SUR UNE FORME NOUVELLE DES ÉQUATIONS DE LA MÉCANIQUE

Henri Poincaré

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, tome 132, pp. 369-371 (18 février 1901)

Ayant eu l'occasion de m'occuper du mouvement de rotation d'un corps solide creux, dont la cavité est remplie de liquide, j'ai été conduit à mettre les équations générales de la Mécanique sous une forme que je crois nouvelle et qu'il peut être interessant de faire connaitre.

Supposons qu'il y ait n degrés de liberté et désignons par $x_1, x_2, ..., x_n$ les variables qui définissent l'état du systéme. Soyent T et U l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.

Envisageons un groupe transitif continu quelconque. Soit $X_i(f)$ une substitution infinitésimale quelconque de ce groupe, telle que

$$X_i(f) \;=\; X_i^1 \frac{df}{dx_1} + X_i^2 \frac{df}{dx_2} + ... + X_i^n \frac{df}{dx_n} \;.$$

Ces substitutions formant un groupe, on devra avoir

$$X_i X_k \,-\, X_k X_i \;=\; \sum c_{ik,s} X_s \;.$$

Nous pourrons poser (puisque le groupe est transitif)

$$x'_\mu \;=\; \frac{dx_\mu}{dt} \;=\; \eta_1 X_1^\mu \,+\, \eta_2 X_2^\mu \,+\, ... \,+\, \eta_r X_r^\mu$$

de telle façon qu'on puisse passer de l'état $(x_1, x_2, ..., x_n)$ du systéme à l'état infiniment voisin $(x_1 + x'_1 dt, ..., x_n + x'_n dt)$ par la substitution infinitésimale du groupe $\sum \eta_i dt X_i(f)$.

T, au lieu de s'exprimer en fonction des x' et des x, pourra s'exprimer en fonction des η et des x. Si nous donnons aux η et aux x des accroissements virtuels $\delta\eta$ et δx, il en résultera pour T et U des accroissements

$$\delta T \;=\; \sum \frac{dT}{d\eta} \delta\eta \,+\, \sum \frac{dT}{dx} \delta x \,; \qquad \delta U \;=\; \sum \frac{dU}{dx} \delta x \,.$$

Le groupe étant transitif, je pourrai poser

$$\delta x_\mu \;=\; \omega_1 X_1^\mu \,+\, \omega_2 X_2^\mu \,+\, ... \,+\, \omega_r X_r^\mu$$

de telle façon que l'on puisse passer de l'état x_i du systéme à l'état infiniment voisin $x_i+\delta x_i$ par la substitution infinitésimale du groupe $\sum \omega_i X_i(f)$. Je poserai ensuite

$$\sum \left(\frac{dT}{dx} - \frac{dU}{dx} \right) \delta x \;=\; \sum \Omega_i \omega_i \;.$$

Soit alors l'intégrale de Hamilton

$$J \;=\; \int (T-U) dt \;,$$

on aura

$$\delta J \;=\; \int \left(\sum \frac{dT}{d\eta_i} \delta\eta_i \;+\; \sum \Omega_i \omega_i \right) \, dt \;.$$

Or on trouve aisément

$$\delta\eta_i \;=\; \frac{d\omega_i}{dt} + \sum c_{ski} \eta_k \omega_s \;.$$

Le principle de moindre action nous donne alors

$$\frac{d}{dt} \frac{dT}{d\tau_{is}} \;=\; \sum c_{ski} \frac{dT}{d\eta_i} \tau_{ik} + \Omega_s \;. \tag{1}$$

Les equations (1) comprennent comme cas particuliers:

1^o Les équations de Lagrange, quand le groupe se réduit aux substitutions, toutes permutables entre elles, qui augmentent une des variables x d'une constante infiniment petite.

2^o Les équations d'Euler pour la rotation des corps solides, où le rôle des η_i est joué par les composantes p, q, r de la rotation, et celui de Ω_s par les couples dus aux forces extérieures.

Elles sont surtout intéressantes dans le cas où U étant nul, T ne dépend que des η.