}\,.\,\frac{d\Omega}{dg},$$

$$d\alpha = -\frac{dt}{k\,.\,\sin.\gamma}\,.\,\frac{d\Omega}{d\gamma};$$

mais si nous négligeons le carré des forces perturbatrices, il suffira de mettre dans ces formules et dans la fonction Ω, qui est déjà du premier ordre, γ et α, à la place de θ et $\downarrow$, et $\Phi_{,} - \downarrow_{,}$ à la place de Φ; or, d'après les valeurs connues de $\Phi_{,}$ et $\downarrow_{,}$ [n.° 37], la différence $\Phi_{,} - \downarrow_{,}$ est égale à la constante g, augmentée d'une certaine fonction de p, q, r, h et k; et comme les valeurs de p, q, r ne renferment aucune des trois constantes α, γ, g, il en résulte qu'on aura

$$\frac{d\Omega}{d\alpha} = \frac{d\Omega}{d\downarrow}, \quad \frac{d\Omega}{d\gamma} = \frac{d\Omega}{d\theta}, \quad \frac{d\Omega}{dg} = \frac{d\Omega}{d\varphi};$$

donc aussi,

$$d\gamma = \frac{dt}{k\,.\,\sin.\theta}\,.\,\frac{d\Omega}{d\downarrow} + \frac{\cos.\theta\,.\,dt}{k\,.\,\sin.\theta}\,.\,\frac{d\Omega}{d\varphi},$$

$$d\alpha = -\frac{dt}{k\,.\,\sin.\theta}\,.\,\frac{d\Omega}{d\theta}.$$

Ces formules sont aussi simples que les précédentes; elles ont de plus l'avantage que l'on y peut employer la fonction Ω, sous la forme où elle est donnée immédiatement, c'est-à-dire, en fonction des trois angles Φ, $\downarrow$ et θ. Quant à la quantité k qu'elles contiennent, j'observe qu'en négligeant les forces perturbatrices, l'équation $k^2 = C^2r^2 + B^2q^2 + A^2p^2$, donne $k = Cr$; d'ailleurs l'équation $Cdr + (B-A).pq.dt = 0$, se réduit alors à $dr = 0$; ce qui donne $r = n$, n étant une constante arbitraire qui exprime la vîtesse de rotation de la Terre: donc on a

$$k = Cn.$$

Si l'on différencie maintenant les valeurs précédentes de θ et $\downarrow$, et si l'on y substitue celles de $d\alpha$, $d\gamma$ et k, il vient

$$\left.\begin{aligned} d\theta &= \frac{dt}{Cn\,.\,\sin.\theta}\,.\,\frac{d\Omega}{d\downarrow} + \frac{\cos.\theta\,.\,dt}{Cn\,.\,\sin.\theta}\,.\,\frac{d\Omega}{d\varphi} \\ &\quad - \frac{d.(Bq\,.\,\cos.\varphi + Ap\,.\,\sin.\varphi)}{Cn}, \\ d\downarrow &= -\frac{dt}{Cn\,.\,\sin.\theta}\,.\,\frac{d\Omega}{d\theta} \\ &\quad + \frac{d.(Bq\,.\,\sin.\varphi - Ap\,.\,\cos.\varphi)}{Cn\,.\,\sin.\theta}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

[50.] Observons que ces équations se déduisent, d'une manière fort simple, des équations (q) et (p) que j'ai données dans le n.° 3 du Mémoire sur le *Mouvement de rotation de la Terre* (page 201 de ce vol.). En effet, si nous multiplions l'équation (q) par sin. φ, l'équation (p) par cos. φ, et que nous retranchions ensuite l'une de l'autre, nous aurons, en faisant attention que V est la même chose que Ω,

$$Bdq\,.\,\sin.\varphi - Adp\,.\,\cos.\varphi + (Ap\,.\,\sin.\varphi + Bq\,.\,\cos.\varphi)\,.\,rdt$$
$$-(p\,.\,\sin.\varphi + q\,.\,\cos.\varphi)\,.\,Crdt = \frac{d\Omega}{d\theta}\,.\,dt.$$

Mais, à cause de $rdt = d\varphi - \cos.\theta\,.\,d\downarrow$, et de $(p\,.\,\sin.\varphi + q\,.\,\cos.\varphi).dt = \sin.\theta\,.\,d\downarrow$, cette équation peut s'écrire ainsi :

$$d\,.\,(Bq\,.\,\sin.\varphi - Ap\,.\,\cos.\varphi)$$
$$-(Cr\,.\,\sin.\theta + Ap\,.\,\cos.\theta\,.\,\sin.\varphi + Bq\,.\,\cos.\theta\,.\,\cos.\varphi)\,.\,d\downarrow = \frac{d\Omega}{d\theta}\,.\,dt;$$

or, en négligeant les quantités du premier ordre dans le coëfficient de $d\downarrow$, ce qui le réduit à $Cn\,.\,\sin.\theta$, cette équation coïncide avec la seconde des équations (1).

De même, si l'on multiplie l'équation (q) par cos. φ, l'équation (p) par sin. φ, et qu'on les ajoute ensuite, on trouve

$$Bdq\,.\,\cos.\varphi + Adp\,.\,\sin.\varphi + (Ap\,.\,\cos.\varphi - Bq\,.\,\sin.\varphi)\,.\,rdt$$
$$+(q\,.\,\sin.\varphi - p\,.\,\cos.\varphi)\,.\,Crdt = \frac{d\Omega}{d\downarrow}\,.\,\frac{dt}{\sin.\theta} + \frac{d\Omega}{d\varphi}\,.\,\frac{\cos.\theta\,.\,dt}{\sin.\theta};$$

ou bien, à cause de $rdt = d\varphi - \cos.\theta\,.\,d\downarrow$, et de $(q\,.\,\sin.\varphi - p\,.\,\cos.\varphi).dt = d\theta$, on peut changer cette équation en celle-ci

$$d.(Bq\,.\,\cos.\varphi + Ap\,.\,\sin.\varphi) + (Cr - Ap\,.\,\cos.\theta\,.\,\cos.\varphi + Bq\,.\,\cos.\theta\,.\,\sin.\varphi)\,.\,d\theta$$
$$= \frac{d\Omega}{d\downarrow}\,.\,\frac{dt}{\sin.\theta} + \frac{d\Omega}{d\varphi}\,.\,\frac{\cos.\theta\,.\,dt}{\sin.\theta},$$

qui coïncide avec la première des équations (1), quand on néglige les quantités du premier ordre, dans le coëfficient de $d\theta$.

[51.] Tous les termes qui composent les valeurs de $d\downarrow$ et de $d\theta$, données par les équations (1), sont insensibles en eux-mêmes, vu l'extrême petitesse des forces qui troublent le mouvement de rotation de la Terre; mais une partie de ces termes deviennent sensibles dans les valeurs de $\downarrow$ et θ, soit à cause qu'ils s'y trouvent multipliés par le temps, hors des signes *sin.* et *cos.*, soit en vertu des diviseurs très-petits que l'intégration leur fait acquérir. Ce sont ces termes seuls qu'il faut conserver; et en rejetant tous les autres, on réduira les valeurs de $d\theta$ et $d\downarrow$ à une forme très-simple.

D'abord, j'observe que la partie de ces valeurs qui est une différentielle exacte, doit être rejetée; car, en ôtant le signe d, on aurait

$$\theta = -\frac{Bq\,.\,\cos.\varphi + Ap\,.\,\sin.\varphi}{Cn}, \quad \downarrow = \frac{Bq\,.\,\sin.\varphi + Ap\,.\,\cos.\varphi}{Cn\,.\,\sin.\theta};$$

quantités qui seront toujours insensibles, d'après ce que j'ai démontré relativement aux quantités p et q, dans le Mémoire déjà cité.

En négligeant les forces perturbatrices, l'équation $d\varphi = rdt - \cos.\theta\,.\,d\downarrow$, donne $\varphi = nt + \varepsilon$, ε étant une constante arbitraire; il faudra donc rejeter tous les termes des valeurs de $d\theta$ et $d\downarrow$, qui dépendent des sinus ou cosinus de l'angle φ, puisque ces termes donneraient dans $\downarrow$ et θ des inégalités dépendantes du mouvement diurne de la Terre, et par conséquent insensibles. Supposons donc qu'on ait développé la fonction Ω en une série de sinus ou de cosinus des multiples de l'angle φ; soit Q le premier terme de ce développement, ou la partie de Ω indépendante de φ; il faudra mettre Q à la place de Ω dans les équations (1), ce qui les réduit, en supprimant en outre les différentielles exactes, à

$$\left.\begin{aligned} d\theta &= \frac{dt}{Cn\,.\,\sin.\theta}\,.\,\frac{dQ}{d\downarrow}, \\ d\downarrow &= -\frac{dt}{Cn\,.\,\sin.\theta}\,.\,\frac{dQ}{d\theta}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Ce sont les formules les plus simples qu'on puisse employer, pour

déterminer la précession des équinoxes et la nutation de l'axe terrestre.

[52.] Appliquons ces formules au cas de la nature, où les forces perturbatrices sont en raison inverse du carré des distances, et où les distances des astres attirant au centre de la Terre, sont très-grandes par rapport à son rayon.

En désignant par dm la masse d'un élément quelconque du sphéroïde terrestre; par $x_,, y_,, z_,$ les coordonnées de cet élément, parallèles aux trois axes principaux du sphéroïde, menés par son centre de gravité; par x, y, z, les coordonnées du centre de gravité d'un astre attirant, rapportées aux mêmes axes; enfin par L la masse de cet astre, que nous supposerons réunie à son centre de gravité; nous aurons

$$\Omega = \int \frac{L\,dm}{\sqrt{[(x-x_,)^2 + (y-y_,)^2 + (z-z_,)^2]}};$$

l'intégrale étant relative à l'élément dm et à ses coordonnées $x_,, y_,, z_,$ et devant être étendue à la masse entière de la Terre.

Puisque les coordonnées $x_,, y_,, z_,$ sont très-petites, par rapport aux coordonnées x, y, z, développons cette intégrale suivant les puissances descendantes des premières, afin d'avoir une série convergente. En observant que les six intégrales, $\int x_, dm$, $\int y_, dm$, $\int z_, dm$, $\int x_, y_, dm$, $\int x_, z_, dm$, $\int y_, z_, dm$, sont nulles, par les propriétés du centre de gravité et des axes principaux; et en faisant, pour abréger, $x^2 + y^2 + z^2 = r_,^2$; on trouve

$$\Omega = \frac{L}{r_,} \cdot \int dm - \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{r_,^3} \cdot \int (x_,^2 + y_,^2 + z_,^2) \cdot dm$$
$$+ \frac{3h}{2r_,^5} \cdot [x^2 \cdot \int x_,^2 dm + y^2 \cdot \int y_,^2 dm + z^2 \cdot \int z_,^2 dm].$$

Nous négligeons, comme on le fait ordinairement, les termes de ce développement qui dépendent des produits de trois et d'un plus grand nombre de dimensions, en $x_,, y_,, z_,$; lesquels termes sont du même ordre que le cube et les puissances supérieures de la parallaxe de l'astre L; de sorte

que, relativement aux puissances de cette parallaxe, notre approximation est bornée à son carré inclusivement.

Pour introduire les angles $\downarrow$, θ et φ dans cette valeur de Ω, transformons les coordonnées x, y, z, en d'autres X, Y, Z, relatives à des axes fixes; prenons, pour plan fixe des X, Y, le plan de l'écliptique à une époque déterminée; pour axe des X, choisissons d'abord l'intersection de l'équateur avec ce plan, où la ligne mobile des équinoxes; θ étant l'angle de ces deux plans, et φ l'angle compris entre cette intersection et l'axe principal des x, on aura, par les formules connues,

$$x = X \cdot \cos.\varphi + (Y \cdot \cos.\theta - Z \cdot \sin.\theta) \cdot \sin.\varphi,$$
$$y = -X \cdot \sin.\varphi + (Y \cdot \cos.\theta - Z \cdot \sin.\theta) \cdot \cos.\varphi,$$
$$z = Y \cdot \sin.\theta + Z \cdot \cos.\theta.$$

Si l'on voulait transformer les coordonnées X et Y, en d'autres X' et Y', relatives à des axes fixes sur le plan des X, Y, on aurait

$$X = X' \cdot \cos.\downarrow - Y' \cdot \sin.\downarrow, \quad Y = X' \cdot \sin.\downarrow + Y' \cdot \cos.\downarrow;$$

$\downarrow$ étant la longitude de l'axe des X', comptée à partir de l'axe des X. Nous conserverons, pour abréger, les lettres X et Y; il suffira, dans le calcul suivant, de savoir qu'on a

$$\frac{dX}{d\downarrow} = -Y, \qquad \frac{dY}{d\downarrow} = X;$$

ce qui résulte en effet des valeurs de X et Y.

Le rayon vecteur $r_,$ de l'astre L, est indépendant des angles $\downarrow$, θ et φ; par conséquent les termes de Ω, qui ne renferment que ce rayon, disparaîtront dans les différences partielles de cette fonction, relatives à ces angles; on peut donc les supprimer d'avance, et alors, si l'on met $r_,^2 - x^2 - y^2$, à la place de z^2, on aura simplement

$$\Omega = \frac{3h}{2r_,^5} \cdot [x^2 (\int x_,^2 dm - \int z_,^2 dm) + y^2 (\int y_,^2 dm - \int z_,^2 dm)].$$

Formons donc les carrés des valeurs de x et de y. En observant que

$$2 . \sin.\varphi . \cos.\varphi = \sin. 2\varphi ;$$

$$\cos.^2\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} . \cos. 2\varphi ,$$

$$\sin.^2\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} . \cos. 2\varphi ;$$

et supprimant les termes de ces carrés qui dépendent de sin. 2φ et cos. 2φ, on trouve

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2} . X^2 + \frac{1}{2} . (Y . \cos.\theta - Z . \sin.\theta)^2 .$$

De plus, désignons par A, B, C les trois momens d'inertie principaux du sphéroïde terrestre, respectivement relatifs aux axes des $x_,, y_,, z_,$; de manière qu'on ait

$$\int (y_,^2 + z_,^2) . dm = A, \int (x_,^2 + z_,^2) . dm = B, \int (x_,^2 + y_,^2) . dm = C;$$

et par conséquent

$$\int x_,^2 \, dm - \int z_,^2 \, dm = C - A, \int y_,^2 \, dm - \int z_,^2 \, dm = C - B.$$

Substituons ces valeurs et celles de x^2 et y^2 dans la fonction Ω, qui devient alors la fonction Q, nous aurons

$$Q = \frac{3L}{4r_,^3} . (2C - A - B) . [X^2 + (Y . \cos.\theta - Z . \sin.\theta)^2] .$$

Maintenant on tire de là

$$\frac{dQ}{d\theta} = \frac{3L}{2r_,^3} . (A + B - 2C) . (Y . \cos.\theta - Z . \sin.\theta) . (Y . \sin.\theta + Z . \cos.\theta),$$

$$\frac{dQ}{d\psi} = \frac{3L}{2r_,^3} . (A + B - 2C) . [XY - (Y . \cos.\theta - Z . \sin.\theta) . X . \cos.\theta] ;$$

les équations (1) deviennent donc enfin

$$d\theta = \frac{3Ldt}{2r_,^3} . \left(\frac{A + B - 2C}{Cn}\right) . (XY . \sin.\theta + XZ . \cos.\theta),$$

$$\sin.\theta . d\psi = \frac{3Ldt}{2r_,^3} . \left(\frac{2C - A - B}{Cn}\right) . [(Y^2 - Z^2) . \sin.\theta . \cos.\theta + YZ . (\cos.^2\theta - \sin.^2\theta)] .$$

Ces équations sont identiquement les mêmes que celles du V.^e livre de la *Mécanique céleste* (pages 313 et 317 du second volume), qui ont été trouvées, dans cet ouvrage, par une analyse entièrement différente de la nôtre.

ADDITION