I

O. F. MOSSOTTI

SCRITTI

RACCOLTI

DA

LUIGI GABBA E GIOVANNI POLVANI

VOLUME PRIMO

ASTRONOMIA, GEODESIA E MATEMATICA

ISTITUTO DI FISICA
BIBLIOTECA
UNIVERSITÀ-ROMA

MEMORIE E NOTE

DI

ASTRONOMIA

I

NUOVA ANALISI

DEL PROBLEMA

DI DETERMINARE LE ORBITE DEI CORPI CELESTI

[1816 - 1818]

PRELIMINARE

Allorchè si scopre in cielo un corpo in moto, è evidente che per mezzo delle osservazioni altro non possiamo determinare che la direzione de' raggi visuali condotti in diversi tempi dall'occhio al corpo istesso. Con queste sole cognizioni a noi sarebbe impossibile l'assegnare l'orbita nella quale il corpo celeste si muove, perchè, quand'anche si volesse supporre che dessa fosse in un piano, infinite curve piane possiamo concepire, le quali tutte passino per que' raggi visuali, ed il problema riuscirebbe così indeterminato. Per tal ragione sembra che gli antichi, i quali non conoscevano le vere leggi dei movimenti dei corpi celesti, fossero nell'impossibilità di arguire da un piccolo numero di osservazioni l'orbita di un dato corpo, e quindi meritano poca fede le tradizioni che attribuiscono ai Caldei ed agli Egizj la predizione del ritorno delle comete.

Fu il vasto tesoro di osservazioni planetarie lasciato da Ticone, che sottoposto ad accurato esame dal sagace Keplero aprì la strada al ritrovamento delle prime leggi che regolano i movimenti dei corpi celesti. Quest'ingegno, come è noto, dimostrò che i pianeti si muovono in orbite ellittiche delle quali il sole occupa un fuoco, ritrovò che nel percorrere queste

orbite i settori descritti sono proporzionali ai tempi in cui si descrivono, e che i quadrati dei tempi delle intiere rivoluzioni di due pianeti sono come i cubi delle loro distanze medie dal sole. Esso concepì pure l'idea di attribuire ad una forza di attrazione residente nel sole la causa che ritiene i pianeti nelle loro orbite, ma fu riservato al gran Newton lo scoprire che questa forza segue nella sua intensità la ragione inversa dei quadrati delle distanze dal corpo attraente. Con tale scoperta Newton unì sotto un sol principio le succennate leggi di Keplero, e dedusse dallo stesso principio che qualunque delle sezioni coniche poteva esser percorsa da un corpo celeste, che i settori descritti in diversi tempi erano nella ragione composta diretta de' tempi medesimi e sudduplicata dei semiparametri delle loro orbite; e comprovata l'esistenza di questa forza d'attrazione con validi argomenti, ne estese per analogia la sua efficacia a tutti i corpi dell'universo.

Arrivati per tal modo alle cognizioni delle leggi dei movimenti dei corpi celesti, il problema di determinare con poche osservazioni l'orbita d'alcuno di essi che era irresolubile ed indeterminato per gli antichi, divenne solubile e determinato pei posteri. In fatti, assegnata colle osservazioni la direzione di tre raggi visuali, e dati i luoghi della terra per dove passano, non è più possibile immaginare che una sola sezione conica, la quale avendo per fuoco il sole incontri nel suo corso que' raggi visuali, e condotti dal sole ai punti d'incontro tre raggi vettori, i settori compresi da questi raggi vettori riescano nella ragion composta semplice degl'intervalli di tempo fra le osservazioni, e sudduplicata del semiparametro della stessa conica sezione. Per ben concepire come ciò avvenga, ricorderemo primieramente che essendo dati tre punti in un piano condotto pel sole, si può sempre disegnare una curva conica il cui fuoco sia nel centro di quest'astro e passi pei detti tre punti, il che analiticamente si riduce a determinare le tre costanti che si trovano nell'equazione delle medesime curve allorchè è data la posizione del fuoco. Ciò posto, s'immagini quel piano condotto pel sole: esso verrà incontrato in tre punti dai tre raggi visuali dati di posizione dalle osservazioni e dai luoghi della terra, e potremo sempre, qualunque sia la situazione di questo piano, trovare una sezione conica che tragitti pei nominati punti. Ma di tutte le sezioni coniche che possiamo descrivere, dando diverse posizioni al piano, dobbiamo sceglier quella che, soddisfaeendo alle leggi d'attrazione, renda i due settori compresi dai tre raggi vettori proporzionali

al tempo fra le osservazioni, e nella ragione sudduplicata del semiparametro della curva. Dunque essendovi nella posizione di un piano due cose in nostro arbitrio, cioè la direzione della linea dei modi e l'inclinazione, dovremo, girando ora l'una, ora variando l'altra, disporle in modo che soddisfacciano alle due predette condizioni, ovvero, con linguaggio algebraico parlando, dovremo trovare, per le due costanti che entrano nella equazione di un piano, valori tali che la curva conica, che sovra esso verremo a descrivere, goda delle enunciate proprietà. Ecco quindi ridotta la ricerca dell'orbita di un corpo celeste per mezzo di tre osservazioni alla soluzione di un problema puramente matematico. Lo stesso Newton fu il primo che si propose questo problema, e considerando le orbite delle comete come parabole, diede nell'immortale libro de' *suoi principj* il primo metodo di determinare le orbite delle medesime. Dopo Newton, quasi tutti i più grandi geometri esercitarono il loro ingegno in quest'importante indagine. Non è qui mio scopo di tessere una storia ragionata delle varie soluzioni proposte; un valente geometra [1] premesse ad una nuova sua soluzione questo lavoro eseguito con quella filosofica erudizione che splende in tutte le sue opere; io non aggiungerò che qualche riflessione intorno ad alcuni metodi venuti alla luce posteriormente, ed all'analisi che sono per esporre.

Quantunque le condizioni alle quali abbiamo detto precedentemente doversi assoggettare la posizione del piano dell'orbita possano tradursi in due equazioni fra le due costanti incognite che determinano questa posizione, pure esse risultano talmente complicate, che non si può sperare di trarne alcun utile. Questa difficoltà fu generalmente riconosciuta, ed i geometri che intrapresero la soluzione del problema che trattiamo, si trovarono costretti d'abbandonare il rigore e di ricorrere ai metodi d'approssimazione. Il ritrovamento però dei valori approssimati d'alcuni elementi è sufficiente all'intento, perchè ritrovati questi valori, è facile il correggerli, non che il determinare tutti gli altri elementi, e molti ingegnosi metodi furono già da molti a tale effetto escogitati. Trattandosi perciò di una semplice approssimazione, si adottò come principal cardine di tutte le supposizioni la condizione che le osservazioni fossero fatte a piccoli intervalli di tempo. Questa condizione riducendo i triangoli formati dai raggi

[1] Lagrange. Nouveaux Mémoires de l'Academie de Berlin, 1778.

vettori e dalle corde che gli uniscono presso che eguali ai settori descritti dal corpo celeste, guida, come è facile il vedere con una semplice costruzione geometrica, alla supposizione che la corda, la quale sottende l'intiero arco percorso, sia tagliata dal secondo raggio vettore in parti proporzionali al tempo fra le due prime e le due ultime osservazioni. La traduzione algebraica di questa proprietà della corda conduce ad un'equazione molto semplice, e tale proprietà fu adottata in quasi tutte le soluzioni che fecero immediato uso dei dati delle osservazioni per la determinazione dell'orbita. Ciò che rimane da farsi, e che nello stesso tempo offre maggior difficoltà, si è la scelta di una seconda condizione od equazione onde ridurre il problema determinato. L'ingegnoso signor Olbers ha dato una novella prova dell'utilità del famoso teorema conosciuto sotto il nome di Teorema di Lambert, il quale per le orbite paraboliche somministra il tempo impiegato a percorrere un arco qualunque in funzione della corda che sottende quest'arco, e dei raggi vettori che uniscono le estremità. Combinando l'equazione che fornisce questo teorema con quella che nasce dalla precedente supposizione, ha dedotto un metodo semplice per la determinazione delle orbite delle comete [1], del quale fanno comunemente uso gli astronomi. Il signor Gauss, conservando tuttora la supposizione che gl'intervalli di tempo fra le osservazioni siano piccoli, si vale di un'equazione che in ultima analasi viene a supporre presso che costante la forza colla quale è attratto il corpo celeste in tutto il tempo decorso fra le medesime osservazioni. Questa supposizione, avverandosi prossimamente per tempi anche lunghi nelle orbite planetarie, l'ha condotto a quei felici successi che coronarono il suo metodo nelle applicazioni fattene alle determinazioni delle orbite de' pianeti testè scoperti. Il metodo di cui trattasi, preceduto da sì utili applicazioni, venne alla luce, come si sa, nella *Theoria motus corporum cœlestium in sectionibus conicis solem ambientium*, opera veramente apprezzabile per l'astronomia.

Malgrado però i conati di sì valenti geometri, l'equazione alla quale fu ridotta la soluzione del problema, tanto nei metodi di cui ho fatto parola, quanto in tutti gli altri, ascende ad un alto grado che non ammette risoluzione algebrica, e quindi i metodi riescono tutti soggetti a quegl'inconvenienti che accompagnano le false posizioni. Colpito io dalla semplicità delle equazioni alle quali conduce l'ipotesi delle proporzionalità delle parti della corda ai tempi corrispondenti, immaginai che, se mi venisse fatto di dedurre dalla medesima ipotesi una equazione fra le due costanti che determinano la posizione del piano, si potrebbe, prescindendo dall'inconveniente analitico d'introdurre una quarta osservazione, ricavare una soluzione molto semplice. In fatti assoggettando alla stessa ipotesi la corda che va dal luogo del corpo celeste nella seconda osservazione al luogo del medesimo nella quarta, si otterrebbe una seconda equazione simile, che combinata colla prima fornirebbe i valori delle due costanti incognite. Questo è ciò che risulta anche direttamente, se si osservi che è sempre possibile, dando una qualunque inclinazione al piano dell'orbita, girare tanto la linea dei nodi finchè la retta che va dal sole al punto d'intersezione del raggio visuale della seconda osservazione col piano, tagli in parti proporzionali al tempo la corda che unisce i punti d'intersezione dei raggi visuali della prima e terza osservazione. E siccome ci rimane ancora arbitraria l'inclinazione, potremo combinare questa con una certa direzione della linea de' nodi, che anche la corda che unisce i punti d'intersezione della seconda e quarta osservazione, sia tagliata in parti proporzionali al tempo dalla retta che va dal sole al punto d'incontro del raggio visuale della terza osservazione col piano. Tentai adunque di porre in analisi queste condizioni, ed ebbi il piacere di vedere che esse conducevano ad equazioni di primo grado, spingendo anche più in là l'approssimazione di quello che lo comporti la predetta ipotesi. La soluzione che ho dedotto da queste equazioni è quella che forma il principale oggetto di quest'Analisi; ma poichè nell'indagine di essa io fui condotto a varie altre equazioni, dalle quali emergono direttamente le soluzioni dei celebri geometri Olbers, Gauss e Lagrange, non ho trascurato, cammin facendo, di porre sott'occhio al lettore anche questi eleganti metodi.

Trovato il valore delle incognite che determinano la posizione del piano dell'orbita con metodi già conosciuti si può passare alla cognizione di tutti gli altri elementi; pure, per non obbligare il lettore a ricercare altrove questi metodi, ho radunato in un articolo alcune formole che potranno essere utili all'uopo. Ho finalmente aggiunto una seconda parte a

[1] Abhandlung über die leichteste und bequemeste Methode die Bahn eines Cometen zu berechnen. Von Wilhelm Olbers, Weimar, 1797.

quest'Analisi, nella quale ho avuto per iscopo di ridurre le formole alla massima semplicità per l'uso pratico; ed ho esposto un esempio numerico di tutte le ritrovate equazioni, applicando il metodo alla determinazione dell'orbita della famosa cometa dell'anno 1759. Spero che la semplicità e brevità di calcolo, colle quali si troveranno determinati tutti gli elementi, faranno accogliere con indulgenza presso gli astronomi il metodo che presento.

PARTE PRIMA

EQUAZIONI FONDAMENTALI DEL PROBLEMA.

I.

Posta l'origine degli assi coordinati rettangoli nel luogo del sole, siano x, y, z le coordinate del corpo celeste, X, Y, Z quelle della terra; sarà, come è noto, $r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$ la distanza del corpo celeste dal sole, e parimente $R = \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}$ la distanza della terra dallo stesso astro.

Sia l'unità di massa la massa del sole, e s'indichino con μ e $'\mu$ le masse del corpo celeste e della terra, e rappresenti di più g la forza di gravitazione alla distanza uno.

1.° Considerando separatamente le attrazioni fra il sole ed il corpo celeste, e fra il sole e la terra, prescindendo cioè dall'azion reciproca della terra e del corpo celeste, la meccanica applicata al principio dell'universale attrazione di Newton ci darà le equazioni, pel corpo celeste

$$(1)\qquad \begin{aligned} \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) &= -(1+\mu)\frac{gx}{r^3} \\ \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) &= -(1+\mu)\frac{gy}{r^3} \\ \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) &= -(1+\mu)\frac{gz}{r^3} \end{aligned}$$

e per la terra

$$(2)\qquad \begin{aligned} \left(\frac{d^2X}{dt^2}\right) &= -(1+{}'\mu)\frac{gX}{R^3} \\ \left(\frac{d^2Y}{dt^2}\right) &= -(1+{}'\mu)\frac{gY}{R^3} \\ \left(\frac{d^2Z}{dt^2}\right) &= -(1+{}'\mu)\frac{gZ}{R^3} \end{aligned}$$

2.° Col mezzo di un'osservazione si determina per l'istante in cui essa è istituita, la direzione del raggio visuale condotto dall'occhio al corpo che si osserva; siccome questo raggio passa nello stesso tempo per la terra, così le equazioni del medesimo saranno della forma

$$\frac{x-X}{m}=\frac{y-Y}{n}=\frac{z-Z}{o} \tag{3}$$

Indichiamo con x', X', y', Y', ecc. i valori delle coordinate del corpo celeste e della terra, e con m', n', o' i valori di m, n, o nell'istante della prima osservazione, distinti con due e tre apici i valori delle dette quantità nei momenti della seconda e terza osservazione, avremo per que' tempi le equazioni

$$\frac{x'-X'}{m'}=\frac{y'-Y'}{n'}=\frac{z'-Z'}{o'} \tag{4}$$

$$\frac{x''-X''}{m''}=\frac{y''-Y''}{n''}=\frac{z''-Z''}{o''} \tag{5}$$

$$\frac{x'''-X'''}{m'''}=\frac{y'''-Y'''}{n'''}=\frac{z'''-Z'''}{o'''} \tag{6}$$

La teorica del movimento della terra o sia le tavole solari ci daranno in queste equazioni i valori di X', Y', Z', X'', Y'', ecc., e le osservazioni somministreranno i valori dei rapporti $\frac{m'}{o'}$, $\frac{n'}{o'}$, $\frac{m''}{o''}$, ecc., perchè indicando con λ l'angolo che il raggio visuale fa col piano delle xy, e con Λ l'angolo che la projezione di questo raggio sul detto piano fa coll'asse delle x, la trigonometria c'insegna essere

$$\begin{aligned} \frac{m'}{o'}&=\frac{\cos\Lambda'}{\tan\lambda'} & \frac{n'}{o'}&=\frac{\sin\Lambda'}{\tan\lambda'} \\ \frac{m''}{o''}&=\frac{\cos\Lambda''}{\tan\lambda''} & \frac{n''}{o''}&=\frac{\sin\Lambda''}{\tan\lambda''} \\ \frac{m'''}{o'''}&=\frac{\cos\Lambda'''}{\tan\lambda'''} & \frac{n'''}{o'''}&=\frac{\sin\Lambda'''}{\tan\lambda'''} \end{aligned} \tag{7}$$

Queste equazioni e le precedenti segnate (1), (2), (4), (5) e (6) sono quelle che direttamente somministra la natura del problema, ed è da queste che l'analisi può dedurre le varie soluzioni.

ARTICOLO I.

Equazioni dedotte dal principio dell'universale attrazione.

2.

Proseguendo l'analisi nell'ordine intrapreso, cominceremo a trattare delle equazioni (1), (2) che fornisce il principio dell'universale attrazione. Le formole che si deducono da queste equazioni, sono conosciute e ripetute in varie opere; pure credo bene di riportarle in quest' articolo e per la maggiore intelligenza delle citazioni, e per esporle sotto quella forma e con quelle denominazioni che useremo nel seguito.

Riassunte perciò le equazioni (1), faccio in esse per maggior semplicità

$$t=\frac{\theta}{\sqrt{|g(1+\mu)|}} \tag{8}$$

onde sarà facile il vedere che si trasformeranno nelle seguenti:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2x}{d\theta^2}\right)&=-\frac{x}{r^3} \\ \left(\frac{d^2y}{d\theta^2}\right)&=-\frac{y}{r^3} \\ \left(\frac{d^2z}{d\theta^2}\right)&=-\frac{z}{r^3} \end{aligned} \tag{9}$$

Si moltiplichi la prima di queste equazioni per $\left(\frac{dx}{d\theta}\right)$, la seconda per $\left(\frac{dy}{d\theta}\right)$, e la terza per $\left(\frac{dz}{d\theta}\right)$, sommandole ed integrando in seguito, avremo

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 = \frac{2}{r} + c \tag{10}$$

c essendo la costante arbitraria aggiunta.

Dalle stesse equazioni (9) non sarà difficile il dedurre le seguenti:

$$\begin{aligned} x\left(\frac{d^2y}{d\theta^2}\right) - y\left(\frac{d^2x}{d\theta^2}\right) &= 0 \\ x\left(\frac{d^2z}{d\theta^2}\right) - z\left(\frac{d^2x}{d\theta^2}\right) &= 0 \\ y\left(\frac{d^2z}{d\theta^2}\right) - z\left(\frac{d^2y}{d\theta^2}\right) &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Queste equazioni integrate danno

$$x\left(\frac{dy}{d\theta}\right) - y\left(\frac{dx}{d\theta}\right) = c' \tag{12}$$

$$x\left(\frac{dz}{d\theta}\right) - z\left(\frac{dx}{d\theta}\right) = c'' \tag{13}$$

$$y\left(\frac{dz}{d\theta}\right) - z\left(\frac{dy}{d\theta}\right) = c''' \tag{14}$$

Moltiplichiamo l'equazione (12) per z, la (13) per $-y$ e la (14) per x, sommandole in seguito, avremo

$$c'z - c''y + c'''x = 0 \tag{15}$$

Quest'equazione essendo quella di un piano che passa per l'origine delle coordinate, o sia pel sole, prova che la trajettoria descritta dal corpo celeste è situata in questo piano.

3.

Poichè adunque l'orbita descritta dal corpo celeste è in un piano, prendiamo le coordinate rettangole in questo piano, tenendo fissa l'origine

delle medesime. Le formole per passare da un sistema di coordinate nello spazio ad uno che sia in un piano, se si rappresentano con ξ, v le nuove coordinate, sono

$$x = \alpha\xi + \beta v, \quad y = \alpha_1\xi + \beta_1 v, \quad z = \alpha_2\xi + \beta_2 v \tag{16}$$

nelle quali α, β, α_1, β_1, α_2, β_2 esprimono i coseni degli angoli che i nuovi assi della ξ e v fanno cogli assi x, y, z, e sussistono fra questi coseni le equazioni

$$\alpha^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1 \tag{17}$$

$$\alpha\beta + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = 0 \tag{18}$$

$$\beta^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1 \tag{19}$$

Così tre di queste quantità saranno determinate dalle stesse equazioni; due altre saranno legate coi rapporti $\frac{c''}{c'}$ $\frac{c'''}{c'}$, che fissano la posizione del piano dell'orbita, per mezzo delle formole

$$c'\alpha_2 - c''\alpha_1 + c'''\alpha = 0 \tag{20}$$

$$c'\beta_2 - c''\beta_1 + c'''\beta = 0 \tag{21}$$

le quali risultano sostituendo i valori precedenti di x, y, z nell'equazione (15), ed eguagliando a zero i coefficienti di ξ e v, perchè quell'equazione deve verificarsi indipendentemente dai valori di queste coordinate; ne rimarrà poi una arbitraria a ragione che abbiamo lasciata arbitraria la direzione delle coordinate rettangole nel piano.

4.

Sostituiamo successivamente i nuovi valori delle coordinate in tutte le equazioni precedenti. Cominciando a sostituirli nelle prime segnate (9), e moltiplicando la prima per α, la seconda per α_1, e la terza per α_2, e poi la prima per β, la seconda per β_1, e la terza per β_2, sommando separatamente le prime tre, ed in seguito le altre tre, avremo

(22) $$\left(\frac{d^2\xi}{d\theta^2}\right) = -\frac{\xi}{r^3}$$

(23) $$\left(\frac{d^2v}{d\theta^2}\right) = -\frac{v}{r^3}$$

Sostituendoli dopo nell'equazione (10), essa si ridurrà a questa

(24) $$\left(\frac{d\xi}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dv}{d\theta}\right)^2 = \frac{2}{r} + c$$

In simil modo ponendoli nelle equazioni (11), ciascuna di esse ci darà

(25) $$\xi\left(\frac{d^2v}{d\theta^2}\right) - v\left(\frac{d^2\xi}{d\theta^2}\right) = 0$$

Finalmente facendo la stessa sostituzione anche nelle equazioni (12), (13), (14), e ponendo per brevità

(26) $$\frac{c'}{\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1} = \sqrt{p}$$

troveremo

(27) $$\xi\left(\frac{dv}{d\theta}\right) - v\left(\frac{d\xi}{d\theta}\right) = \sqrt{p}$$

(28) $$\{\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1\}\, c'' = \{\alpha\beta_2 - \beta\alpha_2\}\, c'$$

(29) $$\{\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1\}\, c''' = \{\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2\}\, c''$$

Ora abbiamo

$$\xi\left(\frac{dv}{d\theta}\right) - v\left(\frac{d\xi}{d\theta}\right) = \xi\left(\frac{dv}{d\theta}\right) + v\left(\frac{d\xi}{d\theta}\right) - 2v\left(\frac{d\xi}{d\theta}\right)$$

i due primi termini di questo secondo membro compongono la funzion prima del prodotto ξv, cioè della doppia area del triangolo rettangolo del quale ξ è la base e v l'altezza, e l'ultimo termine

$$2v\left(\frac{d\xi}{d\theta}\right)$$

rappresenta la funzion prima della doppia area della curva compresa tra l'ascissa ξ e l'ordinata v; dunque la quantità

$$\xi\left(\frac{dv}{d\theta}\right) - v\left(\frac{d\xi}{d\theta}\right)$$

del primo membro rappresenterà la funzion prima della doppia differenza dell'area del triangolo e dell'area nominata; e si può vedere facilmente che questa differenza è in generale eguale allo spazio compreso tra la curva, della quale ξ, v sono le coordinate, e la retta condotta dall'origine delle coordinate alla medesima curva, o sia all'area del settore descritto da questa stessa retta, che dicesi raggio vettore. Quindi essendo costante nell'equazione (27) la detta funzion prima, presa relativamente alla θ, ne conchiuderemo che in un dato tempo la doppia area del settore descritto dal raggio vettore è proporzionale al tempo t ed alla quantità $\sqrt{g}\,(1+\mu)\sqrt{p}$.

I ragionamenti ora fatti potendosi ripetere su tutte le equazioni (12), (13), (14), si vedrà che le aree descritte dalle projezioni del raggio vettore sui tre piani coordinati crescono tutte proporzionalmente al tempo.

5.

Per proseguire vie meglio le integrazioni trasformiamo le coordinate rettangole ξ, v in coordinate polari. A tal effetto si nomini u l'angolo che il raggio vettore r fa coll'asse delle ξ, sarà allora

(30) $$\xi = r\cos u \qquad v = r\sin u$$

Sostituendo nelle equazioni (24), (27) questi valori, avremo

(30) $$r^2\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{2}{r} + c$$

(31) $$r^2\left(\frac{du}{d\theta}\right) = \sqrt{p}$$

Si elimini, colla permutazione delle variabili, da queste equazioni prima la θ e poscia la u; si ritroveranno le seguenti:

$$\left(\frac{du}{dr}\right) = \frac{\sqrt{p}}{r^2\sqrt{\left(c + \frac{2}{r} - \frac{p}{r^2}\right)}} \tag{32}$$

$$\left(\frac{d\theta}{dr}\right) = \frac{1}{\sqrt{\left(c + \frac{2}{r} - \frac{p}{r^2}\right)}} \tag{33}$$

Per integrare la prima facciasi

$$\frac{\sqrt{p}}{r} - \frac{1}{\sqrt{p}} = z$$

Sostituendo ed integrando, si avrà

$$u = Arc.\ cos \frac{z}{\sqrt{\left(c + \frac{1}{p}\right)}} + \varpi$$

ϖ essendo la costante arbitraria. Rimettendo per z il suo valore, e facendo

$$cp + 1 = e^2 \tag{34}$$

$$p = a(1 - e^2) \tag{35}$$

risulterà

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos(u - \varpi)} \tag{36}$$

Quest'equazione appartiene a qualunque delle sezioni coniche, ed in essa, come è noto dalla teorica di queste curve, a rappresenta il semiasse maggiore, e l'eccentricità, $a(1 - e^2)$ il semiparametro, e ϖ l'angolo che l'asse maggiore della curva fa coll'asse delle ascisse ξ. La curva sarà poi un'ellisse, una parabola od un'iperbola, secondo che la quantità e sarà minore, eguale o maggiore dell'unità.

Ad oggetto d'integrare anche l'equazione (33) permutansi per semplicità le costanti come superiormente; si troverà

$$\left(\frac{d\theta}{dr}\right) = \frac{r\sqrt{a}}{\sqrt{\{a^2e^2 - (a - r)^2\}}}$$

Pongasi in questa

$$r = a(1 - e\cos\varepsilon), \quad \text{ovvero} \quad r = a\left(1 - \frac{e}{\cos\varepsilon}\right) \tag{37}$$

integrando risulteranno secondo le due posizioni gl'integrali seguenti:

$$\theta - \Theta = (\varepsilon - e\sin\varepsilon)\sqrt{a^3} \tag{38}$$

$$\theta - \Theta = \{e\tan\varepsilon - \log\tan(45 + \tfrac{1}{2}\varepsilon)\}\sqrt{-a^3} \tag{39}$$

nei quali Θ rappresenta la costante arbitraria. Il primo di questi integrali è atto a dare una relazione fra ε e θ, allorchè la curva descritta dal corpo celeste è un'ellisse; il secondo riesce più comodo quando la detta curva è una iperbola, nel qual caso, come è noto, a è una quantità negativa, e perciò $\sqrt{-a^3}$ ha un valor reale.

Se poi l'orbita sarà parabolica, così che sia $e = 1$, le equazioni (35), (36) daranno

$$r = \frac{p}{2\cos\frac{1}{2}(u - \varpi)} \tag{40}$$

Sostituendo questo valore di r nell'equazione (31) ed integrando, si ricaverà

$$\theta - \Theta = \tfrac{1}{2}\sqrt{p^3}\left(\tan\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3}\tan^3\tfrac{1}{2}v\right) \tag{41}$$

dove v tien luogo di $u - \varpi$.

Le equazioni (15), (36), (38), fra tutte, contengono sei costanti arbi-

trarie, e perciò potremo considerare che esse siano gl'integrali completi delle tre equazioni differenziali di second'ordine segnate (9), pel che resta compita l'analisi delle medesime. Colle stesse equazioni (15), (36), (38) conosceremo le relazioni tra le variabili che determinano gli elementi del movimento del corpo celeste, allorchè saranno dati i valori delle dette sei costanti arbitrarie che le compongono, ed è appunto nel ritrovamento di questi valori che consiste la determinazione di un' orbita.

6.

Se ora passiamo dalle equazioni (1) del corpo celeste a quelle (2) della terra, è facile il vedere che queste ultime essendo della stessa forma delle prime condurranno parimente ad integrali della stessa forma, cui sarà perciò inutile di cercare, non rimanendoci da far altro che sostituire in tutte le equazioni già ritrovate per le quantità appartenenti al corpo celeste quelle corrispondenti della terra.

Siano perciò C', C'', C''' le costanti della terra analoghe alle c', c'', c''' del corpo celeste, sussisterà per questo pianeta l'equazione

$$C'Z - C''Y + C'''X = 0 \tag{42}$$

la quale sarà quella del piano dell'eclittica.

Rappresentiamo con x, y le coordinate della terra prese nel piano dell'eclittica, e sovrapponiamo anteriormente un apice alle quantità α, β che si trovano nelle equazioni (16) del corpo celeste per indicare quelle appartenenti alla terra, avremo

$$X = {}'\alpha x + {}'\beta y \qquad Y = {}'\alpha_1 x + {}'\beta_1 y \qquad Z = {}'\alpha_2 x + {}'\beta_2 y \tag{43}$$

Facendo poi

$$t = \frac{{}'\theta}{\sqrt{|g\,(1 + {}'\mu)|}} \tag{44}$$

queste posizioni ci condurranno in un modo simile al precedente ad avere anche per la terra le equazioni

$$\left(\frac{d^2x}{d'\theta^2}\right) = -\frac{x}{R^3} \tag{45}$$

$$\left(\frac{d^2y}{d'\theta^2}\right) = -\frac{y}{R^3} \tag{46}$$

$$x\left(\frac{d^2y}{d'\theta^2}\right) - y\left(\frac{d^2x}{d'\theta^2}\right) = 0 \tag{47}$$

e di più supponendo

$$\frac{C'}{{}'\alpha'\beta_1 - {}'\beta'\alpha_1} = \sqrt{P} \tag{48}$$

si otterrà come prima

$$x\left(\frac{dy}{d'\theta}\right) - y\left(\frac{dx}{d'\theta}\right) = \sqrt{P} \tag{49}$$

$$\{{}'\alpha'\beta_1 - {}'\beta'\alpha_1\}\,C'' = \{{}'\alpha'\beta_2 - {}'\beta'\alpha_2\}\,C' \tag{50}$$

$$\{{}'\alpha'\beta_1 - {}'\beta'\alpha_1\}\,C''' = \{{}'\alpha_1{}'\beta_2 - {}'\beta_1{}'\alpha_2\}\,C' \tag{51}$$

Sovrapponiamo parimente un apice davanti alle quantità che entrano nelle equazioni (35), (36), (37), (38) del corpo celeste per dinotare le analoghe della terra; le equazioni della medesima verranno così rappresentate

$$P = {}'\alpha\,(1 - {}'e^2) \tag{52}$$

$$R = \frac{{}'\alpha\,(1 - {}'e^2)}{1 + {}'e\cos({}'u - {}'\varpi)} \tag{53}$$

$$R = {}'\alpha\,(1 - {}'e\cos{}'\varepsilon) \tag{54}$$

$${}'\theta - {}'\Theta = \sqrt{{}'\alpha^3}\,({}'\varepsilon - {}'e\sin{}'\varepsilon) \tag{55}$$

7.

Ripongasi per $'\theta$ in quest'ultima equazione il suo valore dato per t dall'equazione (44), comprendendo nella costante indeterminata $'\Theta$ il divisore $\sqrt{|g\,(1 + {}'\mu)|}$, avremo

$$t - {}'\theta = \sqrt{\left(\frac{{}'\alpha^3}{g\,(1 + {}'\mu)}\right)}\,({}'\varepsilon - {}'e \sin {}'\varepsilon) \tag{56}$$

Quest' equazione somministra il mezzo di trovare colla durata di una rivoluzione della terra, e colle costanti $'\alpha$ e $'\mu$, che sono conosciute per le osservazioni e per la teorica delle attrazioni, il valore della g che entra nelle equazioni (8), (38), di tutti i corpi celesti.

Si determini in fatti nell'equazione (56) la costante $'\theta$ colla supposizione che sia $t = 0$ quando $'\varepsilon = 0$, e si estenda quest'integrale sino ad $'\varepsilon = 2\pi$ (π rappresentando la semiperiferia del cerchio di raggio uno), risulterà

$$t = \sqrt{\left(\frac{{}'\alpha^3}{g\,(1 + {}'\mu)}\right)} \cdot 2\pi$$

Ora è facile il vedere per mezzo delle equazioni (53), (54), che ai due detti valori di $'\varepsilon$ la terra corrisponderà allo stesso punto del cielo, e che avrà percorsa una intiera rivoluzione. Quindi, sapendosi dalle osservazioni che la durata di questa rivoluzione è di giorni solari medj 365,256384, prendendo per unità di distanza la distanza media della terra dal sole, o sia la $'\alpha$, e supponendo secondo il signor Laplace che la massa della terra sia $\frac{1}{329630} = 0{,}0000030$ di quella del sole, avremo

$$365{,}256384 = \frac{6{,}2831853}{\sqrt{1{,}0000030g}}$$

o sia

$$\sqrt{g} = \frac{6{,}2831853}{365{,}256384\sqrt{1{,}0000030}}$$

dalla quale si dedurrà

$$\log \sqrt{g} = 8{,}2355814 \tag{57}$$

che sarà il logaritmo della radice della forza dell'universale gravitazione alla distanza uno, preso per unità di tempo il giorno solare medio, e per unità di distanza la media distanza dalla terra al sole.

Siccome la massa del corpo celeste è ancora incognita, e d'altronde le quantità μ, $'\mu$ che esprimono le masse del medesimo e della terra sono piccolissime in confronto dell'unità o sia della massa del sole, perciò trascureremo le dette quantità nelle equazioni (8), (44), ciò che darà più semplicemente

$$\theta = {}'\theta = t\sqrt{g}$$

ed in questo significato interpreteremo le θ nelle formole date e nelle seguenti.

Nelle applicazioni successive ci occorrerà d'impiegare anche il valore della radice del semiparametro dell'orbita terrestre, perciò aggiungerò qui il logaritmo di questa quantità che ho dedotto dalla formola (52) colla supposizione di $'\alpha = 1$, e coll' eccentricità $'e = 0{,}01677976$ corrispondente al principio del secolo, ed è

$$\log \sqrt{P} = 9{,}9999940 \tag{58}$$

ARTICOLO II.

Equazioni provenienti dai dati delle osservazioni.

8.

Nell'articolo precedente abbiamo dedotto dal principio dell'universale gravitazione le leggi del movimento del corpo celeste, la curva descritta e le relazioni tra il tempo e i luoghi occupati dal medesimo. Ora prenderemo a trattare delle relazioni fra i diversi luoghi del corpo celeste e della terra, le quali si deducono dalle equazioni dei raggi visuali segnate (4), (5), (6), introducendo la sola proprietà che tanto l'orbita del corpo celeste quanto quella della terra siano in un piano, e procureremo sopra tutto di dare alle nostre equazioni forme tali, che possano facilmente combinarsi con quelle esposte nell'articolo precedente, concernenti le leggi dei corpi attratti, in modo da ricavare più semplicemente che potremo la soluzione del problema che ci siamo proposti.

Perciò richiamiamo le equazioni (4) appartenenti al raggio visuale della prima osservazione, e poniamo le medesime sotto le due forme seguenti:

$$(59)\qquad \begin{aligned} o'x' - m'z' &= o'X' - m'Z' \\ o'y' - n'z' &= o'Y' - n'Z' \end{aligned}$$

Si moltiplichi la prima di queste equazioni per

$$(60)\qquad o'y'' - n'z''$$

e si sottragga la seconda moltiplicata per

$$(60)\qquad o'x'' - m'z''$$

si troverà

$$(61)\qquad \begin{aligned} &o'\{o'(x'y'' - y'x'') - n'(x'z'' - z'x'') + m'(y'z'' - z'y'')\} = \\ &(o'X' - m'Z')(o'y'' - n'z'') - (o'Y' - n'Z')(o'x'' - m'z'') \end{aligned}$$

Si moltiplichi in vece la prima delle superiori equazioni per

$$(62)\qquad o'y''' - n'z'''$$

e si sottragga la seconda moltiplicata per

$$(62)\qquad o'x''' - m'z'''$$

otterremo

$$(61)\qquad \begin{aligned} &o'\{o'(x'y''' - y'x''') - n'(x'z''' - z'x''') + m'(y'z''' - z'y''')\} = \\ &(o'X' - m'Z')(o'y''' - n'z''') - (o'Y' - n'Z')(o'x''' - m'z''') \end{aligned}$$

Quest'equazione e la precedente (61) sono state dedotte da quelle segnate (4), appartenenti al raggio visuale della prima osservazione; ed è evidente che trattando con un processo simile le equazioni (5) del secondo raggio visuale, e cangiando nei fattori (60), (62) ′ in ″, ″ in ‴, ‴ in ′, si avranno anche le seguenti:

$$(61)\qquad \begin{aligned} &o''\{o''(x''y''' - y''x''') - n''(x''z''' - z''x''') + m''(y''z''' - z''y''')\} = \\ &(o''X'' - m''Z'')(o''y''' - n''z''') - (o''Y'' - n''Z'')(o''x''' - m''z''') \\ &o''\{o''(x'y'' - y'x'') - n''(x'z'' - z'x'') + m''(y'z'' - z'y'')\} = \\ &-(o''X' - m''Z'')(o''y' - n''z') + (o''Y'' - n''Z'')(o''x' - m''z') \end{aligned}$$

Parimente le equazioni (6) del terzo raggio visuale ed il cangiamento di ′ in ‴, di ″ in ′, di ‴ in ″ nei fattori (60), (62) ci forniranno queste altre due:

$$(61)\qquad \begin{aligned} &o'''\{o'''(x'y''' - y'x''') - n'''(x'z''' - z'x''') + m'''(y'z''' - z'y''')\} = \\ &-(o'''X''' - m'''Z''')(o'''y' - n'''z') + (o'''Y''' - n'''Z''')(o'''x' - m'''z') \\ &o'''\{o'''(x''y''' - y''x''') - n'''(x''z''' - z''x''') + m'''(y''z''' - z''y''')\} = \\ &-(o'''X''' - m'''Z''')(o'''y'' - n'''z'') + (o'''Y''' - n'''Z''')(o'''x'' - m'''z'') \end{aligned}$$

Supponiamo

$$(63)\qquad \xi'v'' - v'\xi'' = \tau^{1}\sqrt{p}\,,\quad \xi'v''' - v'\xi''' = \tau^{11}\sqrt{p}\,,\quad \xi''v''' - v''\xi''' - \tau^{111}\sqrt{p}$$

Sostituendo nei primi membri delle infrascritte equazioni per x', y', z'; x'', ecc. i loro valori che provengono dalle formole (16), e facendo le riduzioni che somministrano le equazioni (26), (28), (29), (63), si troverà che abbiamo

$$(64)\qquad \begin{aligned} x'y'' - y'x'' &= c'\tau^{1}, & x'y''' - y'x''' &= c'\tau^{11}, & x''y''' - y''x'' &= c'\tau^{111} \\ x'z'' - z'x'' &= c''\tau^{1}, & x'z''' - z'x''' &= c''\tau^{11}, & x''z''' - z''x''' &= c''\tau^{111} \\ y'z'' - z'y'' &= c'''\tau^{1}, & y'z''' - z'y''' &= c'''\tau^{11}, & y''z''' - z''y''' &= c'''\tau^{111} \end{aligned}$$

Denominiamo di più Δ la distanza dalla terra al corpo celeste, sarà, come è noto,

$$\Delta^2 = (x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2$$

Combinando quest'equazione con quelle segnate (3), e facendo per brevità

$$(65)\qquad \delta = \frac{\Delta}{\sqrt{(m^2 + n^2 + o^2)}}$$

si dedurranno le seguenti:

$$\frac{x-X}{m}=\delta\,;\quad \frac{y-Y}{n}=\delta\,,\quad \frac{z-Z}{o}=\delta \tag{66}$$

Sostituiamo ora i valori dei primi membri delle equazioni (64) nelle precedenti (61), e poniamo nei secondi membri di queste ultime per x', y', z'; x'', ecc. i valori che si deducono dalle equazioni (66), sovrapponendo alle quantità che entrano nelle medesime l'opportuno numero d'apici. Eseguite queste sostituzioni, facendo in generale

$$\psi = o\,c' - n\,c'' + m\,c''' \tag{67}$$

e dando alla ψ un numero d'apici eguale a quello che sarà sovrapposto alle lettere o, n, m del secondo membro, si troverà che le equazioni (61) si cangeranno in queste

$$\begin{aligned}
\psi'\,\tau^{\mathrm{I}} &= o'\,(X'Y''-Y'X'')-n'\,(X'Z''-Z'X'')+m'\,(Y'Z''-Z'Y'')\\
&\quad -\{Z'\,(m'n''-n'm'')-Y'\,(m'o''-o'm'')+X'\,(n'o''-o'n'')\}\,\delta''\\
\psi'\,\tau^{\mathrm{II}} &= o'\,(X'Y'''-Y'X''')-n'\,(X'Z'''-Z'X''')+m'\,(Y'Z'''-Z'Y''')\\
&\quad -\{Z'\,(m'n'''-n'm''')-Y'\,(m'o'''-o'm''')+X'\,(n'o'''-o'n''')\}\,\delta'''\\
\psi''\,\tau^{\mathrm{III}} &= o''\,(X''Y'''-Y''X''')-n''\,(X''Z'''-Z''X''')+m''\,(Y''Z'''-Z''Y''')\\
&\quad -\{Z''\,(m''n'''-n''m''')-Y''\,(m''o'''-o''m''')+X''\,(n''o'''-o''n''')\}\,\delta'''\\
\psi''\,\tau^{\mathrm{I}} &= o''\,(X'Y''-Y'X'')-n''\,(X'Z''-Z'X'')+m''\,(Y'Z''-Z'Y'')\\
&\quad -\{Z''\,(m'n''-n'm'')-Y''\,(m'o''-o'm'')+X''\,(n'o''-o'n'')\}\,\delta'\\
\psi'''\,\tau^{\mathrm{II}} &= o'''\,(X'Y'''-Y'X''')-n'''\,(X'Z'''-Z'X''')+m'''\,(Y'Z'''-Z'Y''')\\
&\quad -\{Z'''\,(m'n'''-n'm''')-Y'''\,(m'o'''-o'm''')+X'''\,(n'o'''-o'n''')\}\,\delta'\\
\psi'''\,\tau^{\mathrm{III}} &= o'''\,(X''Y'''-Y''X''')-n'''\,(X''Z'''-Z''X''')+m'''\,(Y''Z'''-Z''Y''')\\
&\quad -\{Z'''\,(m''n'''-n''m''')-Y'''\,(m''o'''-o''m''')+X'''\,(n''o'''-o''n''')\}\,\delta''
\end{aligned} \tag{68}$$

Le presenti equazioni possono mettersi sotto due semplici forme che esporremo successivamente.

9.

Supponiamo primieramente

$$X=\mu\,D\,,\quad Y=\nu\,D\,,\quad Z=\omega\,D \tag{69}$$

Per brevità adotteremo le seguenti denominazioni:

$$\begin{aligned}
B_1^{\mathrm{I}} &= o'\,(\mu'\nu''-\nu'\mu'')-n'\,(\mu'\omega''-\omega'\mu'')+m'\,(\nu'\omega''-\omega'\nu'')\\
B_1^{\mathrm{II}} &= o'\,(\mu'\nu'''-\nu'\mu''')-n'\,(\mu'\omega'''-\omega'\mu''')+m'\,(\nu'\omega'''-\omega'\nu''')\\
B_1^{\mathrm{III}} &= o'\,(\mu''\nu'''-\nu'\mu''')-n'\,(\mu''\omega'''-\omega''\mu''')+m'\,(\nu''\omega'''-\omega''\nu''')
\end{aligned} \tag{70}$$

e cambieremo l'indice 1 posto sotto alle B in un 2, ovvero 3, secondo che alle lettere m', n', o' subentreranno le m'', o'', n'', ovvero m''', n''', o'''. Sostituiremo di più alle B majuscole le b minuscole allorchè nelle formole precedenti le lettere greche si permuteranno nelle latine, e viceversa.

Questo premesso, sovrapponendo uno, due o tre apici alle quantità componenti le equazioni (69), secondo che apparterranno alla prima, seconda o terza osservazione, e sostituendo i valori che risultano per X', Y', Z'; X'', ecc. nelle equazioni (68), queste ultime col mezzo delle precedenti denominazioni si potranno scrivere come segue:

$$\begin{aligned}
\psi'\,\tau^{\mathrm{I}} &= \{B_1^{\mathrm{I}}\,D''-b_1^{\mathrm{I}}\,\delta''\}\,D'\\
\psi'\,\tau^{\mathrm{II}} &= \{B_1^{\mathrm{II}}\,D'''-b_1^{\mathrm{II}}\,\delta'''\}\,D'\\
\psi''\,\tau^{\mathrm{III}} &= \{B_2^{\mathrm{III}}\,D'''-b_2^{\mathrm{III}}\,\delta'''\}\,D''\\
\psi''\,\tau^{\mathrm{I}} &= \{B_2^{\mathrm{I}}\,D'-b_2^{\mathrm{I}}\,\delta'\}\,D''\\
\psi'''\,\tau^{\mathrm{II}} &= \{B_3^{\mathrm{II}}\,D'-b_3^{\mathrm{II}}\,\delta'\}\,D'''\\
\psi'''\,\tau^{\mathrm{III}} &= \{B_3^{\mathrm{III}}\,D''-b_3^{\mathrm{III}}\,\delta''\}\,D'''
\end{aligned} \tag{71}$$

10.

Per dare alle equazioni (68) un'altra forma egualmente semplice a quella delle precedenti, facciamo

[1] Qui la μ non rappresenta più la massa del corpo celeste.

$$(72)\quad x'y'' - y'x'' = T^{\text{II}}\sqrt{P},\quad x'y''' - y'x''' = T^{\text{III}}\sqrt{P},\quad x''y''' - y''x''' = T^{\text{III}}\sqrt{P}$$

In un modo simile a quello col quale abbiamo ottenute le equazioni (64), facendo uso di quelle segnate (43) e delle riduzioni somministrate dalle equazioni (48), (50), (51), si troveranno le seguenti:

$$(73)\quad \begin{array}{lll} X'Y''-Y'X''=C'T^{\text{I}}, & X'Y'''-Y'X'''=C'T^{\text{II}}, & X''Y'''-Y''X'''=C'T^{\text{III}} \\ X'Z''-Z'X''=C''T^{\text{I}}, & X'Z'''-Z'X'''=C''T^{\text{II}}, & X''Z'''-Z''X'''=C''T^{\text{III}} \\ Y'Z''-Z'Y''=C'''T^{\text{I}}, & Y'Z'''-Z'Y'''=C'''T^{\text{II}}, & Y''Z'''-Z''Y'''=C'''T^{\text{III}} \end{array}$$

Supponendo quindi in generale

$$(74)\quad \chi = o\,C' - n\,C'' + m\,C'''$$

e dando alla χ lo stesso numero d'apici che ne' casi particolari sarà sovrapposto alle lettere m, n, o del secondo membro, si vedrà che col mezzo delle equazioni (69), (70), (73), quelle segnate (68) si potranno ridurre alla seguente forma:

$$(75)\quad \begin{array}{l} b_1^{\text{I}} D'\delta'' = \chi' T^{\text{I}} - \psi'\tau^{\text{I}} \\ b_1^{\text{II}} D'\delta''' = \chi' T^{\text{II}} - \psi'\tau^{\text{II}} \\ b_2^{\text{III}} D''\delta''' = \chi'' T^{\text{III}} - \psi''\tau^{\text{III}} \\ b_2^{\text{I}} D''\delta' = \chi'' T^{\text{I}} - \psi''\tau^{\text{I}} \\ b_3^{\text{II}} D'''\delta' = \chi''' T^{\text{II}} - \psi'''\tau^{\text{II}} \\ b_3^{\text{III}} D'''\delta'' = \chi''' T^{\text{III}} - \psi'''\tau^{\text{III}} \end{array}$$

11.

La prima delle equazioni (63) può mettersi sotto la forma

$$(\xi' - \xi'')(v' + v'') + \xi'' v'' - \xi' v' = \tau'\sqrt{p}$$

nella quale il primo dei tre termini componenti il primo membro rappresenta il doppio dell'area del trapezio compreso dalle due ordinate $v'\,v''$ corrispondenti alla prima e seconda osservazione, e gli altri due termini esprimono le doppie aree dei triangoli formati dalle coordinate e dai raggi vettori del corpo celeste nelle due dette osservazioni. Ora è facile il vedere che la somma delle due prime aree diminuita della terza eguaglia il doppio dell'area del triangolo formato dai raggi vettori della prima e seconda osservazione, e dalla corda che gli unisce, il qual triangolo chiameremo settore triangolare. Perciò nel secondo membro della precedente equazione la quantità τ^{I} rappresenterà il doppio settore triangolare diviso per la radice del semiparametro: e facilmente si riconoscerà per le stesse ragioni, che le quantità τ^{II}, τ^{III} nelle altre due equazioni (63) esprimeranno le doppie aree dei settori triangolari fatti dai raggi vettori $r'\,r'''$ ed $r''\,r'''$ divise parimente per la radice del semiparametro dell'orbita.

È poi evidente che le T^{I}, T^{II}, T^{III} delle equazioni (72) rappresenteranno nell'orbita della terra quantità analoghe alle τ^{I}, τ^{II}, τ^{III}, che ora abbiamo esaminate; e che i primi membri delle equazioni (64), (73) corrisponderanno alle projezioni delle doppie aree dei detti triangoli sui piani coordinati rettangolari.

Poniamo i valori delle coordinate X', Y', Z'; X'', ecc., che si ricavano dalle formole (69) coll'opportuna sovrapposizione d'apici, nelle equazioni (73), combinandole poi colle equazioni (70) e loro derivanti, si troveranno le seguenti:

$$(76)\quad \begin{array}{lll} B_1^{\text{I}} D'D'' = \chi' T^{\text{I}} & B_1^{\text{II}} D'D''' = \chi' T^{\text{II}} & B_1^{\text{III}} D''D''' = \chi' T^{\text{III}} \\ B_2^{\text{I}} D'D'' = \chi'' T^{\text{I}} & B_2^{\text{II}} D'D''' = \chi'' T^{\text{II}} & B_2^{\text{III}} D''D''' = \chi'' T^{\text{III}} \\ B_3^{\text{I}} D'D'' = \chi''' T^{\text{I}} & B_3^{\text{II}} D'D''' = \chi''' T^{\text{II}} & B_3^{\text{III}} D''D''' = \chi''' T^{\text{III}} \end{array}$$

Molte di queste equazioni si possono anche ricavare confrontando le equazioni (71) colle (75).

12.

Le sei equazioni (71) ovvero (75) contengono le principali relazioni fra i luoghi occupati dalla terra e quelli occupati dal corpo celeste, che possono essere utili alla soluzione del problema che trattiamo. In queste equazioni le quantità B, b, χ, T sono conosciute per mezzo delle osservazioni e delle tavole solari, ma le altre δ, ψ, τ, che dipendono dal sito del corpo celeste,

dalla posizione del piano dell'orbita e dal semiparametro della stessa, sono evidentemente incognite. Queste incognite essendo in numero maggiore di quello delle equazioni (71) o (75), converrà per determinarle che i valori di alcune di esse siano preventivamente conosciuti, o che si possano ricavare da qualche proprietà delle trajettorie; ed è facile il prevedere che i valori di $\tau^{\prime}$, $\tau^{\prime\prime}$, $\tau^{\prime\prime\prime}$ saranno quelli che più probabilmente si potranno dedurre dalla combinazione delle leggi del movimento del corpo celeste coi dati delle osservazioni. Conservando perciò queste quantità, elimineremo soltanto le incognite ψ ovvero δ. Primieramente col paragone dei valori di ψ', ψ'', ψ''', che si ricavano dalle equazioni (71), avremo

$$\{B_1^{\prime} D'' - b_1^{\prime} \delta''\} \tau^{\prime\prime} = \{B_1^{\prime\prime} D''' - b_1^{\prime\prime} \delta'''\} \tau^{\prime} \tag{77}$$

$$\{B_2^{\prime\prime\prime} D''' - b_2^{\prime\prime\prime} \delta'''\} \tau^{\prime} = \{B_2^{\prime} D' - b_2^{\prime} \delta'\} \tau^{\prime\prime\prime} \tag{78}$$

$$\{B_3^{\prime\prime} D' - b_3^{\prime\prime} \delta'\} \tau^{\prime\prime\prime} = \{B_3^{\prime\prime\prime} D'' - b_3^{\prime\prime\prime} \delta''\} \tau^{\prime\prime} \tag{79}$$

Col paragone in vece dei valori delle stesse quantità ψ', ψ'', ψ''' dedotti dalle equazioni (75) troveremo

$$\begin{aligned} \{b_1^{\prime} \tau^{\prime\prime} \delta'' - b_1^{\prime\prime} \tau^{\prime} \delta'''\} D' &= \chi' \{\tau^{\prime\prime} T^{\prime} - \tau^{\prime} T^{\prime\prime}\} \\ \{b_2^{\prime\prime} \tau^{\prime} \delta''' - b_2^{\prime} \tau^{\prime\prime\prime} \delta'\} D'' &= \chi'' \{\tau^{\prime} T^{\prime\prime\prime} - \tau^{\prime\prime\prime} T^{\prime}\} \\ \{b_3^{\prime} \tau^{\prime\prime\prime} \delta' - b_3^{\prime\prime\prime} \tau^{\prime\prime} \delta''\} D''' &= \chi''' \{\tau^{\prime\prime\prime} T^{\prime\prime} - \tau^{\prime\prime} T^{\prime\prime\prime}\} \end{aligned} \tag{80}$$

Queste equazioni o le precedenti somministrano la relazione che passa fra due qualunque delle quantità δ', δ'', δ''' quando siano conosciuti i rapporti fra le altre $\tau^{\prime}$, $\tau^{\prime\prime}$, $\tau^{\prime\prime\prime}$.

13.

Avanti di progredire faremo osservare come alcune equazioni composte delle B e b diventano identiche per la sostituzione dei loro valori in funzione delle m, n, o; μ, ν, ω, perchè la cognizione di queste identità servirà a rendere notabilmente più semplici le equazioni che troveremo in seguito.

Primieramente non sarà difficile di verificare colla sostituzione dei rispettivi valori delle B e b l'identità delle seguenti equazioni:

$$B_2^{\prime\prime\prime} m''' - B_3^{\prime\prime\prime} m'' = b_3^{\prime\prime\prime} \mu'' - b_2^{\prime\prime\prime} \mu''' \tag{81}$$

$$B_2^{\prime\prime\prime} n''' - B_3^{\prime\prime\prime} n'' = b_3^{\prime\prime\prime} \nu'' - b_2^{\prime\prime\prime} \nu''' \tag{82}$$

$$B_2^{\prime\prime\prime} o''' - B_3^{\prime\prime\prime} o'' = b_3^{\prime\prime\prime} \omega'' - b_2^{\prime\prime\prime} \omega''' \tag{83}$$

Si moltiplichi l'equazione (81) per $\nu' o'' - \omega' n''$, la (82) per $-(\mu' o'' - \omega' m'')$ e la (83) per $\mu' n'' - \nu' m''$, sommandone i prodotti e trasportando tutti i termini nel primo membro, si troverà

$$b_1^{\prime\prime\prime} B_2^{\prime\prime\prime} - b_2^{\prime\prime\prime} B_2^{\prime\prime} + b_3^{\prime\prime\prime} B_2^{\prime} = 0 \tag{84}$$

Si moltiplichi ora l'equazione (81) per $\nu' o' - \omega' n'$, la (82) per $-(\mu' o' - \omega' m')$ e la (83) per $\mu' n' - \nu' m'$, facendo la somma dei prodotti, dedurremo

$$b_1^{\prime\prime} B_2^{\prime\prime\prime} - B_1^{\prime\prime} b_2^{\prime\prime\prime} = b_1^{\prime} B_3^{\prime\prime\prime} - B_1^{\prime} b_3^{\prime\prime\prime} \tag{85}$$

Moltiplichiamo finalmente la (81) per $n' o'' - o' n''$, la (82) per $-(m' o'' - o' m'')$ re la (83) per $(m' n'' - n' m'')$, sommandone egualmente i prodotti, e supponendo

$$\beta = o' (m'' n''' - n'' m''') - n' (m'' o''' - o'' m''') + m' (n'' o''' - o'' n''') \tag{86}$$

risulterà

$$B_2^{\prime\prime\prime} \beta = b_2^{\prime} b_3^{\prime\prime\prime} - b_3^{\prime} b_2^{\prime\prime\prime} \tag{87}$$

Le equazioni (81), (82), (83) essendo identiche, sussisteranno ancora, se in esse cambieremo $'$ in $''$, $''$ in $'''$, e $'''$ in $'$; eseguendo tale permutazione d'apici, diventano

$$\begin{aligned} B_3^{\prime\prime} m' - B_1^{\prime\prime} m''' &= b_1^{\prime\prime} \mu''' - b_3^{\prime\prime} \mu' \\ B_3^{\prime\prime} n' - B_1^{\prime\prime} n''' &= b_1^{\prime\prime} \nu''' - b_3^{\prime\prime} \nu' \\ B_3^{\prime\prime} o' - B_1^{\prime\prime} o''' &= b_1^{\prime\prime} \omega''' - b_3^{\prime\prime} \omega' \end{aligned}$$

Facendo su queste equazioni le stesse moltiplicazioni che ultimamente abbiamo fatte sulle equazioni (81), (82), (83), troveremo

$$B_1^{\prime\prime} \, 6 = b_1^{\prime} \, b_3^{\prime\prime} - b_3^{\prime} \, b_1^{\prime\prime}$$

Da questa e dall'equazione (87) si dedurranno facilmente le seguenti:

$$\{b_1^{\prime\prime} B_2^{\prime\prime\prime} - B_1^{\prime\prime} b_2^{\prime\prime\prime}\} \, b_3^{\prime} = b_1^{\prime} \, b_3^{\prime\prime} B_2^{\prime\prime\prime} - b_2^{\prime} B_1^{\prime\prime} \, b_3^{\prime\prime\prime} \tag{88}$$

$$-\{b_1^{\prime\prime} B_2^{\prime\prime\prime} - B_1^{\prime\prime} b_2^{\prime\prime\prime}\} \, 6 = b_1^{\prime} \, b_3^{\prime\prime} \, b_2^{\prime\prime\prime} - b_2^{\prime} \, b_1^{\prime\prime} \, b_3^{\prime\prime\prime} \tag{89}$$

Con un metodo simile a quello che abbiamo usato per dedurre le equazioni (84), (85), (88), ovvero cangiando in queste equazioni identiche alle m, n, o; μ, ν, ω, di cui le B e b sono composte, $'$ in $''$, $''$ in $'''$, $'''$ in $'$, e poi $'$ in $'''$, $''$ in $'$, $'''$ in $''$, si ricaveranno tutte le infrascritte:

$$\begin{aligned} b_1^{\prime\prime} B_3^{\prime\prime\prime} - b_2^{\prime\prime} B_3^{\prime\prime} + b_3^{\prime\prime} B_3^{\prime} &= 0 \\ b_1^{\prime} B_1^{\prime\prime\prime} - b_2^{\prime} B_1^{\prime\prime} + b_3^{\prime} B_1^{\prime} &= 0 \end{aligned} \tag{84}$$

$$\begin{aligned} b_2^{\prime} B_3^{\prime\prime} - B_2^{\prime} b_3^{\prime\prime} &= b_1^{\prime\prime} B_2^{\prime\prime\prime} - B_1^{\prime\prime} b_2^{\prime\prime\prime} \\ b_1^{\prime} B_3^{\prime\prime\prime} - B_1^{\prime} b_3^{\prime\prime\prime} &= b_2^{\prime} B_3^{\prime\prime} - B_2^{\prime} b_3^{\prime\prime} \end{aligned} \tag{85}$$

$$\begin{aligned} \{b_2^{\prime} B_3^{\prime\prime} - B_2^{\prime} b_3^{\prime\prime}\} \, b_1^{\prime\prime\prime} &= b_1^{\prime} B_3^{\prime\prime} \, b_2^{\prime\prime\prime} - B_2^{\prime} \, b_1^{\prime\prime} \, b_3^{\prime\prime\prime} \\ \{b_1^{\prime} B_3^{\prime\prime\prime} - B_1^{\prime} b_3^{\prime\prime\prime}\} \, b_2^{\prime\prime} &= B_1^{\prime} \, b_3^{\prime\prime} \, b_2^{\prime\prime\prime} - b_2^{\prime} \, b_1^{\prime\prime} \, B_3^{\prime\prime\prime} \end{aligned} \tag{88}$$

14.

Premesse queste osservazioni ritorniamo alle equazioni (77), (78), (79), e moltiplicando rispettivamente prima per $b_3^{\prime\prime\prime} \, b_2^{\prime\prime\prime}$, $b_3^{\prime\prime\prime} \, b_1^{\prime\prime}$, $b_2^{\prime\prime\prime} \, b_1^{\prime}$, e poi per $b_3^{\prime\prime} \, b_2^{\prime\prime\prime}$, $b_3^{\prime\prime} \, b_1^{\prime\prime}$, $b_1^{\prime\prime} \, b_2^{\prime}$, e finalmente per $b_2^{\prime} \, b_3^{\prime\prime\prime}$, $b_1^{\prime} \, b_3^{\prime\prime}$, $b_1^{\prime} \, b_2^{\prime}$; sommando i primi tre prodotti, e poi i secondi tre, ed in fine gli ultimi tre, e togliendo i fattori comuni che si riconosceranno per mezzo delle equazioni (84), (85), (88), (89), si arriverà alle equazioni che seguono

$$\begin{aligned} 6 \, \tau^{\prime\prime\prime} \delta^{\prime} &= - b_1^{\prime\prime\prime} \tau^{\prime\prime\prime} \, D^{\prime} + b_2^{\prime\prime\prime} \tau^{\prime\prime} \, D^{\prime\prime} - b_3^{\prime\prime\prime} \tau^{\prime} \, D^{\prime\prime\prime} \\ 6 \, \tau^{\prime\prime} \, \delta^{\prime\prime} &= - b_1^{\prime\prime} \, \tau^{\prime\prime\prime} \, D^{\prime} + b_2^{\prime\prime} \, \tau^{\prime\prime} \, D^{\prime\prime} - b_3^{\prime\prime} \, \tau^{\prime} \, D^{\prime\prime\prime} \\ 6 \, \tau^{\prime} \, \delta^{\prime\prime\prime} &= - b_1^{\prime} \, \tau^{\prime\prime\prime} \, D^{\prime} + b_2^{\prime} \, \tau^{\prime\prime} \, D^{\prime\prime} - b_3^{\prime} \, \tau^{\prime} \, D^{\prime\prime\prime} \end{aligned} \tag{89}$$

Ogni qual volta saranno conosciuti i valori dei rapporti tra le quantità $\tau^{\prime}$, $\tau^{\prime\prime}$, $\tau^{\prime\prime\prime}$, queste equazioni saranno atte a somministrarci i valori delle incognite $\delta^{\prime}$, $\delta^{\prime\prime}$, $\delta^{\prime\prime\prime}$.

15.

Moltiplichiamo la prima delle equazioni (84) per $D^{\prime\prime} \, D^{\prime\prime\prime}$, la seconda per $D^{\prime} \, D^{\prime\prime\prime}$ e la terza per $D^{\prime} \, D^{\prime\prime}$, introducendo le eguaglianze date dalle equazioni (76), troveremo le seguenti:

$$\begin{aligned} b_1^{\prime\prime\prime} T^{\prime\prime\prime} \, D^{\prime} - b_2^{\prime\prime\prime} T^{\prime\prime} \, D^{\prime\prime} + b_3^{\prime\prime\prime} T^{\prime} \, D^{\prime\prime\prime} &= 0 \\ b_1^{\prime\prime} \, T^{\prime\prime\prime} \, D^{\prime} - b_2^{\prime\prime} \, T^{\prime\prime} \, D^{\prime\prime} + b_3^{\prime\prime} \, T^{\prime} \, D^{\prime\prime\prime} &= 0 \\ b_1^{\prime} \, T^{\prime\prime\prime} \, D^{\prime} - b_2^{\prime} \, T^{\prime\prime} \, D^{\prime\prime} + b_3^{\prime} \, T^{\prime} \, D^{\prime\prime\prime} &= 0 \end{aligned} \tag{90}$$

Si aggiungano queste equazioni ai secondi membri delle ultime date nel numero precedente, otterremo

$$\begin{aligned} 6 \, \tau^{\prime\prime\prime} \delta^{\prime} &= b_1^{\prime\prime\prime} (T^{\prime\prime\prime} - \tau^{\prime\prime\prime}) \, D^{\prime} - b_2^{\prime\prime\prime} (T^{\prime\prime} - \tau^{\prime\prime}) \, D^{\prime\prime} + b_3^{\prime\prime\prime} (T^{\prime} - \tau^{\prime}) \, D^{\prime\prime\prime} \\ 6 \, \tau^{\prime\prime} \, \delta^{\prime\prime} &= b_1^{\prime\prime} \, (T^{\prime\prime\prime} - \tau^{\prime\prime\prime}) \, D^{\prime} - b_2^{\prime\prime} \, (T^{\prime\prime} - \tau^{\prime\prime}) \, D^{\prime\prime} + b_3^{\prime\prime} \, (T^{\prime} - \tau^{\prime}) \, D^{\prime\prime\prime} \\ 6 \, \tau^{\prime} \, \delta^{\prime\prime\prime} &= b_1^{\prime} \, (T^{\prime\prime\prime} - \tau^{\prime\prime\prime}) \, D^{\prime} - b_2^{\prime} \, (T^{\prime\prime} - \tau^{\prime\prime}) \, D^{\prime\prime} + b_3^{\prime} \, (T^{\prime} - \tau^{\prime}) \, D^{\prime\prime\prime} \end{aligned} \tag{91}$$

16.

Alle equazioni (90) aggiungiamo da una parte e dell'altra rispettivamente i secondi membri di quelle segnate (89), risulterà

$$\begin{aligned} & b_1^{\prime\prime\prime} \, (T^{\prime\prime\prime} - \tau^{\prime\prime\prime}) \, D^{\prime} - b_2^{\prime\prime\prime} \, (T^{\prime\prime} - \tau^{\prime\prime}) \, D^{\prime\prime} + b_3^{\prime\prime\prime} \, (T^{\prime} - \tau^{\prime}) \, D^{\prime\prime\prime} \\ & \quad = - b_1^{\prime\prime\prime} \, \tau^{\prime\prime\prime} \, D^{\prime} + b_2^{\prime\prime\prime} \, \tau^{\prime\prime} \, D^{\prime\prime} - b_3^{\prime\prime\prime} \, \tau^{\prime} \, D^{\prime\prime\prime} \\ & b_1^{\prime\prime} \, (T^{\prime\prime\prime} - \tau^{\prime\prime\prime}) \, D^{\prime} - b_2^{\prime\prime} \, (T^{\prime\prime} - \tau^{\prime\prime}) \, D^{\prime\prime} + b_3^{\prime\prime} \, (T^{\prime} - \tau^{\prime}) \, D^{\prime\prime\prime} \\ & \quad = - b_1^{\prime\prime} \, \tau^{\prime\prime\prime} \, D^{\prime} + b_2^{\prime\prime} \, \tau^{\prime\prime} \, D^{\prime\prime} - b_3^{\prime\prime} \, \tau^{\prime} \, D^{\prime\prime\prime} \\ & b_1^{\prime} \, (T^{\prime\prime\prime} - \tau^{\prime\prime\prime}) \, D^{\prime} - b_2^{\prime} \, (T^{\prime\prime} - \tau^{\prime\prime}) \, D^{\prime\prime} + b_3^{\prime} \, (T^{\prime} - \tau^{\prime}) \, D^{\prime\prime\prime} \\ & \quad = - b_1^{\prime} \, \tau^{\prime\prime\prime} \, D^{\prime} + b_2^{\prime} \, \tau^{\prime\prime} \, D^{\prime\prime} - b_3^{\prime} \, \tau^{\prime} \, D^{\prime\prime\prime} \end{aligned}$$

Eliminiamo dai secondi membri di queste equazioni le quantità $b_1^{\prime\prime\prime}$, $b_2^{\prime\prime}$, $b_3^{\prime}$ per mezzo delle equazioni (90), dedurrassi

$$
\begin{aligned}
&b_1^{\text{III}}(T^{\text{III}}-\tau^{\text{III}})D' - b_2^{\text{III}}(T^{\text{II}}-\tau^{\text{II}})D'' + b_3^{\text{III}}(T^{\text{I}}-\tau^{\text{I}})D''' \\
&\quad = \left\{ b_2^{\text{III}}\left(\frac{\tau^{\text{II}}}{\tau^{\text{III}}} - \frac{T^{\text{II}}}{T^{\text{III}}}\right)D'' - b_3^{\text{III}}\left(\frac{\tau^{\text{I}}}{\tau^{\text{III}}} - \frac{T^{\text{I}}}{T^{\text{III}}}\right)D''' \right\}\tau^{\text{III}} \\
&b_1^{\text{II}}(T^{\text{III}}-\tau^{\text{III}})D' - b_2^{\text{II}}(T^{\text{II}}-\tau^{\text{II}})D'' + b_3^{\text{II}}(T^{\text{I}}-\tau^{\text{I}})D''' \\
(92)\qquad &\quad = -\left\{ b_3^{\text{II}}\left(\frac{\tau^{\text{I}}}{\tau^{\text{II}}} - \frac{T^{\text{I}}}{T^{\text{II}}}\right)D''' + b_1^{\text{II}}\left(\frac{\tau^{\text{III}}}{\tau^{\text{II}}} - \frac{T^{\text{III}}}{T^{\text{II}}}\right)D' \right\}\tau^{\text{II}} \\
&b_1^{\text{I}}(T^{\text{III}}-\tau^{\text{III}})D' - b_2^{\text{I}}(T^{\text{II}}-\tau^{\text{II}})D'' + b_3^{\text{I}}(T^{\text{I}}-\tau^{\text{I}})D''' \\
&\quad = -\left\{ b_1^{\text{I}}\left(\frac{\tau^{\text{III}}}{\tau^{\text{I}}} - \frac{T^{\text{III}}}{T^{\text{I}}}\right)D' - b_2^{\text{I}}\left(\frac{\tau^{\text{II}}}{\tau^{\text{I}}} - \frac{T^{\text{II}}}{T^{\text{I}}}\right)D'' \right\}\tau^{\text{I}}
\end{aligned}
$$

Quindi i secondi membri di queste equazioni potranno tener luogo dei primi nelle equazioni (91).

17.

Le equazioni date ai numeri (12), (14), e (15) sono state ricavate eliminando le ψ dalle equazioni (71) ovvero (75); eliminiamo ora da quest'ultime le quantità δ', δ'', δ''', risulterà

$$
(93)\qquad
\begin{aligned}
b_3^{\text{II}}\{\chi''T^{\text{I}} - \psi''\tau^{\text{I}}\}D''' &= b_2^{\text{I}}\{\chi'''T^{\text{II}} - \psi'''\tau^{\text{II}}\}D'' \\
b_3^{\text{III}}\{\chi'T^{\text{I}} - \psi'\tau^{\text{I}}\}D''' &= b_1^{\text{I}}\{\chi'''T^{\text{III}} - \psi'\tau^{\text{III}}\}D' \\
b_2^{\text{III}}\{\chi'T^{\text{II}} - \psi'\tau^{\text{II}}\}D'' &= b_1^{\text{II}}\{\chi''T^{\text{III}} - \psi'\tau^{\text{III}}\}D'
\end{aligned}
$$

ovvero riducendo tutte in un membro le ψ, e nell'altro le χ

$$
\begin{aligned}
b_2^{\text{I}}\psi'''D''\tau^{\text{II}} - b_3^{\text{II}}\psi''D'''\tau^{\text{I}} &= b_2^{\text{I}}\chi'''D''T^{\text{II}} - b_3^{\text{II}}\chi''D'''T^{\text{I}} \\
b_1^{\text{I}}\psi'''D'\tau^{\text{III}} - b_3^{\text{III}}\psi'D'''\tau^{\text{I}} &= b_1^{\text{I}}\chi'''D'T^{\text{III}} - b_3^{\text{III}}\chi'D'''T^{\text{I}} \\
b_1^{\text{II}}\psi''D'\tau^{\text{III}} - b_2^{\text{III}}\psi'D''\tau^{\text{II}} &= b_1^{\text{II}}\chi''D'T^{\text{III}} - b_2^{\text{III}}\chi'D''T^{\text{II}}
\end{aligned}
$$

Ma le equazioni (85) combinate colle (76) danno

$$
(94)\qquad
\begin{aligned}
b_2^{\text{I}}\chi'''D''T^{\text{II}} - b_3^{\text{II}}\chi''D'''T^{\text{I}} &= b_1^{\text{I}}\chi'''D'T^{\text{III}} - b_3^{\text{III}}\chi'D'''T^{\text{I}} \\
b_1^{\text{I}}\chi'''D'T^{\text{III}} - b_3^{\text{III}}\chi'D'''T^{\text{I}} &= b_1^{\text{II}}\chi''D'T^{\text{III}} - b_2^{\text{III}}\chi'D''T^{\text{II}}
\end{aligned}
$$

si avrà perciò anche

$$
(95)\qquad
\begin{aligned}
b_2^{\text{I}}\psi'''D''\tau^{\text{II}} - b_3^{\text{II}}\psi''D'''\tau^{\text{I}} &= b_1^{\text{I}}\psi'''D'\tau^{\text{III}} - b_3^{\text{III}}\psi'D'''\tau^{\text{I}} \\
b_1^{\text{I}}\psi'''D'\tau^{\text{III}} - b_3^{\text{III}}\psi'D'''\tau^{\text{I}} &= b_1^{\text{II}}\psi''D'\tau^{\text{III}} - b_2^{\text{III}}\psi'D''\tau^{\text{I}}
\end{aligned}
$$

È manifesto che con queste equazioni potremo determinare i rapporti fra le quantità ψ', ψ'', ψ''', ovvero fra le quantità c', c'', c''' che le compongono, quando saremo arrivati a conoscere quelli che esistono fra le quantità τ^{I}, τ^{II}, τ^{III}.

ARTICOLO III.

Equazioni risultanti dalla combinazione delle leggi dell' attrazione coi dati delle osservazioni.

18.

Dopo aver esaminate nel primo articolo le equazioni che risultano dalle leggi dell' universale gravitazione, ed avere nel secondo disposte le equazioni che ci procacciano le osservazioni su di un dato corpo celeste sotto quelle forme che meglio si presteranno alla determinazione delle incognite, dalle quali dipendono gli elementi della sua orbita, ci rimane ora colla combinazione di tutte le premesse equazioni d' intraprendere la ricerca di queste medesime incognite. È però facile il vedere che, trattando il problema con tutta la generalità possibile, la combinazione di queste equazioni ci condurrebbe bensì alla soluzione del medesimo, ma c' implicherebbe in equazioni trascendentali, la soluzione delle quali sormonterebbe le attuali forze dell'Analisi. Per ovviare a tanta difficoltà la strada più naturale, e che per ora è forse indispensabile, pare quella di assumere per condizione che gl'intervalli di tempo fra le osservazioni non comprendano un gran numero di giorni.

Rappresentiamo in fatti con t', t''' i giorni decorsi fra la prima e la seconda, e fra la seconda e terza osservazione, se i numeri espressi da t', t''' non oltrepasseranno i 10 o 15 giorni, moltiplicandoli per la costante $\sqrt{g}$, della quale abbiamo dato il logaritmo al numero 7, produrranno per θ', θ''' due quantità piccole. Considerando perciò le coordinate ξ', v';

ξ''', v''' delle osservazioni estreme come funzioni delle coordinate ξ'', v'' dell'osservazione media, e delle quantità θ', θ''', potremo sviluppare le prime coordinate in serie per le potenze di θ', θ''', e trascurare come insensibili i termini ove queste quantità si troveranno innalzate ad alte potenze. Avremo così, secondo il teorema di Taylor, per le coordinate del corpo celeste

$$\xi' = \xi'' - \left(\frac{d\xi''}{d\theta}\right)\theta' + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\xi''}{d\theta^2}\right)\theta'^2 - \frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3\xi''}{d\theta^3}\right)\theta'^3 + \text{ecc.}$$

$$v' = v'' - \left(\frac{dv''}{d\theta}\right)\theta' + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2v''}{d\theta^2}\right)\theta'^2 - \frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3v''}{d\theta^3}\right)\theta'^3 + \text{ecc.}$$

$$\xi''' = \xi'' + \left(\frac{d\xi''}{d\theta}\right)\theta''' + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\xi''}{d\theta^2}\right)\theta'''^2 + \frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3\xi''}{d\theta^3}\right)\theta'''^3 + \text{ecc.}$$

$$v''' = v'' + \left(\frac{dv''}{d\theta}\right)\theta''' + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2v''}{d\theta^2}\right)\theta'''^2 + \frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3v''}{d\theta^3}\right)\theta'''^3 + \text{ecc.}$$

E parimente per le coordinate della terra

$$x' = x'' - \left(\frac{dx''}{d\theta}\right)\theta' + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2x''}{d\theta^2}\right)\theta'^2 - \frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3x''}{d\theta^3}\right)\theta'^3 + \text{ecc.}$$

$$y' = y'' - \left(\frac{dy''}{d\theta}\right)\theta' + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2y''}{d\theta^2}\right)\theta'^2 - \frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3y''}{d\theta^3}\right)\theta'^3 + \text{ecc.}$$

$$x''' = x'' + \left(\frac{dx''}{d\theta}\right)\theta''' + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2x''}{d\theta^2}\right)\theta'''^2 + \frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3x''}{d\theta^3}\right)\theta'''^3 + \text{ecc.}$$

$$y''' = y'' + \left(\frac{dy''}{d\theta}\right)\theta''' + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2y''}{d\theta^2}\right)\theta'''^2 + \frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3y''}{d\theta^3}\right)\theta'''^3 + \text{ecc.}$$

Compongansi con queste serie i valori dei settori triangolari

$$\xi' v'' - v' \xi'', \quad \xi' v''' - v' \xi''', \quad \xi'' v''' - v'' \xi'''$$
$$x'y'' - y'x'', \quad x'y''' - y'x''', \quad x''y''' - y''x'''$$

Avendo attenzione alle riduzioni che somministrano le equazioni (25), (27), (47), (49), e supponendo

$$\theta'' = \theta' + \theta'''$$

si troverà

$$\xi' v'' - v' \xi'' = \sqrt{p} \,.\, \theta' \left\{1 - \frac{\theta'^2}{6r''^3}\right\}$$

$$\xi' v''' - v' \xi''' = \sqrt{p} \,.\, \theta'' \left\{1 - \frac{\theta''^2}{6r''^3}\right\}$$

$$\xi'' v''' - v'' \xi''' = \sqrt{p} \,.\, \theta''' \left\{1 - \frac{\theta'''^2}{6r''^3}\right\}$$

(96)

$$x'y'' - y'x'' = \sqrt{P} \,.\, \theta' \left\{1 - \frac{\theta'^2}{6R''^3}\right\}$$

$$x'y''' - y'x''' = \sqrt{P} \,.\, \theta'' \left\{1 - \frac{\theta''^2}{6R''^3}\right\}$$

$$x''y''' - y''x''' = \sqrt{P} \,.\, \theta''' \left\{1 - \frac{\theta'''^2}{6R''^3}\right\}$$

Nella seconda e nella quinta però di queste equazioni abbiamo trascurato alcuni termini che sono generalmente della quarta potenza di θ, e nel caso particolare che sia $\theta' = \theta'''$, ascendono sino alla quinta potenza della medesima quantità.

Dalle equazioni (63), (72) si dedurranno per mezzo delle precedenti i seguenti valori delle quantità τ, T

$$\tau^{I} = \theta' \left\{1 - \frac{\theta'^2}{6r''^3}\right\}$$

$$\tau^{II} = \theta'' \left\{1 - \frac{\theta''^2}{6r''^3}\right\}$$

$$\tau^{III} = \theta''' \left\{1 - \frac{\theta'''^2}{6r''^3}\right\}$$

(97)

$$T^{I} = \theta' \left\{1 - \frac{\theta'^2}{6R''^3}\right\}$$

$$T^{II} = \theta'' \left\{1 - \frac{\theta''^2}{6R''^3}\right\}$$

$$T^{III} = \theta''' \left\{1 - \frac{\theta'''^2}{6R''^3}\right\}$$

19.

Cominciamo a sostituire i ritrovati valori delle τ, T nelle equazioni (80), osservando, come è facile il persuadersi, che le quantità b sono tutte dell'ordine della prima potenza delle θ, e trascurando i termini che riescono del quart'ordine, si avrà

$$b_1^{\mathrm{I}}\,\theta''\,\delta''' - b_1^{\mathrm{II}}\,\theta'\,\delta''' = 0$$
$$b_2^{\mathrm{III}}\theta'\,\delta''' - b_2^{\mathrm{I}}\,\theta'''\,\delta' = 0$$
$$b_3^{\mathrm{II}}\,\theta'''\,\delta' - b_3^{\mathrm{III}}\theta''\,\delta'' = 0$$

Allorchè $\theta' = \theta'''$, i termini del quart'ordine che abbiamo trascurato, sostituendo nella seconda di queste equazioni i precedenti valori delle τ, T, e che sono

$$\left\{b_2^{\mathrm{III}}\theta'\,\delta''' - b_2^{\mathrm{I}}\theta'''\,\delta'\right\}\left\{\frac{\theta'''^2 - \theta'^2}{6r''^3}\right\};\ \chi''\,\theta'\theta'''\left(\frac{\theta' - \theta'''^2}{6}\right)\left\{\frac{1}{R'''^3} - \frac{1}{r''^3}\right\}$$

si riducono a zero. Quindi la predetta seconda equazione si troverà esatta sino alla quarta potenza delle θ, e la formola

$$\delta''' = \frac{b_2^{\mathrm{I}}\theta'''}{b_2^{\mathrm{III}}\theta'}\,\delta' \tag{98}$$

darà per δ''' un valore che sarà soltanto soggetto ad errori dell'ordine della terza potenza de' tempi.

Da quest'ultima equazione il valente signor Olbers ha dedotto il principio della sua soluzione. Sia in fatti k la corda che unisce le estremità dei raggi vettori, r', r''', e si sostituiscano nelle seguenti equazioni

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$
$$r'''^2 = x'''^2 + y'''^2 + z'''^2$$
$$k^2 = (x' - x''')^2 + (y' - y''')^2 + (z' - z''')^2$$

per x', y', z'; x'', ecc. i loro valori che si deducono dalle equazioni (66), (69), adottando per brevità le seguenti denominazioni:

$$\mu'^2 + \nu'^2 + \omega'^2 = \varkappa' \qquad m'^2 + n'^2 + o'^2 = \varkappa$$
$$\mu'''^2 + \nu'''^2 + \omega'''^2 = \varkappa''' \qquad m'''^2 + n'''^2 + o'''^2 = \varkappa_3$$
$$\mu'\mu''' + \nu'\nu''' + \omega'\omega''' = \varkappa_1''' \qquad m'm''' + n'n''' + o'o''' = \varkappa_3^{\mathrm{I}}$$
$$\mu'm' + \nu'n' + \omega'o' = \varkappa_1' \qquad \mu'''m''' + \nu'''n''' + \omega'''o''' = \varkappa_3'''$$
$$\mu'''m' + \nu'''n' + \omega'''o' = \varkappa_1''' \qquad \mu'm''' + \nu'n''' + \omega'o''' = \varkappa_3'$$

si troverà

$$r'^2 = \varkappa' D'^2 + 2\varkappa_1' D'\delta' + \varkappa_1\delta'^2$$
$$r'''^2 = \varkappa''' D'''^2 + 2\varkappa_3''' D'''\delta''' + \varkappa_3\delta'''^2$$
$$k^2 = r'^2 + r'''^2 - 2\varkappa_1''' D'D''' - 2\varkappa_1''' D'''\delta' - 2\varkappa_3' D'\delta''' - 2\varkappa_3^{\mathrm{I}}\delta'\delta'''$$

Poniamo in queste equazioni per δ''' il suo valore dato dall'equazione (98), facendo

$$\frac{\theta'''\,.\,b_2^{\mathrm{I}}}{\theta'\,.\,b_2^{\mathrm{III}}} = M$$

risulterà

$$r'''^2 = \varkappa''' D'''^2 + 2\varkappa_3''' M D'''\delta' + \varkappa_3 M^2\delta'^2$$
$$k^2 = r'^2 + r'''^2 - 2\varkappa_1''' D'D''' - 2\varkappa_1''' D'''\delta' - 2\varkappa_3' M D'\delta' - 2\varkappa_3^{\mathrm{I}} M\delta'^2$$

onde le tre quantità r', r''', k si troveranno tutte espresse per δ' e per quantità cognite. Olbers suggerisce ora di far un'ipotesi sul valore di δ', e di sostituire i risultanti valori di r', r''', k nella formola Euleriana o di Lambert

$$\theta'' = \frac{\sqrt{2}}{3}\left\{\left(\frac{r' + r''' + k}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{r' + r''' - k}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}$$

la quale, se sarà soddisfatta, indicherà che il supposto valore di δ' è il giusto, altrimenti dopo alcuni tentativi si giungerà a determinare il vero valore di δ'. Ritrovato il valore di δ', l'equazione (98) ci dà subito quello di δ''', e conosciute le quantità δ', δ''', r', r''', si determinano facilmente tutti gli elementi dell'orbita.

Le formole che abbiamo ritrovato pei valori di δ', δ''', r', r''', k hanno il pregio di sussistere, qualunque siano i piani coordinati. Ag-

giungeremo però le espressioni particolari di quelle formole, allorchè si suppone che il piano delle xy coincida con quello dell'eclittica, e che l'asse delle x passi pel punto o dell'Ariete. In tal caso le quantità Λ, λ delle equazioni (3) rappresèenteranno la longitudine e latitudine geocentrica del corpo celeste, e potremo fare

$$m = \cos \Lambda \qquad n = \sin \Lambda \qquad o = \tan \lambda$$

ed indicando con L la longitudine della terra, nelle equazioni (69) potremo supporre

$$\mu = \cos L \qquad \nu = \sin \Lambda \qquad \omega = 0$$

onde le quantità x ed M superiormente date riceveranno questi semplici valori

$$\begin{aligned}
\varkappa' &= 1 & \varkappa_1 &= \tan^2 \lambda' \\
\varkappa''' &= 1 & \varkappa_3 &= \tan^2 \lambda''' \\
\varkappa_{,}''' &= \cos (L''' - L') & \varkappa_3^1 &= \cos (\Lambda''' - \Lambda') + \tan \lambda' \tan \lambda''' \\
\varkappa_1' &= \cos (L' - \Lambda') & \varkappa_3''' &= \cos (L''' - \Lambda''') \\
\varkappa_1''' &= \cos (L''' - \Lambda') & \varkappa_3' &= \cos (L''' - \Lambda')
\end{aligned}$$

$$M = \frac{\theta''' \tan \lambda'' \sin (L'' - \Lambda') - \tan \lambda' \sin (L'' - \Lambda'')}{\theta' \tan \lambda''' \sin (L'' - \Lambda'') - \tan \lambda'' \sin (L'' - \Lambda''')}$$

La formola surriferita d'Eulero sussiste soltanto per le orbite paraboliche, perciò questo metodo è soltanto applicabile alla determinazione delle orbite delle comete.

20.

Passiamo ora alle equazioni (89) del numero 14; queste equazioni si potranno mettere sotto la forma seguente:

$$(99) \qquad \begin{aligned}
6\,\delta' &= -b_1^{\prime\prime\prime} D' + \frac{b_2^{\prime\prime\prime} \tau^{\prime\prime} D'' - b_3^{\prime\prime\prime} \tau^{\prime} D'''}{\tau^{\prime\prime} - \tau^{\prime}} \cdot \frac{\tau^{\prime\prime} - \tau^{\prime}}{\tau^{\prime\prime\prime}} \\
6\,\delta'' &= b_2^{\prime\prime} D'' - \frac{b_3^{\prime\prime} \tau^{\prime} D''' + b_1^{\prime\prime} \tau^{\prime\prime\prime} D'}{\tau^{\prime} + \tau^{\prime\prime\prime}} \cdot \frac{\tau^{\prime} + \tau^{\prime\prime\prime}}{\tau^{\prime\prime}} \\
6\,\delta''' &= -b_3^{\prime} D''' + \frac{b_1^{\prime} \tau^{\prime\prime\prime} D' - b_2^{\prime} \tau^{\prime\prime} D''}{\tau^{\prime\prime\prime} - \tau^{\prime\prime}} \cdot \frac{\tau^{\prime\prime} - \tau^{\prime\prime\prime}}{\tau^{\prime}}
\end{aligned}$$

Se si osservi che le quantità

$$b_2^{\prime\prime\prime} D'' - b_3^{\prime\prime\prime} D''', \qquad b_3^{\prime\prime} D''' + b_1^{\prime\prime} D', \qquad b_1^{\prime} D' - b_2^{\prime} D''$$

sono in grandezza dell'ordine della seconda potenza di θ, si vedrà che, facendo nella prima parte degli ultimi termini delle su riferite equazioni (99) $\tau' = \theta'$, $\tau'' = \theta''$ e $\tau''' = \theta'''$, e prendendo le differenze tra le espressioni che risultano per queste supposizioni dei valori di τ, e tra quelle che si trovano, ponendo per le τ i valori (97), non si verranno a trascurare che delle quantità dell'ordine delle quarte potenze di θ. Sostituendo poi anche nei secondi fattori dei detti ultimi termini per le τ i valori stessi (97), e sviluppando i denominatori in serie, coll'ommettere le quarte potenze di θ, le precedenti equazioni potranno ridursi a queste

$$(100) \qquad \begin{aligned}
6\,\delta' &= -b_1^{\prime\prime\prime} D' + \frac{b_2^{\prime\prime\prime} D'' \theta'' - b_3^{\prime\prime\prime} D''' \theta'}{\theta'' - \theta'} \left\{ 1 - \frac{\theta' \theta''}{2 r''^3} \right\} \\
6\,\delta'' &= b_2^{\prime\prime} D'' - \frac{b_3^{\prime\prime} D''' \theta' + b_1^{\prime\prime} D' \theta'''}{\theta' + \theta'''} \left\{ 1 + \frac{\theta' \theta'''}{2 r''^3} \right\} \\
6\,\delta''' &= -b_3^{\prime} D''' + \frac{b_1^{\prime} D' \theta''' - b_2^{\prime} D'' \theta''}{\theta''' - \theta''} \left\{ 1 - \frac{\theta'' \theta'''}{2 r''^3} \right\}
\end{aligned}$$

Siccome in queste equazioni la quantità 6 è dell'ordine della terza potenza di θ, come si potrà verificare considerando nella sua espressione (86) le quantità m', m'''; n', n''', ecc. funzioni di m'', n'', ecc., θ', θ''', e sostituendo i loro valori in serie date dal teorema di Taylor; così le medesime saranno atte a dare i valori delle δ', δ'', δ''', ma affetti da errori della prima potenza di θ; e la (100), quando θ' sia eguale a θ''', darà

per δ'' un valore il quale non conterrà che degli errori della seconda potenza della stessa θ.

Di questa equazione (100) si è perciò servito il celebre signor Gauss per ricavare il suo metodo di determinare una nuova orbita. Basterebbe in fatti nell'equazione

$$r''^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2$$

appartenente al secondo raggio vettore mettere i valori di x'', y'', z'' che si hanno dalle formole (66), (69), ciò che dà, facendo

$$\mu''^2 + \nu''^2 + \omega''^2 = \varkappa'', \quad \mu''m'' + \nu''n'' + \omega''o'' = \varkappa_2'', \quad m''^2 + n''^2 + o''^2 = \varkappa_2$$

(101) $$r''^2 = \varkappa'' D''^2 + 2\varkappa_2'' D'' \delta'' + \varkappa_2 \delta''^2$$

e poi combinare quest'equazione colla (100), e dedurre dalle medesime il valore di δ'' eliminando r''. Questo processo conduce ad un'equazione di ottavo grado; ma il signor Gauss ne rende oltre modo semplice la risoluzione introducendo per incognita l'angolo fatto alla cometa dalle due rette che vanno alla terra ed al sole. Siccome questa trasformazione può eseguirsi analiticamente con un breve processo di calcolo, ne accennerò il modo.

E per conformarmi di più al metodo del suddetto autore premetterò che, se si suppone

(102) $$\frac{\tau'''}{\tau'} = P \qquad (103) \qquad 2\left(\frac{\tau' + \tau'''}{\tau''} - 1\right) r'' = Q$$

l'equazione (99) può ridursi alla forma

$$6\,\delta'' = b_2'' D'' - \frac{b_3'' D''' + b_1'' D' P}{1 + P}\left\{1 + \frac{Q}{2r''^3}\right\}$$

onde, se si confronti quest'equazione con quella (100), si vedrà che la presente è prossimamente soddisfatta facendo

(104) $$P = \frac{\theta'''}{\theta'} \qquad Q = \theta'\,\theta'''$$

Poniamo ora

$$\frac{b_3'' D'''}{b_1'' D'} = \alpha \qquad \frac{b_2'' D''}{b_1'' D'} = \beta \qquad \frac{6}{b_2'' D''} = \gamma$$

la stessa equazione (99) ovvero (89) potrà scriversi così

(105) $$\alpha\,\tau' + \beta\,\tau''(\gamma\,\delta'' - 1) + \tau''' = 0$$

S'immagini il triangolo rettilineo formato dal raggio vettore del corpo celeste, da quello della terra e dalla retta che unisce questi due corpi. Indicando con r'', R'', Δ'' i detti lati, e con ϑ, z, $180 - \vartheta - z$ gli angoli opposti, avremo, come è noto,

(106) $$\frac{\sin\vartheta}{r''} = \frac{\sin z}{R''} = \frac{\sin(\vartheta + z)}{\Delta''}$$

L'arco ϑ è quello che misura sulla sfera la distanza dal corpo celeste al sole visti dalla terra, e si ha, supponendo che L indichi l'angolo che il raggio R'' fa col piano xy, ed l l'angolo che la projezione di R'' fa coll'asse delle x,

$$\cos\vartheta = \cos l'' \cos\lambda'' \cos(L'' - \Lambda'') + \sin l'' \sin\lambda''$$

Determinando ϑ per mezzo di quest'equazione, nelle precedenti non resteranno incognite che le quantità r'', z'', Δ''.

Se nelle equazioni (7), (65) si fa

$$m'' = \cos\Lambda'' \qquad n'' = \sin\Lambda'' \qquad o'' = \tan\lambda''$$

si ha

$$\delta'' = \Delta''\cos\lambda''$$

Sostituendo questo valore di δ'' nell'equazione (105), e per Δ'' quello, che si ottiene dalle equazioni (106), si troverà

$$\alpha\,\tau' + \beta\,\tau''\left(\gamma\,R''\cos\lambda''\,\frac{\sin(\vartheta + z)}{\sin z} - 1\right) + \tau''' = 0$$

Suppongasi

$$\frac{\gamma R'' \cos \lambda'' \sin \vartheta}{1 - \gamma R'' \cos \lambda'' \cos \vartheta} = \tan \sigma$$

$$\frac{\beta(1 - \gamma R'' \cos \lambda'' \cos \vartheta)}{\cos \sigma} = \varepsilon$$

si ricaverà

$$\alpha \tau' - \varepsilon \tau'' \frac{\sin (z - \sigma)}{\sin z} + \tau''' = 0$$

Mettiamo per $\frac{\tau'''}{\tau'}$ il valore dato dall' equazione (102); alla precedente potremo dare la forma

$$\tau' + \tau''' \frac{P + \alpha}{P + 1} = \varepsilon \tau'' \frac{\sin (z - \sigma)}{\sin z}$$

Da quest'equazione, da quella segnata (103) e dalle equazioni (106) si ricaverà

$$\sin z + \frac{Q \sin^4 z}{2 R''^3 \sin^3 \vartheta} = \varepsilon \frac{P + 1}{P + \alpha} \sin (z - \sigma)$$

ovvero

$$\frac{Q \sin^4 z}{2 R''^3 \sin^3 \vartheta} = \left(\varepsilon \frac{P + 1}{P + \alpha} - \cos \sigma\right) \sin (z - \sigma) - \sin \sigma \cos (z - \sigma)$$

Introducendo un angolo ausiliario ω tale che sia

(107) $$\tan \omega = \frac{\sin \sigma}{\varepsilon \frac{P + 1}{P + \alpha} - \cos \sigma}$$

e facendo per semplicità

$$\frac{1}{2 R''^3 \sin^3 \vartheta \sin \sigma} = c$$

si otterrà l'equazione

$$c\, Q \sin \omega \sin^4 z = \sin (z - \omega - \sigma)$$

In quest'equazione tanto la quantità Q quanto la ω, che è funzione di P, sono ancora incognite, ma si potrà da principio valutarle con una sufficiente approssimazione per mezzo delle equazioni (104), (107). Allora non rimarrà più incognito che l' angolo z, che potremo determinare molto facilmente colle false posizioni. Si può vedere nella eccellente opera *Theoria motus corporum cœlestium* ecc. questa soluzione applicata ad alcuni esempj sui nuovi pianeti, ove si troverà l'ultima riferita equazione dedotta con molta sagacità per mezzo di considerazioni sintetiche.

21.

Si progredisca a sostituire i valori delle τ e T nelle equazioni (91), e troveremo la soluzione del problema che trattiamo data dall' insigne Lagrange. In fatti, supponendo

$$\theta''' = \sigma \theta', \qquad \theta'' = \sigma_1 \theta'$$

e perciò

$$\sigma_1 = 1 + \sigma$$

facendo di più per brevità

(108)
$$\begin{aligned} Q''' \sigma &= b_1''' D' \sigma^3 - b_2''' D'' \sigma_1^3 + b_3''' D''' \\ Q'' \sigma_1 &= b_1'' D' \sigma^3 - b_2'' D'' \sigma_1^3 + b_3'' D''' \\ Q' &= b_1' D' \sigma^3 - b_2' D'' \sigma_1^3 + b_3' D''' \end{aligned}$$

arriveremo per mezzo della detta sostituzione alle seguenti:

(109)
$$\begin{aligned} \delta' &= \frac{Q''' \theta'^2}{6\,6} \left\{\frac{1}{r''^3} - \frac{1}{R''^3}\right\} \\ \delta'' &= \frac{Q'' \theta'^2}{6\,6} \left\{\frac{1}{r''^3} - \frac{1}{R''^3}\right\} \\ \delta''' &= \frac{Q' \theta'^2}{6\,6} \left\{\frac{1}{r''^3} - \frac{1}{R''^3}\right\} \end{aligned}$$

nelle quali equazioni, a motivo che la quantità 6 è dell'ordine delle terze potenze delle θ, abbiamo trascurato i termini ove la medesima era moltiplicata per θ'^3.

Eliminando colla seconda di queste equazioni la δ'' da quella segnata (101) nel numero precedente, e rappresentando con h la quantità $\frac{Q''\theta'^2}{6\,6}$, avremo

$$R''^6\, r''^6\,(r''^2 - R''^2) + 2\varkappa_2''\, h\, R''^4\, r''^3\,(r''^3 - R''^3) - \varkappa_2\, h^2\,(r''^3 - R''^3)^2 = 0$$

nella quale abbiamo fatto come è permesso $\varkappa'' = 1$, e perciò $D'' = R''$. [1]

Quest'equazione è visibilmente divisibile per $r'' - R''$, e dà per quoto

$$R''^6\, r''^6\,(r'' + R'') + 2\varkappa_2'',\, h\, R''^4\, r''^3\,(r''^2 + r''\,R'' + R''^2)$$
$$- \varkappa_2\, h^2\,(r''^2 + r''\,R'' + R''^2)^2 = 0$$

Avremo così per determinare r'' un'equazione di settimo grado, la quale avendo l'ultimo termine negativo, sarà perciò sempre atta a darci un valore di r'' reale e positivo come ci occorre. Ritrovato per mezzo di quest'equazione il valore di r'', le equazioni (108) ci daranno quelli di δ', δ'', δ''', e colla cognizione di queste quantità si può passare a quella di tutti gli elementi. Questo metodo di determinare una nuova orbita fu ultimamente dal signor Lagrange inserito nella nuova edizione della sua *Mécanique analytique*, e corredato di belle ed utili osservazioni.

22.

Per dare alle equazioni (109) una forma più regolare, supponiamo

$$(110)\qquad \alpha_3^1 = \frac{6\,D'''}{Q^1}, \quad \alpha_2^{11} = \frac{6\,D''\,\sigma_1^2}{Q^{11}}, \quad \alpha_1^{111} = \frac{6\,D'\,\sigma^2}{Q^{111}}$$

[1] Vedi le equazioni (127).

le dette equazioni diverranno

$$(111)\qquad \begin{aligned} \alpha_1^{111}\,\delta' &= \frac{\theta'''^2}{6}\left\{\frac{1}{r'''^3} - \frac{1}{R'''^3}\right\} D' \\ \alpha_2^{11}\,\delta'' &= \frac{\theta''^2}{6}\left\{\frac{1}{r''^3} - \frac{1}{R''^3}\right\} D'' \\ \alpha_3^1\,\delta''' &= \frac{\theta'^2}{6}\left\{\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{R'^3}\right\} D''' \end{aligned}$$

Il calcolo delle quantità Q^{111}, Q^{11}, Q^1 può rendersi più breve col mezzo delle equazioni (92). Sostituiamo in fatti i valori delle r e T in quelle equazioni, e sviluppiamo i denominatori in serie senza oltrepassare le terze potenze delle θ; per mezzo di ovvie riduzioni si troverà che posto

$$\frac{\sigma_1}{\sigma} = \rho, \quad \frac{\sigma}{\sigma_1} = \rho_1, \quad \frac{\sigma\sigma_1}{1} = \rho_2$$

si ha

$$(112)\qquad \begin{aligned} Q^{111} &= -\rho\,\{b_2^{111}\,(2\sigma+1)\,D'' + b_3^{111}\,(\sigma - 1)\,D'''\} \\ Q^{11} &= -\rho_1\{b_3^{11}\,(\sigma + 2)\,D''' + b_1^{11}\,(1 + 2\sigma)\,D'\} \\ Q^1 &= -\rho_2\{b_1^1\,(1 - \sigma)\,D' + b_2^1\,(2 + \sigma)\,D''\} \end{aligned}$$

così questi valori delle Q non dipenderanno più che dal calcolo di due sole delle quantità b, mentre sotto la loro primitiva forma (108) bisognava calcolarne tre.

Se si fa

$$(113)\qquad \begin{aligned} -\{b_2^{111}\,(2\sigma+1)\,D'' + b_3^{111}\,(\sigma - 1)\,D'''\} &= \sigma^2\,\gamma^{111} \\ -\{b_3^{11}\,(\sigma + 2)\,D''' + b_1^{11}\,(1+2\sigma)\,D'\} &= \sigma_1^2\,\gamma^{11} \\ -\{b_1^1\,(1 + \sigma)\,D' + b_2^1\,(2 + \sigma)\,D''\} &= \gamma^1 \end{aligned}$$

è facile il vedere che le quantità α_3^1, α_2^{11}, α_1^{111} date dalle equazioni (110) saranno della forma seguente:

$$(114)\qquad \alpha_3^1 = \frac{6\,D'''}{\rho_2\,\gamma^1}, \quad \alpha_2^{11} = \frac{6\,D''}{\rho_1\,\gamma^{11}}, \quad \alpha_1^{111} = \frac{6\,D'}{\rho\,\gamma^{111}}.$$

ARTICOLO IV.

Nuova soluzione del problema.

23.

Le equazioni (80), (89), (91), che nel passato articolo abbiamo combinate con quelle provenienti dalle leggi dell'universale attrazione, furono già per altra strada ritrovate da varj insigni geometri, e somministrarono, siccome fu esposto, alcune delle più belle ed utili soluzioni del problema di determinare una nuova orbita. Partendo dalle equazioni fondamentali (71), (75), siamo arrivati alle nominate equazioni coll'eliminazione delle ψ', ψ'', ψ''', ma abbiamo in seguito dedotte le equazioni (93) eliminando dalle stesse (75) le quantità δ', δ'', δ'''. Di queste nuove equazioni (93) ci rimane perciò ora a trattare, e vedremo che la combinazione di esse colle equazioni che somministrano le leggi dell'universale attrazione darà origine ad una nuova soluzione del problema, che costituirà la parte precipua di questa memoria.

Riassunte perciò le equazioni (93) diamo ad esse la seguente forma:

$$
\begin{aligned}
& b_3^{\mathrm{II}} D'''\left\{\chi''-\psi''+\psi''\left(1-\frac{\tau^{\mathrm{I}}}{T^{\mathrm{I}}}\right)\right\}T^{\mathrm{I}} = b_2^{\mathrm{I}} D''\left\{\chi'''-\psi'''+\psi'''\left(1-\frac{\tau^{\mathrm{II}}}{T^{\mathrm{II}}}\right)\right\}T^{\mathrm{II}} \\
(115)\quad & b_3^{\mathrm{III}} D'''\left\{\chi'-\psi'+\psi'\left(1-\frac{\tau^{\mathrm{I}}}{T^{\mathrm{I}}}\right)\right\}T^{\mathrm{I}} = b_1^{\mathrm{I}} D'\left\{\chi'''-\psi'''+\psi'''\left(1-\frac{\tau^{\mathrm{III}}}{T^{\mathrm{III}}}\right)\right\}T^{\mathrm{III}} \\
& b_2^{\mathrm{III}} D''\left\{\chi'-\psi'+\psi'\left(1-\frac{\tau^{\mathrm{II}}}{T^{\mathrm{II}}}\right)\right\}T^{\mathrm{II}} = b_1^{\mathrm{II}} D'\left\{\chi''-\psi''+\psi''\left(1-\frac{\tau^{\mathrm{III}}}{T^{\mathrm{III}}}\right)\right\}T^{\mathrm{III}}
\end{aligned}
$$

Per l'uso che faremo nel seguito di queste equazioni ci conviene premettere le seguenti considerazioni.

24.

Poniamo nelle equazioni (66) per X, Y, Z i loro valori dati dalle equazioni (69), avremo per x, y, z le espressioni seguenti:

$$
(116)\qquad \begin{aligned} x &= m\delta + \mu D \\ y &= n\delta + \nu D \\ z &= o\delta + \omega D \end{aligned}
$$

Sostituiamo ora nell'equazione (15) del piano del corpo celeste per x, y, z questi valori, risulterà

$$
(117)\qquad \{oc' - nc'' + mc'''\}\,\delta = -\{\omega c' - \nu c'' + \mu c'''\}\,D
$$

Ma ponendo per X, Y, Z le loro espressioni date dalle formole (69) nell'equazione segnata (42) del piano dell'eclittica, si ha

$$
\omega C' - \nu C'' + \mu C''' = 0
$$

dunque facendo

$$
(118)\qquad \omega\,(C' - c') - \nu\,(C'' - c'') + \mu\,(C''' - c''') = \varphi
$$

la precedente equazione (117) potrà ridursi alla forma

$$
(119)\qquad \psi\,\delta = \varphi\,D
$$

25.

Riprendiamo le equazioni (115), e supponiamo

$$
(120)\qquad
\begin{aligned}
&\left(1-\frac{\tau^{\mathrm{I}}}{T^{\mathrm{I}}}\right)\frac{D''}{\delta''} = \alpha_2^{\mathrm{I}} && \left(1-\frac{\tau^{\mathrm{II}}}{T^{\mathrm{II}}}\right)\frac{D'''}{\delta'''} = \alpha_3^{\mathrm{II}} \\
&\left(1-\frac{\tau^{\mathrm{I}}}{T^{\mathrm{I}}}\right)\frac{D'}{\delta'} = \alpha_1^{\mathrm{I}} && \left(1-\frac{\tau^{\mathrm{III}}}{T^{\mathrm{III}}}\right)\frac{D'''}{\delta'''} = \alpha_3^{\mathrm{III}} \\
&\left(1-\frac{\tau^{\mathrm{II}}}{T^{\mathrm{II}}}\right)\frac{D'}{\delta'} = \alpha_1^{\mathrm{II}} && \left(1-\frac{\tau^{\mathrm{III}}}{T^{\mathrm{III}}}\right)\frac{D''}{\delta''} = \alpha_2^{\mathrm{III}}
\end{aligned}
$$

facendo in generale

$$
(121)\qquad \chi - \psi = \Phi
$$

ed avendo riguardo alle equazioni (120), le (115) potranno trasformarsi in queste

$$
(122)\qquad
\begin{aligned}
b_3^{11}\, D''' (\Phi'' + \alpha_2^1 \varphi'')\, T^1 &= b_2^1\, D'' (\Phi''' + \alpha_3^{11} \varphi''')\, T^{11} \\
b_3^{111}\, D''' (\Phi' + \alpha_1^1 \varphi')\, T^1 &= b_1^1\, D' (\Phi''' + \alpha_3^{111} \varphi''')\, T^{111} \\
b_2^{111}\, D'' (\Phi' + \alpha_1^{11} \varphi')\, T^{11} &= b_2^{11} D' (\Phi'' + \alpha_1^{111} \varphi'')\, T^{111}
\end{aligned}
$$

nelle quali, come è evidente, le quantità α sono ancora incognite.

Per determinarle sostituiamo nelle espressioni (120) in vece delle τ e T, i loro valori dati al numero 18, e sviluppiamo i denominatori in serie senza oltrepassare le terze potenze delle θ, si avrà

$$
(123)\qquad
\begin{aligned}
\alpha_2^1 &= \frac{\theta'^2}{6}\left\{\frac{1}{r''^3} - \frac{1}{R'^3}\right\}\frac{D''}{\delta''} & \alpha_3^{11} &= \frac{\theta''^2}{6}\left\{\frac{1}{r''^3} - \frac{1}{R''^3}\right\}\frac{D'''}{\delta'''} \\
\alpha_1^1 &= \frac{\theta'^2}{6}\left\{\frac{1}{r''^3} - \frac{1}{R''^3}\right\}\frac{D'}{\delta'} & \alpha_3^{111} &= \frac{\theta'''^2}{6}\left\{\frac{1}{r''^3} - \frac{1}{R''^3}\right\}\frac{D'''}{\delta'''} \\
\alpha_1^{11} &= \frac{\theta''^2}{6}\left\{\frac{1}{r''^3} - \frac{1}{R''^3}\right\}\frac{D'}{\delta'} & \alpha_2^{111} &= \frac{\theta'''^2}{6}\left\{\frac{1}{r''^3} - \frac{1}{R''^3}\right\}\frac{D''}{\delta''}
\end{aligned}
$$

Combinando queste equazioni con quelle (109) del numero 21, si troverà

$$
(124)\qquad
\begin{aligned}
\alpha_2^1 &= \frac{6}{Q^{11}} D'' & \alpha_1^{11} &= \frac{6\sigma_1^2}{Q^{111}} D' & \alpha_3^{111} &= \frac{6\sigma^2}{Q^1} D''' \\
\alpha_1^1 &= \frac{6}{Q^{111}} D' & \alpha_3^{11} &= \frac{6\sigma_1^2}{Q^1} D''' & \alpha_2^{111} &= \frac{6\sigma^2}{Q^{11}} D''
\end{aligned}
$$

ovvero, introducendo le γ colle formole (112), (113),

$$
(124)\qquad
\begin{aligned}
\alpha_2^1 &= \frac{6\, D''}{\rho_2 \gamma^{11}} & \alpha_1^{11} &= \frac{6\, D'}{\rho_1 \gamma^{111}} & \alpha_3^{111} &= \frac{6\, D'''}{\rho \gamma^2} \\
\alpha_1^1 &= \frac{6 D'}{\rho_2 \gamma^{111}} & \alpha_3^{11} &= \frac{6\, D'''}{\rho_1 \gamma^1} & \alpha_2^{111} &= \frac{6 D''}{\rho \gamma^{11}}
\end{aligned}
$$

Siccome i secondi membri di queste equazioni sono tutti composti di quantità cognite, si conosceranno perciò entro l'ordine delle seconde potenze delle θ tutt'i valori delle quantità a.

26.

Suppongasi

$$
(125)\qquad
\begin{aligned}
b_1^1\, D'\, D'' &= a_1^1\, T^1 \sqrt{P} & b_2^1\, D'\, D'' &= a_2^1\, T^1 \sqrt{P} \\
b_1^{11}\, D'\, D''' &= a_1^{11}\, T^{11} \sqrt{P} & b_3^{11}\, D'\, D''' &= a_3^{11}\, T^{11} \sqrt{P} \\
b_2^{111} D''\, D''' &= a_2^{111} T^{111} \sqrt{P} & b_3^{111} D''\, D''' &= a_3^{111} T^{111} \sqrt{P}
\end{aligned}
$$

Denominando L l'angolo che il raggio vettore R fa coll'asse delle x nel piano dell'eclittica, sarà in generale

$$
x = R \cos L \qquad y = R \sin L
$$

onde sostituendo questi valori di x, y nelle equazioni (72), avremo

$$
(126)\qquad
\begin{aligned}
T^1 \sqrt{P} &= R'\, R'' \sin (L'' - L') \\
T^{11} \sqrt{P} &= R'\, R''' \sin (L''' - L') \\
T^{111} \sqrt{P} &= R''\, R''' \sin (L''' - L'')
\end{aligned}
$$

Se ritengansi le lettere $\varkappa'$, $\varkappa''$, $\varkappa'''$ nel significato dato ai numeri 19, 20, e sostituiscansi nell'equazione

$$
R = \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}
$$

i valori di X, Y, Z ricavati dalle equazioni (69), colla opportuna sovrapposizione d'apici si avrà

$$
(127)\qquad R' = D' \sqrt{\varkappa'} \qquad R'' = D'' \sqrt{\varkappa''} \qquad R''' = D''' \sqrt{\varkappa'''}
$$

Col mezzo perciò di tutte queste equazioni le precedenti (125) daranno

$$
(128)\qquad
\begin{aligned}
a_1^1 &= b_1^1 : \sin (L'' - L') \sqrt{(\varkappa' \varkappa'')}, & a_2^1 &= b_2^1 : \sin (L'' - L') \sqrt{(\varkappa' \varkappa'')} \\
a_1^{11} &= b_1^{11} : \sin (L''' - L') \sqrt{(\varkappa' \varkappa''')}, & a_3^{11} &= b_3^{11} : \sin (L''' - L') \sqrt{(\varkappa' \varkappa''')} \\
a_2^{111} &= b_2^{111} : \sin (L''' - L'') \sqrt{(\varkappa'' \varkappa''')}, & a_3^{111} &= b_3^{111} : \sin (L''' - L'') \sqrt{(\varkappa'' \varkappa''')}
\end{aligned}
$$

Se supporremo che le quantità μ, ν, ω rappresentino i coseni che il raggio R fa cogli assi delle x, y, z, sarà come è noto $\varkappa' = \varkappa'' = \varkappa''' = 1$.

Ciò posto, moltiplichiamo la prima delle equazioni (122) per D', la seconda per D'' e la terza per D''', facendo uso delle eguaglianze (125), si troverà che le stesse equazioni (122) si possono mettere sotto la seguente forma:

$$
(129)\qquad
\begin{aligned}
a_3^{11}\,(\Phi'' + \alpha_2^1\,\varphi'') &= a_2^1\,(\Phi''' + \alpha_3^{11}\,\varphi''')\\
a_3^{111}\,(\Phi' + \alpha_1^1\,\varphi') &= a_1^1\,(\Phi''' + \alpha_3^{111}\,\varphi''')\\
a_2^{111}\,(\Phi' + \alpha_1^{11}\,\varphi') &= a_1^{11}\,(\Phi'' + \alpha_2^{111}\,\varphi'')
\end{aligned}
$$

27.

Immaginiamo sostituiti nelle precedenti equazioni per le quantità α i valori dati dalle formole (124); in esse non rimarranno altre incognite che le quantità Φ', Φ'', Φ''', φ', φ'', φ''', le quali sono tutte funzioni lineari delle differenze $C' - c'$, $C'' - c''$, $C''' - c'''$. Si pongano perciò in vece delle Φ e φ i loro valori quali sono dati dalle equazioni (121), (74), (67), (118), adottando per brevità tutte le seguenti denominazioni:

$$
\begin{aligned}
o'' + \alpha_2^1\omega'' &= d & a_2^1\,(o''' + \alpha_3^{11}\,\omega''') &= a_3^{11}\,d_1\\
n'' + \alpha_2^1\nu'' &= f & a_2^1\,(n''' + \alpha_3^{11}\,\nu''') &= a_3^{11}\,f_1\\
m'' + \alpha_2^1\mu'' &= g & a_2^1\,(m''' + \alpha_3^{11}\,\mu''') &= a_3^{11}\,g_1\\
o' + \alpha_1^1\omega' &= d' & a_1^1\,(o''' + \alpha_3^{111}\,\omega''') &= a_3^{111}\,d_1'\\
n' + \alpha_1^1\nu' &= f' & a_1^1\,(n''' + \alpha_3^{111}\,\nu''') &= a_3^{111}\,f_1'\\
m' + \alpha_1^1\mu' &= g' & a_1^1\,(m''' + \alpha_3^{111}\,\mu''') &= a_3^{111}\,g_1'\\
o' + \alpha_1^{11}\omega' &= d'' & a_1^{11}\,(o'' + \alpha_2^{111}\,\omega'') &= a_2^{111}\,d_1''\\
n' + \alpha_1^{11}\nu' &= f'' & a_1^{11}\,(n'' + \alpha_2^{111}\,\nu'') &= a_2^{111}\,f_1''\\
m' + \alpha_1^{11}\mu' &= g'' & a_1^{11}\,(m'' + \alpha_2^{111}\,\mu'') &= a_2^{111}\,g_1''\\
\frac{f - f_1}{d - d_1} &= h & \frac{g - g_1}{d - d_1} &= k\\
\frac{f' - f_1'}{d' - d_1'} &= h' & \frac{g' - g_1'}{d' - d_1'} &= k'\\
\frac{f'' - f_1''}{d'' - d_1''} &= h'' & \frac{g'' - g_1''}{d'' - d_1''} &= k''
\end{aligned}
$$

risulteranno queste tre equazioni

$$
(130)\qquad
\begin{aligned}
C' - c' - h\,(C'' - c'') + k\,(C''' - c''') &= 0\\
C' - c' - h'\,(C'' - c'') + k'\,(C''' - c''') &= 0\\
C' - c' - h''\,(C'' - c'') + k''\,(C''' - c''') &= 0
\end{aligned}
$$

28.

Pare a primo aspetto che, risolvendo due qualunque delle precedenti equazioni, debbano risultare i valori dei rapporti incogniti fra le quantità $C' - c'$, $C'' - c''$, $C''' - c'''$; ma si può dimostrare che le superiori tre equazioni entro l'ordine delle potenze delle θ che abbiamo trascurate sono identiche l'una coll'altra, e che perciò non costituiscono che una sola equazione. Onde persuadersi di ciò si sottragga la prima delle equazioni (122) dalla seconda e la seconda dalla terza, si troverà che alle differenze risultanti potremo dare le seguenti forme:

$$
(131)\qquad
\begin{aligned}
&b_2^1\,D''\,\Phi'''\,T^{11} - b_3^{11}\,D'''\,\Phi''\,T^1 - b_1^1\,D'\,\Phi'''\,T^{111} + b_3^{111}\,D'''\,\Phi'\,T^1\\
&\quad = \{b_1^1 D' \alpha_3^{111} T^{111} - b_2^1 D'' \alpha_3^{11} T^{11} + b_3^1\,D'''\,\alpha_3^1\,T^1\}\,\varphi'''\\
&\quad - \{b_3^{111}\,\alpha_1^1\,\varphi' - b_3^{11}\,\alpha_1^1\,\varphi'' + b_3^1\,\alpha_3^1\,\varphi'''\}\,D'''\,T^1\\
&b_2^{111}\,D''\,\Phi'\,T^{11} - b_1^{11}\,D'\,\Phi''\,T^{111} - b_3^{111}\,D'''\,\Phi'\,T^1 + b_1^1\,D'\,\Phi'''\,T^{111}\\
&\quad = \{b_1^{111} D' \alpha_1^{111} T^{111} - b_2^{111} D'' \alpha_1^{11} T^{11} + b_3^{111} D''' \alpha_1^1 T^1\}\,\varphi'\\
&\quad - \{b_1^{111}\,\alpha_1^{111}\,\varphi' - b_1^{11}\,\alpha_2^{111}\,\varphi'' + b_1^1\,\alpha_3^{111}\,\varphi'''\}\,D'\,T^{111}
\end{aligned}
$$

Si pongano nei primi membri di queste equazioni per le quantità

$$
b_2^1\,D''\,T^{11} - b_1^1\,D'\,T^{111}, \qquad b_2^{111}\,D''\,T^{11} - b_3^{111}\,D'''\,\Phi'\,T^1
$$

i valori che risultano dall'ultima e dalla prima delle equazioni (90), e poi si sostituiscano per le b e Φ le loro espressioni date dalle formole (70), (121), (74), (67); cancellando tutti i termini che vengono distrutti, troveremo

$$
\begin{aligned}
6\,\varphi'''\,T^1 &= \{b_1^1 D' \alpha_3^{111} T^{111} - b_2^1 D'' \alpha_3^{11} T^{11} + b_3^1 D''' \alpha_3^1 T^1\}\,\varphi'''\\
&\quad - \{b_3^{111}\,\alpha_1^1\,\varphi' - b_3^{11}\,\alpha_2^1\,\varphi'' + b_3^1\,\alpha_3^1\,\varphi'''\}\,D'''\,T^1\\
6\,\varphi'\,T^{111} &= \{b_1^{111} D' \alpha_1^{111} T^{111} - b_2^{111} D'' \alpha_1^{11} T^{11} + b_3^{111} D''' \alpha_1^1 T^1\}\,\varphi'\\
&\quad - \{b_1^{111}\,\alpha_1^{111}\,\varphi' - b_1^{11}\,\alpha_2^{111}\,\varphi'' + b_1^1\,\alpha_3^{111}\,\varphi'''\}\,D'\,T^{111}
\end{aligned}
$$

Dalle equazioni (123) risulta che le quantità α sono tutte dell'ordine della seconda potenza delle θ, riflettendo inoltre che le b sono quantità del primo ordine, ed avendo riguardo alle equazioni (97), si vedrà che, supponendo nei secondi membri delle precedenti equazioni

$$T^{111} = \sigma T^{1}, \qquad T^{11} = \sigma_1 T^{1}$$

non ommetteremo che dei termini della sesta potenza delle θ. Trascurando quindi questi termini, e ponendo per le α i loro valori dati dalle equazioni (110), (124), dopo una semplice riduzione che somministrano le equazioni (108) si troverà che le due prime linee dei secondi membri si riducono ai due termini $\beta\varphi''' T^{1}$, $\beta\varphi' T^{111}$, e che avremo soltanto

$$(132)\qquad \begin{aligned} &\beta\left\{b_3^{111}\frac{\varphi' D'}{Q^{111}} - b_3^{11}\frac{\varphi'' D''}{Q^{11}} + b_3^{1}\frac{\varphi''' D'''}{Q^{1}}\right\} D''' T^{1} = 0. \\ &\beta\left\{b_1^{111}\frac{\varphi' D'}{Q^{111}} - b_1^{11}\frac{\varphi'' D''}{Q^{11}} + b_1^{1}\frac{\varphi''' D'''}{Q^{1}}\right\} \sigma^2 D' T^{111} = 0 \end{aligned}$$

Immaginiamo messi in luogo di φ', φ'', φ''' i loro valori in funzione di $C'-c'$, $C''-c''$, $C'''-c'''$, che provengono dall'equazione (118), sarà facile il vedere che i coefficienti di $C'-c'$ nelle precedenti equazioni sono

$$(133)\qquad \begin{aligned} &\beta\left\{b_3^{111}\frac{\omega' D'}{Q^{111}} - b_3^{11}\frac{\omega'' D''}{Q^{11}} + b_3^{1}\frac{\omega''' D'''}{Q^{1}}\right\} D''' T^{1} \\ &\beta\left\{b_1^{111}\frac{\omega' D'}{Q^{111}} - b_1^{11}\frac{\omega'' D''}{Q^{11}} + b_1^{1}\frac{\omega''' D'''}{Q^{1}}\right\} \sigma^2 D' T^{111} \end{aligned}$$

e che da questi si deducono i coefficienti di $C''-c''$, $C'''-c'''$ col solo cangiare prima le ω in ν, e poi le ω in μ.

Cominciamo dall'osservare che le quantità del primo ordine Q^{111}, Q^{11}, Q^{1} sono, come mostrano le equazioni (109), proporzionali alle δ', δ'', δ''', e che perciò, considerando Q^{111}, Q^{1} come funzioni di Q^{11} e di θ, si ha

$$Q^{111} = Q^{11} - \left(\frac{dQ^{11}}{d\theta}\right)\theta' + \text{ecc.} \qquad Q^{1} = Q^{11} + \left(\frac{dQ^{11}}{d\theta}\right)\theta''' + \text{ecc.}$$

Ciò posto, sostituiamo per le b le espressioni che sono date dalle formole (70) del numero 9; considerando dopo tali sostituzioni ciascuna quantità contenuta nelle b e che ha sovrapposto uno o tre apici come funzione della corrispondente con due apici e di θ' o θ''', e sviluppandola in serie, si verifica facilmente che le quantità fra le parentesi nelle formole precedenti (133) sono dell'ordine della seconda potenza delle θ, e che evidentemente rimangono della stessa grandezza cangiando le ω nelle ν, ovvero nelle μ. Quindi riflettendo che la quantità β è dell'ordine della terza potenza delle θ, e che le T^{1}, T^{111} sono del primo ordine, si vede che i coefficienti di $C'-c'$, $C''-c''$, $C'''-c'''$ nelle equazioni (131) o (132) risultano della sesta potenza delle θ. Ora le equazioni (131) sono le differenze di quelle segnate (122), ne conchiuderemo perciò che queste ultime equazioni avranno tutte i coefficienti di $C'-c'$, $C''-c''$, $C'''-c'''$ eguali entro l'ordine della quinta potenza delle θ. E siccome le equazioni (130) sono state dedotte dalle stesse (122), e non differiscono da esse che pei divisori del terz'ordine $T^{1}T^{11}(d-d_1)\sqrt{P}:D'$, $T^{1}T^{111}(d'-d_1')\sqrt{P}:D''$, $T^{11}T^{111}(d''-d_1'')\sqrt{P}:D'''$ comuni a tutti i termini delle rispettive equazioni: così dalla predetta conclusione ne deriva che le tre equazioni (130) non rappresentano che una sola equazione entro le seconde potenze delle θ, cioè entro i limiti a cui abbiamo spinta l'approssimazione nel valutare le α.

29.

Poichè le equazioni (130) non ne costituiscono realmente che una sola, il partito più semplice che ci rimane a prendere per non incorrere in equazioni troppo astruse si è di assumere un altro sistema di tre osservazioni, le quali, trattate nello stesso modo, ci somministreranno tre altre equazioni simili alle (130). Nè ommetteremo di riflettere incidentemente che per comporre questo secondo sistema di osservazioni non sarà necessario d'introdurre tre nuove osservazioni, perchè basterà soltanto combinare due osservazioni del primo sistema con una quarta osservazione. Posponendo quindi l'indice $_{(1)}$ alle quantità che entrano nelle equazioni del secondo sistema d'osservazioni per distinguerle da quelle del primo, e scegliendo delle tre equazioni (130) quella che è rappresentata dalla

seconda formola, avremo pei due sistemi d'osservazioni le equazioni seguenti:

$$(134)\quad \begin{aligned} &C' - c' - h'\ (C'' - c'') + k'\ (C''' - c''') = 0 \\ &C' - c' - h'_{(1)}(C'' - c'') + k'_{(1)}(C''' - c''') = 0 \end{aligned}$$

dalle quali potremo dedurre i valori di $C'' - c''$, $C' - c''$ espressi per $C' - c'$. In fatti supponendo

$$(135)\quad \frac{h' - h'_{(1)}}{h'k'_{(1)} - k'h'_{(1)}} = M\,, \qquad (136)\quad \frac{k' - k'_{(1)}}{h'k'_{(1)} - k'h'_{(1)}} = N$$

colla risoluzione delle precedenti equazioni troveremo

$$(137)\quad \begin{aligned} C''' - c''' &= M\,(C' - c') \\ C'' - c'' &= N\,(C' - c') \end{aligned}$$

30.

Ci rimane ora di passare alla determinazione delle stesse quantità $C' - c'$, $C'' - c''$, $C''' - c'''$ per mezzo della cognizione dei rapporti M ed N, il che però offre minore difficoltà.

A tal effetto si pongano la quarta, la prima e la seconda delle equazioni (75) sotto la forma seguente:

$$b^{1}_{2}\, D'\, D''\, \delta' = \left\{\chi'' - \psi'' + \psi''\left(1 - \frac{\tau^{1}}{T^{1}}\right)\right\} D'\, T^{1}$$

$$b^{1}_{1}\, D'\, D''\, \delta'' = \left\{\chi' - \psi' + \psi'\left(1 - \frac{\tau^{1}}{T^{1}}\right)\right\} D''\, T^{1}$$

$$b^{11}_{1}\, D'\, D'''\, \delta''' = \left\{\chi' - \psi' + \psi'\left(1 - \frac{\tau^{11}}{T^{11}}\right)\right\} D'''\, T^{11}$$

Facendo uso delle equazioni segnate (125), (121), (120), (119), queste ultime potranno scriversi come segue:

$$a^{1}_{2}\sqrt{P}\,\delta' = \{\Phi'' + \alpha^{1}_{2}\varphi''\}\, D'$$
$$a^{1}_{1}\sqrt{P}\,\delta'' = \{\Phi' + \alpha^{1}_{1}\varphi'\}\, D''$$
$$a^{11}_{1}\sqrt{P}\,\delta''' = \{\Phi' + \alpha^{11}_{1}\varphi'\}\, D'''$$

Sostituiscansi ora per le Φ e φ i loro valori che provengono dalle equazioni numerate (121), (67), (74), (118); ed usando delle denominazioni del numero 27, avremo

$$a^{1}_{2}\sqrt{P}\,\delta' = \{d\,(C' - c') - f\,(C'' - c'') + g\,(C''' - c''')\}\, D'$$
$$a^{1}_{1}\sqrt{P}\,\delta'' = \{d'(C' - c') - f'(C'' - c'') + g'(C''' - c''')\}\, D''$$
$$a^{11}_{1}\sqrt{P}\,\delta''' = \{d''(C' - c') - f''(C'' - c'') + g''(C''' - c''')\}\, D'''$$

Ponghiamo per $C'' - c''$, $C''' - c'''$ i loro valori dati dalle equazioni (137) e supponghiamo

$$(138)\quad \begin{aligned} \frac{d - fN + gM}{a^{1}_{2}} &= O' \\ \frac{d' - f'N + g'M}{a^{1}_{1}} &= O'' \\ \frac{d'' - f''N + g''M}{a^{11}_{1}} &= O''' \end{aligned}$$

si troverà

$$(139)\quad \begin{aligned} \delta'\sqrt{P} &= O'\,(C' - c')\, D' \\ \delta''\sqrt{P} &= O''\,(C' - c')\, D'' \\ \delta'''\sqrt{P} &= O'''\,(C' - c')\, D''' \end{aligned}$$

È evidente che se noi avessimo in vece fatto uso per determinare $\delta'\sqrt{P}$, $\delta''\sqrt{P}$, $\delta'''\sqrt{P}$ della quinta, sesta e terza delle equazioni (75) sarebbero, a motivo delle equazioni (122), risultati per O', O'', O''' gli stessi valori.

Allorchè delle tre quantità δ', δ'', δ''' ci occorrerà di avere soltanto il valore di una espressa per $C' - c'$, sarà preferibile la seconda perchè nell' espressione (138) della O'' entrano le quantità d', f', g' già calcolate antecedentemente nel valutare i coefficienti della seconda delle equazioni (130).

Posponendo l' indice $_{(1)}$ alle formole precedenti, avremo, come è chiaro, le formole che serviranno pel secondo sistema di osservazioni, e la quantità $O''_{(1)}$ il cui valore è espresso dalla formola

$$(140) \qquad O''_{(1)} = \frac{\delta'_{(1)} - f'_{(1)} N + g_{(1)} M}{a'_{(1)}}$$

esigerà per la stessa ragione ora addotta minor dispendio di calcolo delle altre $O'_{(1)}$, $O'''_{(1)}$.

31.

L'equazione (121) col mezzo di quella segnata (119) può mettersi sotto la forma seguente:

$$\Phi\, \delta = \chi\, \delta - \varphi\, D$$

Sostituiamo in quest'equazione per Φ, φ e χ i valori che provengono dalle equazioni (121), (74), (67), (118), avremo

$$\{o\,(C' - c') - n\,(C'' - c'') + m\,(C''' - c''')\}\,\delta = \{oC' - nC'' + mC'''\}\,\delta$$
$$- \{\omega\,(C' - c') - \nu\,(C'' - c'') + \mu\,(C''' - c''')\}\,D$$

Dando successivamente uno, due, tre apici alle quantità che in questa equazione variano colle osservazioni, e ponendo per δ', δ'', δ''' i valori che somministrano le formole (139), si troveranno per determinare la differenza $C' - c'$ le tre equazioni seguenti:

$$C' - c' = \frac{(o'C' - n'C'' + m'C''')\,O' - (\omega' - \nu' N + \mu' M)\sqrt{P}}{(o' - n' N + m' M)\,O'}$$

$$(141) \qquad C' - c' = \frac{(o''C' - n''C'' + m''C''')\,O'' - (\omega'' - \nu'' N + \mu'' M)\sqrt{P}}{(o'' - n' N + m'' M)\,O''}$$

$$C' - c' = \frac{(o'''C' - n'''C'' + m'''C''')\,O''' - (\omega''' - \nu''' N + \mu''' M)\sqrt{P}}{(o''' - n''' N + m''' M)\,O'''}$$

Ed il secondo sistema d' osservazioni darà per $C' - c'$ tre valori simili col posporre alle quantità del secondo membro l' indice $_{(1)}$.

Siccome abbiamo osservato che il calcolo della quantità O'' è meno laborioso, così la seconda di queste formole sarà la più conveniente ad usarsi.

Quando avremo determinato il valore di $C' - c'$, le equazioni (137) ci daranno quelli delle differenze $C'' - c''$, $C''' - c'''$, e col mezzo di queste differenze conosceremo i valori di c', c'', c''', poichè le quantità C', C'', C''' sono date dalle dimensioni dell'orbita della terra e dalla posizione del piano dell'eclittica, come vedremo in seguito.

ARTICOLO V.

Determinazione di tutti gli elementi dell' orbita.

32.

Il passare dal valore delle costanti c', c'', c''', che abbiamo determinate nell'ultimo articolo, alla cognizione di tutti gli elementi dell'orbita è cosa che offre poca difficoltà, e nelle opere di varj autori trovansi molte formole a tal fine dirette. Nulladimeno per non obbligare il lettore a ricercarle altrove, e per preparare le formole a cui riferirci nelle applicazioni che faremo in seguito, ho creduto bene di riportarne alcune nel presente articolo, colle quali darò compimento all'analisi intrapresa.

Rappresento con i l'inclinazione del piano in cui è situata l'orbita del corpo celeste a quello delle xy, e con Ω l'angolo che la linea de' nodi fa in questo ultimo piano coll'asse delle x: dalla geometria analitica si sa che l'equazione di questo piano è

$$(142) \qquad z - \tan i \cos \Omega\, y + \tan i \sin \Omega\, x = 0$$

Paragonando questa coll'equazione (15) appartenente pure al piano dell'orbita del corpo celeste, avremo

$$(143) \qquad c''' = c' \tan i \sin \Omega \qquad\qquad (144) \qquad c'' = c' \tan i \cos \Omega$$

Da queste equazioni possiamo dedurre primieramente la direzione della linea de' nodi colla formola

$$\tan \Omega = \frac{c'''}{c''} \tag{145}$$

Il valore di $\tan \Omega$ che si ricava da questa formola conviene egualmente agli angoli Ω e $\pi + \Omega$, e perciò dà indistintamente la longitudine dei due nodi ascendente e discendente, cioè non indica piuttosto l'uno che l'altro. Dalla direzione però colla quale il raggio vettore descrive la projezione dell'orbita sul piano delle yz si vedrà che il nodo ascendente apparterrà all'angolo Ω ovvero all'altro $\pi + \Omega$, secondo che sarà nell'equazione (143) positivo o negativo il valore della costante c'''.

Ritrovato Ω, le equazioni (143), (144) somministrano le due seguenti per determinare l'inclinazione dell'orbita, cioè

$$\tan i = \frac{c'''}{c' \sin \Omega} = \frac{c''}{c' \cos \Omega} \tag{146}$$

Queste equazioni, parlando analiticamente, danno l'inclinazione del piano in cui è situata l'orbita del corpo celeste al piano xy, prendendo per Ω quello tra i due sopraddetti angoli che rende $\cos \Omega$ positivo. Noi però seguendo le idee del prof. Gauss, intenderemo per inclinazione dell'orbita l'angolo che nella direzione del movimento del corpo celeste e nell'ordine dei segni o più generalmente nell'ordine di graduazione sul piano xy vien formato al nodo ascendente dello stesso piano con quello dell'orbita: secondo tale idea si vedrà facilmente che si dovrà sempre assumere pel valore di Ω l'angolo del nodo ascendente.

33.

Al numero 3 abbiamo fatto osservare che rimaneva arbitraria nel piano dell'orbita la direzione degli assi ortogonali ξ, v. Prendiamo ora per asse della ξ la linea de' nodi superiormente determinata, e contiamo le positive dalla parte del nodo ascendente. È facile il vedere che

in questa supposizione l'asse delle ξ farà cogli assi delle x, y, z gli angoli Ω, $\frac{\pi}{2} - \Omega$, $\frac{\pi}{2}$, e che quindi i coseni indicati dalle lettere α, α_1, α_2 avranno per valori

$$\alpha = \cos \Omega \quad \alpha_1 = \sin \Omega \quad \alpha_2 = 0$$

Sostituendo questi valori nelle equazioni (17), (18), (19), (20), (21), due saranno soddisfatte per sè stesse, le altre tre per mezzo di facili riduzioni ci daranno

$$\beta = -\cos i \sin \Omega \quad \beta_1 = \cos i \cos \Omega \quad \beta_2 = \sin i$$

e le espressioni delle coordinate x, y, z date dalle equazioni (16), usando anche quelle segnate (30), diverranno

$$\begin{aligned} x &= r \cos \Omega \cos u - r \cos i \sin \Omega \sin u \\ y &= r \sin \Omega \cos u + r \cos i \cos \Omega \sin u \\ z &= r \sin i \sin u \end{aligned} \tag{147}$$

34.

Ponghiamo parimente i precedenti valori di α, β, α_1, β_1 nell'equazione (26), avremo

$$\sqrt{p} = \frac{c'}{\cos i} \tag{148}$$

e siccome la formola (35)

$$p = a(1 - e^2)$$

ci dà a divedere che p è il semiparametro dell'orbita del corpo celeste, sarà così determinato questo elemento.

35.

Quanto abbiamo detto nei numeri precedenti delle quantità appartenenti al corpo celeste s'applica egualmente, come è chiaro, anche a quelle della terra; quindi sovrapponendo al solito un apice dinanzi alle quantità del corpo celeste per indicare le corrispondenti della terra, avremo

(149) $C''' = C' \cos {}'i \cos {}'\Omega$ (150) $C'' = C' \cos {}'i \sin {}'\Omega$

(151) $C' = \sqrt{P} \cos {}'i$

In queste equazioni le quantità $'i$, $'\Omega$, P sono date dalla posizione del piano dell'eclittica e dalla grandezza dell'orbita della terra, perciò dedurremo da esse i valori di C', C'', C''', dei quali, come è stato detto alla fine del numero 31, ci occorre avere i valori per ottenere dalle equazioni (141), (137) la determinazione delle quantità c', c'', c'''.

36.

Possiamo ora proporci il seguente problema: Dato il luogo geocentrico del corpo celeste, e la posizione del piano dell'orbita, trovare il luogo eliocentrico sull'orbita. A tale effetto rappresentiamo con l l'angolo che il raggio vettore R fa col piano delle xy, e con L l'angolo formato dalla projezione dello stesso raggio sul nominato piano coll'asse delle x, ritenendo le denominazioni delle formole (69), nello stesso modo che si sono ottenute le equazioni (7) avremo le seguenti:

(152) $$\frac{\mu}{\omega} = \frac{\cos L}{\tan l} \qquad \frac{\nu}{\omega} = \frac{\sin L}{\tan l}$$

In queste due equazioni e nelle citate (7), tanto delle tre quantità μ, ν, ω, quanto delle tre m, n, o, due sole si troveranno determinate, ed una rimarrà in nostro arbitrio.

Supponiamo perciò che le arbitrarie soddisfacciano alle equazioni

(153) $$\begin{aligned} m^2 + n^2 + o^2 &= 1 \\ \mu^2 + \nu^2 + \omega^2 &= 1 \end{aligned}$$

Dalle equazioni (65), (69) e dalla seguente

$$R = \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}$$

risulterà

(154) $$\delta = \Delta \qquad D = R$$

e dalle equazioni (7), (152) combinate colle precedenti (153) si avrà

(155) $$\begin{aligned} m &= \cos\lambda \cos\Lambda & n &= \cos\lambda \sin\Lambda & o &= \sin\lambda \\ \mu &= \cos l \cos L & \nu &= \cos l \sin L & \omega &= \sin l \end{aligned}$$

Sostituendo questi valori di δ, D, m, n, o, μ, ν, ω nelle equazioni (116), troveremo

(156) $$\begin{aligned} x &= \Delta \cos\lambda \cos\Lambda + R \cos l \cos L \\ y &= \Delta \cos\lambda \sin\Lambda + R \cos l \sin L \\ z &= \Delta \sin\lambda + R \sin l \end{aligned}$$

Si sommi la prima di queste equazioni moltiplicata per $\cos\Omega$ colla seconda moltiplicata per $\sin\Omega$, inoltre sottraggasi la prima moltiplicata per $\sin\Omega$ dalla seconda moltiplicata per $\cos\Omega$. Sostituendo nelle due equazioni risultanti e nella terza delle precedenti i valori di x, y, z dati dalle equazioni (147), avremo le tre seguenti:

(157) $$\begin{aligned} r \cos u &= \Delta \cos\lambda \cos(\Lambda - \Omega) + R \cos l \cos(L - \Omega) \\ r \cos i \sin u &= \Delta \cos\lambda \sin(\Lambda - \Omega) + R \cos l \sin(L - \Omega) \\ r \sin i \sin u &= \Delta \sin\lambda + R \sin l \end{aligned}$$

Prendiamo la somma di queste tre equazioni dopo aver moltiplicata la seconda per $-h$ e la terza per k, h e k essendo due quantità da determinarsi colle equazioni

(158) $$\begin{aligned} \cos\lambda \cos(\Lambda - \Omega) - h \cos\lambda \sin(\Lambda - \Omega) + k \sin\lambda &= 0 \\ \cos l \cos(L - \Omega) - h \cos l \sin(L - \Omega) + k \sin l &= 0 \end{aligned}$$

avremo

$$\cos u - h \cos i \sin u + k \sin i \sin u = 0$$

dalla quale dedurremo

$$\tan u = \frac{1}{h \cos i - k \sin i}$$

ovvero, facendo

(159) $$\frac{h}{k} = \tan A$$

avremo

(160) $$\tan u = \frac{\cos A}{k \sin (A - i)}$$

I valori di h e k dati dalle equazioni (158) sono

$$h = \frac{\sin \lambda \cos l \cos (L - \Omega) - \cos \lambda \sin l \cos (\Lambda - \Omega)}{\sin \lambda \cos l \sin (L - \Omega) - \cos \lambda \sin l \sin (\Lambda - \Omega)}$$

$$k = \frac{\cos \lambda \cos l \sin (\Lambda - L)}{\sin \lambda \cos l \sin (L - \Omega) - \cos \lambda \sin l \sin (\Lambda - \Omega)}$$

i quali diventano notabilmente più semplici allorchè il piano delle xy è quello dell'eclittica, perchè in questo caso è $\sin l = 0$, $\cos l = 1$.

In vece di sommare tutte e tre le equazioni (157) moltiplicate nel modo indicato, sommiamo soltanto le prime due, e determiniamo h coll'equazione

$$\cos \lambda \cos (\Lambda - \Omega) - h \cos \lambda \sin (\Lambda - \Omega) = 0$$

la quale dà

$$h = \cot (\Lambda - \Omega)$$

avremo quindi

$$r \cos u - hr \cos i \sin u = R \cos l \cos (L - \Omega) - h R \cos l \sin (L - \Omega)$$

ovvero, ricavando il valore di r e sostituendo per h quello dato dalla formola precedente,

$$r = \frac{R \cos l \sin (\Lambda - L)}{\cos u \sin (\Lambda - \Omega) - \sin u \cos i \cos (\Lambda - \Omega)}$$

Introducendo un angolo ausiliario B tale che sia

$$\tan B = \frac{\tan (\Lambda - \Omega)}{\cos i}$$

questa formola diviene più comoda pel calcolo logaritmico, e dà

(161) $$r = \frac{R \sin B \cos l \sin (\Lambda - L)}{\sin (\Lambda - \Omega) \sin (B - u)}$$

Potremo così per mezzo delle equazioni (160), (161), conoscendo il luogo geocentrico e la posizione del piano dell' orbita del corpo celeste, determinare l' angolo u, che dicesi argomento di latitudine, ed il raggio vettore r del detto corpo.

Per togliere l' ambiguità nella determinazione dell' angolo u dato dall'equazione (160) si eliminerà Δ fra le due ultime equazioni (157), e si prenderà u tra 0 e π, ovvero tra π e 2π, secondo che risulterà per $r \sin u$ un valor positivo ovvero negativo.

Quando si volesse, oltre i valori di u ed r, anche quello di Δ, si potrà determinarlo colla terza delle equazioni (157). Se in vece fosse dato Δ, si potrà per la determinazione della r sostituire all' equazione precedente (161) la stessa citata (157) la quale dà più semplicemente

(162) $$r = \frac{\Delta \sin \lambda + R \sin l}{\sin i \sin u}$$

e si riduce ad un monomio nel caso su mentovato che il piano delle xy sia quello dell'eclittica.

I principj di questa soluzione sono stati dedotti dal numero 74 della *Theoria motus corporum cœlestium* ecc.

37.

Anche il signor Olbers diede un'elegante soluzione del problema che trattiamo, la quale ora esporremo supponendo per semplicità che il piano delle coordinate $x\,y$ sia quello dell' eclittica.

S' immagini condotto pei centri del sole, della terra e del corpo celeste un piano, e si concepiscano uniti questi tre punti per mezzo di tre linee; essi formeranno nel detto piano un triangolo rettilineo del quale R, Δ, r saranno i lati, ed indicati con ε, γ, $\pi - \varepsilon - \gamma$ gli angoli opposti, avremo

$$\frac{R}{\sin \varepsilon} = \frac{\Delta}{\sin \gamma} = \frac{r}{\sin (\varepsilon + \gamma)} \tag{163}$$

Questi lati prolungati projetteranno su di un circolo massimo della sfera tre punti, che saranno il luogo eliocentrico della terra, il luogo geocentrico del corpo celeste ed il luogo eliocentrico del medesimo. Si concepisca abbassato dal luogo geocentrico del corpo celeste un arco perpendicolare alla circonferenza projettata dal piano dell' eclittica sulla sfera; quest' arco misurerà la latitudine geocentrica ed il medesimo cogli archi $L - \Lambda$, $\varepsilon + \gamma$ formerà un triangolo sferico rettangolo, nel quale, detto η l' angolo al luogo eliocentrico della terra, si avrà

$$\cos (\varepsilon + \gamma) = \cos \lambda \cos (L - \Lambda) \tag{164}$$

$$\cot \eta = \cot \lambda \sin (L - \Lambda) \tag{165}$$

La projezione del nodo ascendente sulla sfera, il luogo eliocentrico della terra ed il luogo eliocentrico del corpo celeste saranno i vertici di un altro triangolo sferico del quale γ, u, $L - \Omega$ saranno i lati, ed i, η gli angoli adjacenti a quest' ultimo lato. In questo triangolo le ultime tre parti saranno date dalle formole (145), (146), (165), quindi potremo colle analogie di Nepero determinare γ ed u: conosciuto γ, dall' equazione (164) avremo il valore di ε, e dalle equazioni (163) Δ ed r.

38.

L'argomento di latitudine u ed il raggio vettore r, che ne' numeri precedenti abbiamo insegnato a ritrovare, determinano, come è evidente, la posizione del punto occupato nel piano dell'orbita dal corpo celeste nell'istante della corrispondente osservazione. Poichè l'equazione (36) che rappresenta la curva descritta dal corpo celeste contiene tre costanti, a, e, ω e può farsi passare per tre punti soltanto, data perciò che avremo la posizione di tre punti occupati in diversi tempi dal corpo celeste, potremo determinare le dette tre costanti, e quindi la grandezza e posizione della curva descritta. Ecco un modo col quale si può eseguire questa determinazione.

Siano u', u'', u''' gli argomenti di latitudine ed r', r'', r''' i raggi vettori del corpo celeste determinati per gl' istanti di tre osservazioni colle formole d' alcuno de' due numeri precedenti. Sostituiti questi valori successivamente nell' equazione (36), e ponendo p in luogo di a $(1 - e^2)$, avremo per determinare p, e, $\tilde{\omega}$ le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} r' &= \frac{p}{1 + e \cos (u' - \tilde{\omega})} \\ r'' &= \frac{p}{1 + e \cos (u'' - \tilde{\omega})} \\ r''' &= \frac{p}{1 + e \cos (u''' - \tilde{\omega})} \end{aligned} \tag{166}$$

Suppongasi

$$\frac{1}{r'} - \frac{1}{p} = q' \qquad \frac{1}{r''} - \frac{1}{p} = q'' \qquad \frac{1}{r'''} - \frac{1}{p} = q'''$$

con queste denominazioni alle equazioni superiori potremo dare le forme

$$\begin{aligned} \frac{e}{p} \cos (u' - \tilde{\omega}) &= q' \\ \frac{e}{p} \cos (u'' - \tilde{\omega}) &= q'' \\ \frac{e}{p} \cos (u''' - \tilde{\omega}) &= q''' \end{aligned} \tag{167}$$

Si sommino a due a due queste equazioni, per le riduzioni che somministrano le note formole trigonometriche, avremo

$$\frac{e}{p}\cos\left(\tfrac{1}{2}u' + \tfrac{1}{2}u'' - \tilde{\omega}\right) = \frac{q' + q''}{2\cos\frac{1}{2}(u'' - u')}$$

(168) $$\frac{e}{p}\cos\left(\tfrac{1}{2}u' + \tfrac{1}{2}u''' - \tilde{\omega}\right) = \frac{q' + q'''}{2\cos\frac{1}{2}(u''' - u')}$$

$$\frac{e}{p}\cos\left(\tfrac{1}{2}u'' + \tfrac{1}{2}u''' - \tilde{\omega}\right) = \frac{q'' + q'''}{2\cos\frac{1}{2}(u''' - u'')}$$

Sottraendo in vece una dall'altra le stesse equazioni (167), e facendo simili riduzioni, risulterà

$$\frac{e}{p}\sin\left(\tfrac{1}{2}u' + \tfrac{1}{2}u'' - \tilde{\omega}\right) = \frac{q' - q''}{2\sin\frac{1}{2}(u'' - u')}$$

(169) $$\frac{e}{p}\sin\left(\tfrac{1}{2}u' + \tfrac{1}{2}u''' - \tilde{\omega}\right) = \frac{q' - q'''}{2\sin\frac{1}{2}(u''' - u')}$$

$$\frac{e}{p}\sin\left(\tfrac{1}{2}u'' + \tfrac{1}{2}u''' - \tilde{\omega}\right) = \frac{q'' - q'''}{2\sin\frac{1}{2}(u''' - u'')}$$

Allorchè p sarà già stato determinato, come al numero 34, i secondi membri tanto di queste equazioni quanto delle precedenti saranno tutti composti di quantità cognite, dividendo così una per l'altra le corrispondenti equazioni numerate (168), (169), per esempio le due prime, avremo

(170) $$\tan\left(\tfrac{1}{2}u' + \tfrac{1}{2}u'' - \tilde{\omega}\right) = \frac{q' - q''}{q' + q''}\cot\tfrac{1}{2}(u'' - u')$$

colla quale determineremo l'angolo $\frac{1}{2}u' + \frac{1}{2}u'' - \tilde{\omega}$, e perciò l'angolo $\tilde{\omega}$, poichè gli angoli u', u'' sono già conosciuti. Ritrovato $\tilde{\omega}$, una delle stesse equazioni (168) ci darà il valore di $\frac{e}{p}$, dal quale dedurremo quello di e.

Se la quantità p è ancora incognita, poichè soltanto i secondi membri delle equazioni (169) si troveranno privi della stessa incognita, il precedente processo non potrà seguirsi. In questo caso dinotiamo con q_1', q_1'', q_1''' i secondi membri delle equazioni (169), ed avremo

$$\frac{e}{p}\sin\left(\tfrac{1}{2}u' + \tfrac{1}{2}u'' - \tilde{\omega}\right) = q_1'$$

$$\frac{e}{p}\sin\left(\tfrac{1}{2}u' + \tfrac{1}{2}u''' - \tilde{\omega}\right) = q_1''$$

$$\frac{e}{p}\sin\left(\tfrac{1}{2}u'' + \tfrac{1}{2}u''' - \tilde{\omega}\right) = q_1'''$$

Si sommino e si sottraggano tra loro due qualunque di queste equazioni, usando le due prime, e facendo le opportune riduzioni, si troverà

(171) $$\frac{e}{p}\sin\left(\tfrac{1}{2}u' + \tfrac{1}{4}u'' + \tfrac{1}{4}u''' - \tilde{\omega}\right) = \frac{q_1'' + q_1'}{2\cos\frac{1}{4}(u''' - u'')}$$

$$\frac{e}{p}\cos\left(\tfrac{1}{2}u' + \tfrac{1}{4}u'' + \tfrac{1}{4}u''' - \tilde{\omega}\right) = \frac{q_1'' - q_1'}{2\sin\frac{1}{4}(u''' - u'')}$$

Da queste equazioni si ricaverà primieramente la seguente,

(172) $$\tan\left(\tfrac{1}{2}u' + \tfrac{1}{4}u'' + \tfrac{1}{4}u''' - \tilde{\omega}\right) = \frac{q_1'' + q_1'}{q_1'' - q_1'}\tan\tfrac{1}{4}(u''' - u'')$$

la quale darà il valore di $\tilde{\omega}$, e poi da qualcuna delle equazioni (171) ricaveremo quello di $\frac{e}{p}$. Trovato $\tilde{\omega}$ ed $\frac{e}{p}$, una delle equazioni (166) ci somministrerà il valore di p, col quale rimarranno determinate tutte tre le costanti che entrano nell'equazione della curva di secondo ordine percorsa dal corpo celeste.

Le formole esposte in questo numero sono date dal signor Gauss nella terza sezione del libro primo della *Theoria motus*, ecc.

39.

L'angolo ϖ che si deduce dalle precedenti formole, è quello che l'asse maggiore della curva fa colla linea dei nodi, e che gli astronomi chiamano argomento di latitudine del perielio. Nel dare gli elementi dell'orbita di un corpo celeste si suole in vece porre la longitudine del perielio contata nell'orbita. Siccome la longitudine di un punto nell'orbita si conta partendo dal punto 0° di divisione nel piano delle xy e progredendo nell'ordine di graduazione sino al nodo ascendente, e poi si continua dal nodo ascendente a progredire nell'orbita sino al detto punto; così indicando con Ω, come abbiamo già fatto, la longitudine del nodo, la longitudine Π del perielio nell'orbita sarà data dall'equazione

(173) $$\Pi = \Omega + \varpi$$

40.

Se nell'equazione (36) si fa $u = \varpi$, risulterà

$$r = \frac{p}{1 + e}$$

questo valore di r darà quindi, per ciò che si è detto, la distanza dal corpo celeste al sole, allorchè il primo trovasi nel perielio. Indicando dunque con q la detta distanza, che chiamasi distanza perielia e che gli astronomi sogliono riferire nel dare gli elementi dell'orbita di una cometa, essa sarà espressa dalla formola

(174) $$q = \frac{p}{1 + e}$$

41.

Supponiamo

(175) $$u - \varpi = \upsilon$$

è facile il vedere che υ rappresenterà l'angolo fatto dal raggio vettore corrispondente all'argomento di latitudine u colla linea del perielio, o asse della curva, il qual angolo in astronomia porta il nome di anomalia vera. Per mezzo di questa nuova denominazione l'equazione (36) darà

(176) $$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \upsilon}$$

Paragonando questo valore di r con ciascuno dei due che somministrano le equazioni (37), risultano le seguenti:

$$\frac{1 - e^2}{1 + e \cos \upsilon} = 1 - e \cos \varepsilon, \qquad \frac{1 - e}{1 + e \cos \upsilon} = 1 + \frac{\cos \varepsilon}{e}$$

da queste equazioni si ricaverà primieramente

$$\cos \varepsilon = \frac{e \cos \upsilon}{1 + e \cos \upsilon}, \qquad \cos \varepsilon = \frac{1 + e \cos \upsilon}{e \cos \upsilon}$$

e quindi

(177) $$\tan \tfrac{1}{2} \varepsilon = \sqrt{\left(\frac{1 - e}{1 + e}\right)} \tan \tfrac{1}{2} \upsilon$$

$$\tan \tfrac{1}{2} \varepsilon = \sqrt{\left(\frac{e - 1}{e + 1}\right)} \tan \tfrac{1}{2} \upsilon$$

L'angolo ε, che si determina per mezzo d'una di queste formole, è detto dagli astronomi anomalia eccentrica: la prima formola dà per ε un valor reale quando trovasi $e < 1$, cioè quando la curva è un'elisse, e la seconda quando risulta $e > 1$, cioè quando il corpo celeste si muove in un'iperbola. Ciò comprova vie meglio quanto si è detto al numero 5 che dei due integrali dati dalle equazioni (38), (39) sarà più comodo il primo od il secondo, conforme a che la curva percorsa dal corpo celeste sarà un'elisse od un'iperbola.

42.

Ritrovato l'angolo ε corrispondente ad un'osservazione per mezzo d'alcuna delle equazioni 177), si potrà determinare il tempo del pas-

saggio del corpo celeste al perielio che, unito agli elementi Ω, i, e, π e q già ritrovati, formerà il sesto e darà la completa determinazione di tutti gli elementi dell'orbita.

Richiamiamo perciò le equazioni (38), (39) e riponiamo per θ il valore $t\sqrt{g}$, comprendendo nella costante indeterminata Θ il divisore $\sqrt{g}$, avremo

$$(178) \qquad t - \Theta = \sqrt{\left(\frac{u^3}{g}\right)}\{\varepsilon - \sin \varepsilon\}$$

$$(179) \qquad t - \Theta = \sqrt{\left(\frac{-a^3}{g}\right)}\{e \tan \varepsilon - \log \tan (45 + \tfrac{1}{2}\varepsilon)\}$$

Se ora si suppone che nell'equazione (176) sia $\upsilon = 0$, è chiaro che in quest'ipotesi il corpo celeste si troverà al perielio, e risultando per questo valore di υ dalle formole (177) parimente $\varepsilon = 0$, avremo il tempo t del passaggio al perielio facendo nelle precedenti equazioni $\varepsilon = 0$. Ora supposto $\varepsilon = 0$ nelle dette equazioni, si trova

$$t - \Theta = 0$$

o sia

$$t = \Theta$$

Quindi il valore della costante Θ rappresenterà il tempo del passaggio del corpo celeste al perielio.

Per determinare questo valore supponiamo che sia t' il numero de' giorni scorsi da un'epoca fissa, per esempio dal principio dell'anno sino all'istante di un'osservazione, ed ε l'anomalia eccentrica corrispondente a questa osservazione dedotta da alcuna delle equazioni (177), indicando con s il numero che risulterà dal valore del secondo membro di quella delle equazioni (178), (179) che sarà più opportuna di usare, avremo

$$t' - \Theta = s$$

Dalla quale equazione dedurremo il valore dell'incognita Θ, che sarà

$$(180) \qquad \Theta = t' - s$$

e rappresenterà per ciò che abbiamo detto il numero dei giorni di cui il momento del passaggio del corpo celeste al perielio precederà o sarà preceduto dal primo giorno dell'anno.

Allorchè l'orbita percorsa dal corpo celeste è parabolica pel calcolo della costante Θ si risparmia il valore di ε, come risulta dall'equazione (41), nella quale il valore del secondo membro è espresso direttamente per υ: indicando poi con s il valore del secondo membro della detta equazione corrispondente all'osservazione t', avremo parimente

$$(180) \qquad \Theta = t' - s.$$

Il valore di s che può trovarsi coll'equazione (41) deducesi in questo caso anche più brevemente, come è noto, facendo uso delle tavole del vero e medio movimento parabolico delle comete [1].

---

[1] [Carlo Federico Gauss, in *Gotting. gelehrte Anzeigen* (Gottinga, 8 Settembre 1817), Stuck 144, pag. 1433-38 diede di questa prima parte della *Nuova analisi del problema di determinare le orbite dei corpi celesti* una ampia recensione, che fu ristampata in *Gauss Werke*, Band VI, pag. 601-603].

PARTE SECONDA

ARTICOLO I.

Prospetto delle formole da calcolarsi per determinare l'orbita di un corpo celeste quando si prende per piano delle coordinate xy *quello dell'eclittica.*

43.

Nell'analisi precedente, per conservare tutta la possibile generalità e per dare alle formole una disposizione più regolare, abbiamo riferite le posizioni tanto della terra che del corpo celeste a tre piani coordinati rettangoli che potevano essere posti comunque. Se però qual caso particolare supporremo che il piano delle *xy* sia quello in cui si muove la terra, o sia quello dell' eclittica, è facile il vedere che le formole ritrovate acquisteranno una maggiore semplicità, e diverranno più brevi pel calcolo numerico. Prenderò quindi in quest' articolo ad esporre la riduzione della quale sono suscettibili le dette formole nella condizione che il piano delle *xy* sia quello dell' eclittica, tanto più che a questo caso siccome il più semplice, gli astronomi riducono comunemente le loro applicazioni.

Incominciando la riduzione dalle prime formole dell'analisi, faremo osservare che, nella supposizione che il piano delle *xy* sia quello dell' eclittica, e che l' asse delle *x* passi pel punto 0° d'Ariete, le quantità Λ', Λ'', Λ''' nelle equazioni (7) rappresentano le longitudini geocentriche del corpo celeste nelle tre osservazioni, e che le altre λ', λ'', λ''', espri-

mono le latitudini geocentriche del medesimo. Prese adunque le lettere Λ' ecc., λ' ecc. in questo significato, e fatto per semplicità, come è permesso, $o' = o'' = o''' = 1$, si avrà

$$(1)\qquad \begin{aligned} m' &= \cot\lambda' \cos\Lambda' & n' &= \cot\lambda' \sin\Lambda' \\ m'' &= \cot\lambda'' \cos\Lambda'' & n'' &= \cot\lambda'' \sin\Lambda'' \\ m''' &= \cot\lambda''' \cos\Lambda''' & n''' &= \cot\lambda''' \sin\Lambda''' \end{aligned}$$

Ora avendosi supposto in generale al numero 8

$$\delta = \frac{\Delta}{\sqrt{\{m^2 + n^2 + o^2\}}}$$

dove Δ rappresenta la distanza del corpo celeste dalla terra, risulterà per la sostituzione dei precedenti valori di m, n, o

$$(2)\qquad \delta' = \Delta' \sin\lambda', \qquad \delta'' = \Delta'' \sin\lambda'', \qquad \delta''' = \Delta''' \sin\lambda'''$$

Dal che si vede che nel presente caso le lettere δ', δ, δ''' indicano le elevazioni del corpo celeste sul piano dell' eclittica negl' istanti delle tre osservazioni.

Al numero 9 abbiamo posto

$$X = \mu D, \qquad Y = \nu D, \qquad Z = \omega D$$

Ora essendo X, Y, Z le coordinate della terra, siccome il piano delle xy coincide con quello nel quale muovesi la medesima, sarà $Z = 0$, e quindi risulterà parimente $\omega = 0$. Potremo adunque nelle nostre equazioni supporre

$$(3)\qquad \mu = \cos L, \qquad \nu = \sin L$$

indicando con L la longitudine della terra.

Essendo inoltre

$$R = \sqrt{\{X^2 + Y^2 + Z^2\}}$$

troveremo coi precedenti valori di μ, ν, ω

$$(4)\qquad R = D$$

Dal che dedurremo che per la lettera D dovrà intendersi la distanza della terra dal sole, e che quindi le lettere, D', D'', D''' rappresenteranno queste tre distanze nei tempi delle tre osservazioni.

Non tralasceremo d'osservare che la supposizione di essere il piano delle xy quello dell' eclittica conducendoci alla conseguenza di avere $i = 0$, le equazioni (149), (150), (151) della prima parte daranno perciò

$$(5)\qquad C''' = 0, \qquad C'' = 0, \qquad C' = \sqrt{P}$$

44.

Questo premesso, apparisce tosto cosa diventano le quantità b_1^{I}, b_1^{II}, b_1^{III}, b_2^{I}, ecc. delle quali abbiamo dato le espressioni al numero 9, e che entrano come principali nelle nostre equazioni. Siccome abbiamo in generale

$$(6)\qquad o = 1 \qquad \omega = 0$$

si troverà che i valori delle quantità b_1^{I}, b_2^{I}, b_2^{III}, b_3^{III}, che sono le sole b delle quali abbiamo bisogno, verranno così espressi

$$(7)\qquad \begin{aligned} b_1^{\mathrm{I}} &= \mu'(n' - n'') - \nu'(m' - m'') \\ b_2^{\mathrm{I}} &= \mu''(n' - n'') - \nu''(m' - m'') \\ b_2^{\mathrm{III}} &= \mu''(n'' - n''') - \nu''(m'' - m''') \\ b_3^{\mathrm{III}} &= \mu'''(n'' - n''') - \nu'''(m'' - m''') \end{aligned}$$

Parimente si vedrà che la quantità β data dall' equazione (86) del numero 13 ora sarà rappresentata dall' equazione

$$(8)\qquad \beta = (m' - m'')(n'' - n''') - (n' - n'')(m'' - m''')$$

Le quantità b_1^{I}, b_2^{I}, b_2^{III}, b_3^{III}, β per la sostituzione dei valori trigonometrici (1), (3) di m', n', ecc., μ', ν', ecc. sono suscettibili d' essere

poste sotto varie eleganti formole, come può vedersi nella bella Memoria di Lagrange inserita fra quelle dell' Accademia di Berlino dell' anno 1783, e recentemente nella sua seconda edizione della *Mécanique analytique*; noi le conserveremo nulladimeno sotto questa loro primitiva forma, perchè il calcolo numerico delle nostre equazioni riesce più breve.

45.

Dai valori di b_1^{I}, b_3^{III} si avranno immediatamente quelli di a_1^{I}, a_3^{III}, giacchè le equazioni (128) nel presente caso danno

$$(9) \qquad a_1^{\text{I}} = b_1^{\text{I}} : sin\,(L'' - L') \quad a_3^{\text{III}} = b_3^{\text{III}} : sin\,(L''' - L'')$$

46.

Le formole (124) subiscono nessuna variazione; faremo soltanto osservare che se si suppongono fatte le osservazioni ad eguali intervalli di tempo, così che sia $\theta' = \theta'''$, si avrà $\sigma = 1$, $\sigma_1 = 2$, $\rho = 2$, $\rho_2 = 2$, e quindi dalle equazioni (113) si otterrà

$$\gamma^{\text{III}} = -3\, b_2^{\text{III}}\, D'' \qquad \gamma^{\text{I}} = -3\, b_2^{\text{I}}\, D''$$

e dalle (124)

$$(10) \qquad a_1^{\text{I}} = -\frac{1}{6}\frac{6}{b_2^{\text{III}}}\frac{D'}{D''} \qquad a_3^{\text{III}} = -\frac{1}{6}\frac{6}{b_2^{\text{I}}}\frac{D'''}{D''}$$

i quali valori di a_1^{I}, a_3^{III} sono più semplici e spediti a calcolarsi.

47.

Essendo in generale nella citata posizione del piano delle xy

$$o = 1 \qquad \omega = 0$$

i valori di d', d_1'; f', f_1'; g', g_1' dati al numero 27 diverranno

$$(11) \qquad \begin{aligned} d' &= 1 & d_1' &= a_1^{\text{I}} : a_3^{\text{III}} \\ f' &= n' + \alpha_1^{\text{I}}\,\nu' & f_1' &= (n''' + \alpha_3^{\text{III}}\,\nu''')\, a_1^{\text{I}} : a_3^{\text{III}} \\ g' &= m' + \alpha_1^{\text{I}}\,\mu' & g_1' &= (m''' + \alpha_3^{\text{III}}\,\mu''')\, a_1^{\text{I}} : a_3^{\text{III}} \end{aligned}$$

Così essendo pure $C''' = C'' = 0$, facendo come al precitato numero

$$(12) \qquad \frac{f' - f_1'}{d' - d_1'} = h' \qquad \frac{g' - g_1'}{d' - d_1'} = k'$$

la prima delle equazioni (134) prenderà ora la forma

$$(13) \qquad k'c''' - h'c'' + c' - C' = 0$$

48.

Un altro gruppo di tre osservazioni somministrerà, come abbiamo detto al numero 29, una seconda equazione che, indicando con $h'_{(1)}$, $k'_{(1)}$ i coefficienti formati nella stessa maniera dei precedenti h', k', sarà

$$(14) \qquad k'_{(1)}\, c''' - h'_{(1)}\, c'' + c' - C' = 0$$

Vi è però una riflessione da farsi che abbrevia notabilmente il calcolo. Se per formare questo secondo gruppo di osservazioni ne prendiamo due comuni al precedente, per esempio la seconda e la terza, e ne aggiungiamo soltanto una quarta, posponendo al solito l' indice $_{(1)}$ alle quantità appartenenti al secondo gruppo per distinguerle da quelle del primo, è facile il vedere che sarà

$$\begin{aligned} m'' &= m'_{(1)} & n'' &= n'_{(1)} \\ m''' &= m''_{(1)} & n''' &= n''_{(1)} \\ \mu'' &= \mu'_{(1)} & \nu'' &= \nu'_{(1)} \\ \mu''' &= \mu''_{(1)} & \nu''' &= \nu''_{(1)} \end{aligned}$$

e che quindi avremo

$$b_2^{\text{III}} = b_{1(1)}^{\text{I}} \qquad b_2^{\text{III}} = b_{2(1)}^{\text{I}}$$

onde una gran parte delle quantità componenti la seconda equazione si troverà già calcolata precedentemente. Questa scelta d'osservazioni sarà perciò preferibile, ed in tal modo la soluzione del problema non esigerà più di quattro osservazioni.

49.

Dalle due precedenti equazioni (13) e (14) si ricaveranno, come fu già detto al numero 25, i valori di c''', c'', ciò che si otterrà facendo

$$(15) \qquad \frac{h'_{(1)} - h'}{h' k'_{(1)} - k' h'_{(1)}} = M \qquad \frac{k'_{(1)} - k'}{h' k'_{(1)} - k' h'_{(1)}} = N$$

e poi

$$(16) \qquad c''' = -M (C' - c'), \qquad (17) \qquad c'' = -N (C' - c')$$

Quindi la formola (141) del numero 31, facendo uso delle riduzioni che somministrano le precedenti equazioni (5), (6), e supponendo

$$(18) \qquad O'' = \frac{d_1' - f_1' + g_1' M}{a_1^1}$$

si ridurrà alla seguente, la quale darà il valore di $C' - c'$ così espresso

$$(19) \qquad C' - c' = \frac{\{O'' + \nu'' N - \mu'' M\} C'}{\{o'' - n'' N + m'' M\} O''}$$

Determinato con questa equazione il valore di $C' - c'$, sostituendolo nelle precedenti (16), (17), avremo anche quelli di c''', c''; ed essendo dato C' dall'equazione (5) per mezzo della radice del semiparametro dell'orbita terrestre, sarà noto anche c'. Ora le formole (145), (146), (148) dei numeri 32 e 34, nelle quali Ω indica la longitudine dei nodi, ed i l'inclinazione dell'orbita del corpo celeste col piano xy, danno

$$(20) \qquad \tan \Omega = \frac{c'''}{c''}, \qquad (21) \qquad \tan i = \frac{c'''}{\sin \Omega}$$

$$(22) \qquad \sqrt{p} = \frac{c'}{\cos i}$$

Dedurremo perciò da esse immediatamente e la posizione del piano dell'orbita, e la radice del semiparametro.

50.

Per mezzo del valore di $C' - c'$ e dell'equazione (139) del numero 30, la quale dà

$$(23) \qquad C' \delta'' = O'' (C' - c') D''_{(1)}$$

conosceremo quello di δ'' o sia dell'elevazione del corpo celeste sul piano dell' eclittica nella seconda osservazione; e siccome sostituendo nell' equazione (101) del numero 20 per m'', n'', o''; μ'', ν'', ω'' i valori superiormente dati, si ha il raggio vettore del medesimo così espresso:

$$(24) \qquad r''^2 = D''^2 + 2 \cot \lambda'' \cos (\Lambda'' - L'') D'' \delta'' + \delta''^2 : \sin^2 \lambda''$$

potremo perciò determinare questo raggio vettore, ed in seguito l'argomento di latitudine della medesima osservazione per mezzo della terza delle equazioni segnate (157), la quale nella presente supposizione del piano delle xy dà

$$(25) \qquad \sin u'' = \frac{\delta''}{r'' \sin i}$$

Onde se il corpo celeste sarà una cometa per la quale si possa supporre l'orbita parabolica, e diventi la distanza perielia $q = p$, si otterrà subito l'argomento di latitudine del perielio ϖ, colla formola (40) del numero 5, facendo

$$\cos \tfrac{1}{2} (u'' - \varpi) = \sqrt{\left(\frac{p}{r''}\right)}$$

Trovato ϖ, sarà la longitudine del perielio

$$\Pi = \varpi + \Omega$$

E si avrà finalmente il tempo del passaggio della cometa al perielio per mezzo di q e dell' *anomalia* $u - \varpi$ colla tavola del vero e medio movimento parabolico delle comete, come in tutti i metodi.

51.

Se poi l'orbita non si potrà supporre parabolica, allora facendo

$$O''_{(1)} = \frac{d'_{1(1)} - f'_{1(1)} N + g'_{1(1)} M}{a^1_{1(1)}} \tag{26}$$

avremo, secondo ciò che si è detto al numero 30,

$$C\,\delta''_{(1)} = O''_{(1)}\,(C' - c')\,D''_{(1)} \tag{27}$$

nella quale equazione faremo osservare che nell'adottato sistema di sole quattro osservazioni si ha $\delta''_{(1)} = \delta'''$, $D''_{(1)} = D'''$.

Determinando $\delta''_{(1)}$ con questa equazione similmente che qui sopra si troverà il raggio vettore $r''_{(1)}$, e l'argomento di latitudine $u''_{(1)}$ colle formole

$$r''^2_{(1)} = D''_{(1)} + 2\cot\lambda''_{(1)}\cos(\Lambda''_{(1)} - L''_{(1)})\,D''_{(1)}\delta''_{(1)} + \delta''^2_{(1)} : \sin^2\lambda''_{(1)} \tag{28}$$

$$\sin u''_{(1)} = \frac{\delta''_{(1)}}{r''_{(1)} \sin i} \tag{29}$$

e quindi, come è stato dimostrato al num. 38, supponendo

$$\frac{p}{r''} - 1 = q'' \qquad \frac{p}{r''_{(1)}} - 1 = q''_{(1)}$$

ricaveremo l' argomento di latitudine del perielio colla formola (170) che nel presente caso diviene

$$\tan\left(\tfrac{1}{2}u'' + \tfrac{1}{2}u''_{(1)} - \varpi\right) = \frac{q'' - q''_{(1)}}{q'' + q''_{(1)}} \cot\tfrac{1}{2}\left(u''_{(1)} - u''\right) \tag{30}$$

Coll' argomento di latitudine del perielio avremo la longitudine del detto punto, come prima, espressa dalla formola

$$\pi = \varpi + \Omega \tag{31}$$

Indi troveremo l'eccentricità che sarà data dalla seguente

$$e = \frac{q'' - q''_{(1)}}{2\sin\frac{1}{2}(u''_{(1)} - u'')\sin\left(\frac{1}{2}u'' + \frac{1}{2}u''_{(1)} - \varpi\right)} \tag{32}$$

e finalmente si dedurrà la distanza perielia q calcolando la formola (174) del numero 40

$$q = \frac{p}{1 + e} \tag{33}$$

Determinati per tal modo tutti i precedenti elementi, non resterà più che da trovarsi il tempo del passaggio al perielio, il che si otterrà colle note formole (175), (177), (178), (180): e se le orbite saranno molto eccentriche, nel qual caso le citate formole sono meno atte ad essere calcolate con precisione, si potrà ricorrere ai mezzi insegnati dal celebre professore Gauss ai numeri 37, 39, 41 della sua *Theoria motus etc.* che mi sembrano agli altri preferibili.

Avendo così radunate come in un quadro tutte le formole necessarie pel calcolo dell'orbita di un corpo celeste riferito all'eclittica, il che potrà esser utile a coloro che volessero intraprendere una tale ricerca con questo metodo, esporrò nel seguente articolo un esempio numerico del suddetto calcolo, ciò che mostrerà vie meglio l'uso ed il grado d'approssimazione delle riportate formole.

ARTICOLO II.

Esempio numerico istituito sulla prima cometa dell'anno 1759.

52.

La maggior parte degli astronomi che hanno proposto dei nuovi metodi per determinare le orbite delle comete, hanno scelta questa per farne oggetto delle loro applicazioni; noi gli imiteremo, tanto più che il chiarissimo signor Delambre nella nuova sua *Astronomia teorico-pra-*

tica ha calcolato cogli elementi elittici di Klinkenberg una tavola dei luoghi geocentrici della detta cometa e dei corrispondenti luoghi del sole, la quale è appunto diretta a somministrare un sussidio per coloro che volessero provare qualche nuovo metodo.

Facendo uso di sole quattro osservazioni, io ho desunto dalla detta tavola i seguenti luoghi colle rispettive loro epoche [1].

	Giorni delle osservazioni	Longitudini della cometa	Latitudini della cometa	Longitudini della terra	Logaritmi della distanza della terra dal sole
Maggio	1,446933	172 15 51,16	—31 15 16,46	221 10 41	0,003811
	11,446933	159 33 28,11	—18 32 27,84	230 50 17	0,004777
	21,446933	157 33 49,23	—15 2 18,73	240 27 26	0,005640
	31,446933	157 32 23,17	—13 24 34,98	250 2 48	0,006320

Con queste longitudini e latitudini geocentriche della cometa comincio il calcolo delle quantità m', n', m'', n'', ecc. secondo le formole del numero 43, equazioni (1), nel modo che segue:

$$\log\cos\Lambda' = 9{,}9960295n \qquad \log\sin\Lambda' = 9{,}1290617$$
$$\log\cot\lambda' = 0{,}2168656n \qquad 0{,}2168656n$$
$$\log m' = 0{,}2128951 \qquad \log n' = 9{,}3459273n$$

$$\log\cos\Lambda'' = 9{,}9717512n \qquad \log\sin\Lambda'' = 9{,}5431515$$
$$\log\cot\lambda'' = 0{,}4744467n \qquad 0{,}4744467n$$
$$\log m'' = 0{,}4461979n \qquad \log n'' = 0{,}0175982n$$

$$\log\cos\Lambda''' = 9{,}9658149n \qquad \log\sin\Lambda''' = 9{,}5816726$$
$$\log\cot\lambda''' = 0{,}5707805n \qquad 0{,}5707805n$$
$$\log m''' = 0{,}5365954 \qquad \log n''' = 0{,}1524531n$$

$$\log\cos\Lambda'''' = 9{,}9657401n \qquad \log\sin\Lambda'''' = 9{,}5821112$$
$$\log\cot\lambda'''' = 0{,}6226704n \qquad 0{,}6226704n$$
$$\log m'''' = 0{,}5884105n \qquad \log n'''' = 0{,}2047816n$$

[1] Essendomi già inoltrato nel calcolo dell'orbita, ho riconosciuto che i luoghi geocentrici riportati nella citata tavola del sig. Delambre dovevano essere cangiati un poco, ed essere quindi ridotti ai surriferiti.

Trovati i valori di $\log m'$, $\log n'$, $\log m''$, ecc., passo ora col mezzo delle formole (7), (9) a determinare i valori di b_1^{I}, b_2^{I}, b_2^{II}, b_3^{III}, non che quelli di a_1^{I}, a_3^{III}, dei quali ecco il processo di calcolo:

$$m' = 1{,}6326575 \qquad n' = -0{,}2217825$$
$$m'' = 2{,}7938164 \qquad n'' = -1{,}0413534$$
$$m' - m'' = -1{,}1611589 \qquad n' - n'' = 0{,}8195709$$

$$\log(m' - m'') = 0{,}0648916n \qquad \log(n' - n'') = 9{,}9135866$$
$$\log\nu' = 9{,}8184906n \qquad \log\mu' = 9{,}8766030n$$
$$\log\nu'' = 9{,}8895057n \qquad \log\mu'' = 9{,}8003833n$$

$$\log\nu'(m' - m'') = 9{,}8833822 \qquad \log\mu''(n' - n'') = 9{,}7901896n$$
$$\log\nu''(m' - m'') = 9{,}9543973 \qquad \log\mu''(n' - n'') = 9{,}7139699n$$

$$\mu'(n' - n'') = -0{,}6168643 \qquad \mu''(n' - n'') = -0{,}5175710$$
$$\nu'(m' - m'') = 0{,}7645084 \qquad \nu''(m' - m'') = 0{,}9003212$$
$$b_1^{\mathrm{I}} = -1{,}3813727 \qquad b_2^{\mathrm{I}} = -1{,}4178922$$

$$\log b_1^{\mathrm{I}} = 0{,}1403110n$$
$$C\log\sin(L'' - L') = 0{,}7752050$$
$$\log a_1^{\mathrm{I}} = 0{,}9155160n$$

$$m'' = 2{,}7938164 \qquad n'' = -1{,}0413534$$
$$m''' = 3{,}4402932 \qquad n''' = -1{,}4205388$$
$$m'' - m''' = -0{,}6464768 \qquad n'' - n''' = 0{,}3791854$$

$$\log(m'' - m''') = 9{,}8105530n \qquad \log(n'' - n''') = 9{,}5788517$$
$$\log\nu'' = 9{,}8895057n \qquad \log\mu'' = 9{,}8003833n$$
$$\log\nu''' = 9{,}9395131n \qquad \log\mu''' = 9{,}6929114n$$

$$\log\nu''(m'' - m''') = 9{,}7000587 \qquad \log\mu''(n'' - n''') = 9{,}3792350n$$
$$\log\nu'''(m''' - m''') = 9{,}7500661 \qquad \log\mu'''(n'' - n''') = 9{,}2717631n$$

$$\mu''(n'' - n''') = -0{,}2394611 \qquad \mu'''(n'' - n''') = -0{,}1869662$$
$$\nu''(m'' - m''') = 0{,}5012550 \qquad \nu'''(m'' - m''') = 0{,}5624269$$
$$b_{1(1)}^{\mathrm{I}} = b_2^{\mathrm{III}} = -0{,}7407161 \qquad b_{1(1)}^{\mathrm{I}} = b_3^{\mathrm{III}} = -0{,}7493931$$

$$\log b^{1}_{1(1)} = 9{,}8696518n$$
$$\log b^{111}_{3} = 9{,}8747097n$$
$$L''' - L'' = 9^\circ\, 37'\, 9'' \qquad Clogsin\,(L''' - L'') = 0{,}7770272$$
$$\log a^{1}_{1(1)} = 0{,}6466790n$$
$$\log a^{111}_{3} = 0{,}6518369n$$

$$m''' = 3{,}4402932 \qquad n''' = -1{,}4205388$$
$$m^{iv} = 3{,}8762380 \qquad n^{iv} = -1{,}6024396$$
$$m''' - m^{iv} = 0{,}4359448 \qquad n''' - n^{iv} = 0{,}1819008$$
$$\log (m''' - m^{iv}) = 9{,}6394315n \qquad \log (n''' - n^{iv}) = 9{,}2598346$$
$$\log \nu''' = 9{,}9395131n \qquad \log \mu''' = 9{,}6929114n$$
$$\log \nu^{iv} = 9{,}9731144n \qquad \log \mu^{iv} = 9{,}5330786n$$
$$\log \nu''' (m''' - m^{iv}) = 9{,}5789446 \qquad \log \mu''' (n''' - n^{iv}) = 8{,}9527460n$$
$$\log \nu^{iv} (m''' - m^{iv}) = 9{,}6125459 \qquad \log \mu^{iv} (n''' - n''') = 8{,}7929132n$$
$$\mu''' (n''' - n^{iv}) = -0{,}0896904 \qquad \mu^{iv} (n''' - n^{iv}) = -0{,}0620745$$
$$\nu''' (m''' - m^{iv}) = 0{,}3792666 \qquad \nu^{iv} (m''' - m^{iv}) = 0{,}4097754$$
$$b^{111}_{2(1)} = -0{,}4689570 \qquad b^{111}_{3(1)} = -0{,}4718499$$
$$\log b^{111}_{3(1)} = 9{,}6738039n$$
$$L^{iv} - L''' = 9^\circ\, 33'\, 22'' \qquad Clogsin\,(L^{iv} - L''') = 0{,}7783587$$
$$\log a^{111}_{3(1)} = 0{,}4521626n$$

Rimangono ora da calcolarsi le quantità a^{1}_{1}, a^{111}_{3}, $a^{1}_{1(1)}$, $a^{111}_{3(1)}$, ciò che potremo fare approssimatamente colle formole (8), (10) dei numeri 44, 46 nel modo che segue:

$$\log (m' - m'') = 0{,}06489n \qquad \log (n' - n'') = 9{,}91359$$
$$\log (n'' - n''') = 9{,}57885 \qquad \log (m'' - m''') = 9{,}81055n$$
$$\log (m' - m'')(n'' - n''') = 9{,}64374n \qquad \log (n' - n'')(m'' - m''') = 9{,}72414n$$
$$(m' - m'')(n'' - n''') = -0{,}44029$$
$$(n' - n'')(m'' - m''') = -0{,}52983$$
$$\beta = 0{,}08954$$
$$\log \beta = 8{,}95202$$
$$C\log 6 = 9{,}22185$$
$$\log \frac{\beta}{6} = 8{,}17387$$

$$\log b^{111}_{3} = 9{,}86965n \qquad \log b^{1}_{3} = 0{,}15164n$$
$$\log D'' = 0{,}00478 \qquad = 0{,}00478$$
$$C\log \tfrac{1}{3}\gamma^{1} = 0{,}12557 \qquad C\log \tfrac{1}{3}\gamma^{111} = 9{,}84358$$
$$\log \frac{\beta}{6} = 8{,}17387 \qquad = 8{,}17387$$
$$\log D' = 0{,}00381 \qquad \log D''' = 0{,}00564$$
$$\log \alpha^{1}_{1} = 8{,}30325 \qquad \log \alpha^{111}_{3} = 8{,}02309$$
$$\log (m'' - m''') = 9{,}81055n \qquad \log (n'' - n''') = 9{,}57885$$
$$\log (n''' - n^{iv}) = 9{,}25983 \qquad \log (m''' - m^{iv}) = 9{,}63943n$$
$$\log (m'' - m''')(n''' - n^{iv}) = 9{,}07038n \qquad \log (n'' - n''')(m''' - m^{iv}) = 9{,}21828n$$
$$(m'' - m''')(n'' - n^{iv}) = -0{,}11759$$
$$(n'' - n''')(m''' - n''') = -0{,}16530$$
$$\beta_{(1)} = 0{,}04771$$
$$\log \beta_{(1)} = 8{,}67861$$
$$C\log 6 = 9{,}22185$$
$$\log \frac{\beta_{(1)}}{6} = 7{,}90046$$

$$\log b^{111}_{2(1)} = 9{,}67113n \qquad \log b^{1}_{2(1)} = 9{,}87471n$$
$$\log D''' = 0{,}00564 \qquad = 0{,}00564$$
$$C\log \tfrac{1}{3}\gamma^{1}_{(1)} = 0{,}32323 \qquad C\log \tfrac{1}{3}\gamma^{111}_{(1)} = 0{,}11965$$
$$\log \frac{\beta_{(1)}}{6} = 7{,}90046 \qquad = 7{,}90046$$
$$\log D'' = 0{,}00478 \qquad \log D^{iv} = 0{,}00632$$
$$\log \alpha^{1}_{1(1)} = 8{,}22847 \qquad \log \alpha^{111}_{3(1)} = 8{,}02643$$

53.

Calcolate così tutte le quantità che entrano a comporre le equazioni (13), (14), possiamo ora intraprendere la determinazione numerica di queste equazioni.

Calcolo della prima equazione.

$$\log a_1^{\text{I}} = 0{,}91552n$$
$$C \log a_3^{\text{III}} = \underline{9{,}34826n}$$
$$\log d'_1 = \log a_1^{\text{I}} : a_3^{\text{III}} = 0{,}26378$$

$$d = 1$$
$$d_1 = \underline{1{,}83561}$$
$$d - d_1 = -0{,}83561$$

$$\log \alpha_1^{\text{I}} = 8{,}30325$$
$$\log \nu' = \underline{9{,}81849n}$$
$$\log \alpha_1^{\text{I}} \nu' = 8{,}12174$$

$$n' = -0{,}22178$$
$$\alpha_1^{\text{I}} \nu' = \underline{-0{,}01324}$$
$$f = n' + \alpha_1^{\text{I}} \nu' = -0{,}23502$$

$$\log \alpha_3^{\text{III}} = 8{,}02309$$
$$\log \nu''' = \underline{9{,}93951n}$$
$$\log \alpha_3^{\text{III}} \nu''' = 7{,}96260n$$

$$n''' = -1{,}42054$$
$$\alpha_3^{\text{III}} \nu''' = \underline{-0{,}00917}$$
$$n''' + \alpha_3^{\text{III}} \nu''' = -1{,}42971$$

$$\log (n''' + \alpha_3^{\text{III}} \nu''') = 0{,}15525n$$
$$\log \alpha_1^{\text{I}} : a_3^{\text{III}} = \underline{0{,}26378}$$
$$\log f_1 = 0{,}41903n$$

$$f_1 = \underline{-2{,}62440}$$
$$f - f_1 = -2{,}38938$$

$$\log (f - f_1) = 0{,}37829$$
$$C \log (d - d_1) = \underline{0{,}07800n}$$
$$\log h = 0{,}45629n$$

$$h = -2{,}85950$$

$$\log \alpha_1^{\text{I}} = 8{,}30325$$
$$\log \mu' = \underline{9{,}87660n}$$
$$\log \alpha_1^{\text{I}} \mu' = 8{,}17985n$$

$$m' = 1{,}63266$$
$$\alpha_1^{\text{I}} \mu' = \underline{0{,}01513}$$
$$g = 1{,}61753$$

$$\log \alpha_3^{\text{III}} = 8{,}02309$$
$$\log \mu''' = \underline{9{,}69291n}$$
$$\log \alpha_3^{\text{III}} \mu''' = 7{,}71600n$$

$$m''' = 3{,}44029$$
$$\alpha_3^{\text{III}} \mu''' = -0{,}00520$$
$$m''' + \alpha_3^{\text{III}} \mu''' = 3{,}43509$$

$$\log (m''' + \alpha_3^{\text{III}} \mu''') = 0{,}53594$$
$$\log \alpha_1^{\text{I}} : \alpha_3^{\text{III}} = \underline{0{,}26378}$$
$$\log g_1 = 0{,}79972$$

$$g_1 = \underline{6{,}30551}$$
$$g - g_1 = -4{,}68798$$

$$\log (g - g_1) = 0{,}67099n$$
$$C \log (d - d_1) = \underline{0{,}07800n}$$
$$\log k = 0{,}74899$$

$$k = 5{,}61035$$

Coi ritrovati valori di h e k l'equazione (13) diverrà

$$5{,}61035\, c''' + 2{,}85950\, c'' + c' - C' = 0$$

Nello stesso modo eseguiremo ora il calcolo della seconda equazione segnata (14), ommettendo in essa per brevità l'indice (1) a tutte le quantità, fuorchè ai coefficienti finali h, k.

Calcolo della seconda equazione.

$$\log a_1^{\text{I}} = 0{,}64668n$$
$$C \log a_3^{\text{III}} = \underline{9{,}54784n}$$
$$\log d_1 = \log a_1^{\text{I}} : a_3^{\text{III}} = 0{,}19452$$

$$d = 1{,}00000$$
$$d_1 = \underline{1{,}56502}$$
$$d - d_1 = -0{,}56502$$

$$\log \alpha_1^{\text{I}} = 8{,}22847$$
$$\log \nu'' = \underline{9{,}88951n}$$
$$\log \alpha_1^{\text{I}} \nu'' = 8{,}11798n$$

$$n'' = -1{,}04135$$
$$\alpha_1^{\text{I}} \nu'' = \underline{-0{,}01312}$$
$$f = -1{,}05447$$

$$\log \alpha_3^{\text{III}} = 8{,}02643$$
$$\log \nu''' = \underline{9{,}97311n}$$
$$\log \alpha_3^{\text{III}} \nu''' = 7{,}99954n$$

$$n''' = -1{,}60244$$
$$\alpha_3^{\text{III}} \nu''' = \underline{-0{,}00999}$$
$$n''' \alpha_3^{\text{III}} \nu''' = -1{,}61243$$

$$\log (n''' + \alpha_3^{\text{III}} \nu''') = 0{,}20748n$$
$$\log a_1^{\text{I}} : a_3^{\text{III}} = \underline{0{,}19452}$$
$$\log f_1 = 0{,}40200n$$

$$f_1 = \underline{-2{,}52348}$$
$$f - f_1 = -1{,}46901$$

$$\log (f - f_1) = 0{,}16702$$
$$C \log (d - d_1) = \underline{0{,}24794n}$$
$$\log h_{(1)} = 0{,}41496n$$

$$h_{(1)} = -2{,}59992$$

$$\log \alpha_1^{\text{I}} = 8{,}22847$$
$$\log \mu'' = \underline{9{,}80038n}$$
$$\log \alpha_1^{\text{I}} \mu'' = 8{,}02885n$$

$$m'' = 2{,}79382$$
$$\alpha_1^{\text{I}} \mu'' = \underline{-0{,}01069}$$
$$g = 2{,}78313$$

$$\log \alpha_3^{111} = 8{,}02643$$

$$m''' = 3{,}87624 \qquad \log \mu'''' = 9{,}53308n$$

$$\alpha_3^{111}\,\mu''' = -0{,}00362 \qquad \log \alpha_3^{111}\,\mu''' = 7{,}55951n$$

$$m''''\,\alpha_3^{111}\,\mu''' = 3{,}87262 \qquad \log (m'''' + \alpha_3^{111}\,\mu''') = 0{,}58800$$

$$\log a_1^1 : a_3^{111} = 0{,}19452$$

$$g_1 = 6{,}06066 \qquad \log g_1 = 0{,}78252$$

$$g - g_1 = -3{,}27753 \qquad \log (g - g_1) = 0{,}51555n$$

$$C \log (d - d_1) = 0{,}24794n$$

$$k_{(1)} = 5{,}80083 \qquad \log k_{(1)} = 0{,}76349$$

Sostituendo nell' equazione (14) per $h_{(1)}$, $k_{(1)}$ i valori numerici ora ritrovati, la seconda equazione per la determinazione dell' orbita verrà costituita dalla seguente

$$5{,}80083\, c''' + 2{,}59992\, c'' + c' - C' = 0$$

54.

Risolvendo queste due ultime equazioni, ricaveremo i valori di c''', c'' espressi per $C' - c'$, ciò che si riduce, come risulta dal numero 49, a determinare le quantità M, N, delle quali ecco il calcolo :

$$\log h = 0{,}45629n \qquad \log k = 0{,}74899$$

$$\log k_{(1)} = 0{,}76349 \qquad \log h_{(1)} = 0{,}41496n$$

$$\log h\,k_{(1)} = 1{,}21978n \qquad \log k\,h_{(1)} = 1{,}16395n$$

$$h\,k = -16{,}5875$$

$$k\,h_{(1)} = -14{,}5865$$

$$h\,k_{(1)} - k\,h_{(1)} = -\ 2{,}0010$$

$$h_{(1)} = -2{,}59992 \qquad k_{(1)} = 5{,}80083$$

$$h = -2{,}85950 \qquad k = 5{,}61035$$

$$h_{(1)} - h = 0{,}25958 \qquad k_{(1)} - k = 0{,}19048$$

$$\log (h_{(1)} - h) = 9{,}41427 \qquad \log (k_{(1)} - k) = 9{,}27985$$

$$C \log (h\,k_{(1)} - k\,h_{(1)}) = 9{,}69875 \qquad = 9{,}69875n$$

$$\log M = 6{,}11302n \qquad \log N = 8{,}97860n$$

Siccome le equazioni (16), (17) somministrano

$$c''' = -M\,(C' - c') \qquad c'' = -N\,(C' - c')$$

ed in seguito dall'equazione (20) abbiamo

$$\frac{c'''}{c'} = \tan \Omega$$

sarà perciò

$$\tan \Omega = \frac{M}{N} \tag{34}$$

e la longitudine dei nodi si avrà col seguente calcolo :

$$\log M = 9{,}11302$$

$$\log N = 1{,}02140$$

$$\log \tan \Omega = 0{,}13442$$

$$\Omega = 53^\circ\, 43'\, 43''$$

Questo valore di Ω può appartenere tanto al nodo ascendente che discendente; esso corrisponderà al nodo ascendente se troveremo per c''' un valor positivo, e dovrà aumentarsi, secondo è stato detto al numero 32, di 180° se risulterà per c''' un valor negativo.

55.

Secondo le formole (18), (19), (21), (22) del numero 49 espongo ora il

Calcolo dell'inclinazione dell'orbita e della radice del semiparametro.

$$d'_1 = 1{,}83561 \qquad \log f'_1 = 0{,}41903n$$

$$\log N = 8{,}97860n$$

$$f'_1 N = 0{,}24982 \qquad \log f'_1 N = 9{,}39763$$

$$\log g'_1 = 0{,}79972$$
$$\log M = 9{,}11302n$$

$$g'_1 M = -0{,}81797 \qquad \log g'_1 M = 9{,}91274n$$

$$d'_1 - f'_1 N + g'_1 M = 0{,}76782 \qquad \log (d'_1 - f'_1 N + g'_1 M) = 9{,}88526$$
$$C \log a_1^2 = 9{,}08448n$$

$$O'' = -0{,}09327 \qquad \log O'' = 8{,}96974n$$
$$\log \nu'' = 9{,}88951n$$
$$\log N = 8{,}97860n$$

$$\nu'' N = 0{,}07381 \qquad \log \nu'' N = 8{,}86811$$
$$\log \mu'' = 9{,}80038n$$
$$\log M = 9{,}11302n$$

$$\mu'' M = 0{,}08192 \qquad \log \mu'' M = 8{,}91340$$

$$O'' + \nu'' N - \mu'' M = -0{,}10138 \qquad \log (O'' + \nu'' N - \mu'' M) = 9{,}00595n$$
$$\log \sqrt{P} = \log C' = 9{,}99999$$
$$\log (O'' + \nu'' N - \mu'' M)\, C' = 9{,}00594n$$

$$o'' = 1{,}00000$$
$$\log n'' = 0{,}01760n$$
$$\log N = 8{,}97860n$$

$$n'' N = 0{,}09913 \qquad \log n'' N = 8{,}99620$$
$$\log m'' = 0{,}44620$$
$$\log M = 9{,}11302n$$

$$m'' M = 0{,}36243 \qquad \log m'' M = 9{,}55922n$$

$$o'' - n'' N + m'' M = 0{,}53844 \qquad C \log (o'' - n'' N + m'' M) = 0{,}26886$$
$$C \log O'' = 1{,}03026n$$
$$\log (O'' + \nu'' N - \mu'' M)\, C' = 9{,}00584n$$

$$C' - c' = 2{,}01818 \qquad \log (C' - c') = 0{,}30496$$
$$C' = 0{,}99999 \qquad \log M = 9{,}11302n$$

$$c' = -1{,}01819 \qquad \log c'' = 9{,}41798$$
$$C \log c' = 9{,}99217n$$
$$C \log \sin \Omega = 0{,}09354$$

$$i = 162^\circ\, 18'\, 40'' \qquad \log \tan i = 9{,}50369n$$

$$\log c' = 0{,}00783n$$
$$C \log \cos i = 0{,}02103n$$
$$\log \sqrt{p} = 0{,}02886$$

Siccome nel calcolo precedente abbiamo ritrovato per c'' un valor positivo, così riguarderemo il valore di Ω surriferito come quello appartenente al nodo ascendente. Fatto uso di quest'angolo, risultò per i un valore maggiore di 90°, e volendo prendere per inclinazione dell'orbita il suo supplemento, converrebbe poi di notare che il moto è retrogrado; noi però estenderemo ad imitazione del signor Gauss, l'inclinazione del piano dell'orbita da 0° a 180°, come lo indica il calcolo, e così verremo a ritenere il movimento del corpo celeste sempre diretto.

56.

Si possono ora determinare con un breve calcolo anche le elevazioni della cometa sul piano dell'eclittica nella seconda e terza osservazione, o sia i valori di δ'', δ'''. In fatti si ha

$$\log O'' = 8{,}96974n$$
$$\log (C' - c') = 0{,}30496$$
$$C \log C' = 0{,}00001$$
$$\log D'' = 0{,}00478$$
$$\log \delta'' = 9{,}27949n$$

$$d_{1(1)} = 1{,}56502$$
$$\log f_{1(1)} = 0{,}40200n$$
$$\log N = 8{,}97860n$$

$$f_{1(1)} N = 0{,}24021 \qquad \log f_{1(1)} N = 9{,}38060$$
$$\log g_{1(1)} = 0{,}78252$$
$$\log M = 9{,}11302n$$

$$g_{1(1)} M = -0{,}78621 \qquad \log g_{1(1)} M = 9{,}89554n$$

$$d_{1(1)} - f_{1(1)} N + g_{1(1)} M = 0{,}53860 \qquad \log (d_{1(1)} - f_{1(1)} N + g_{1(1)} M) = 9{,}73127$$
$$C \log a_{1(1)}^2 = 9{,}35332n$$

$$\log O''_{(1)} = 9{,}08459n$$
$$\log (C' - c') = 0{,}30496$$
$$C \log C' = 0{,}00001$$
$$\log D''_{(1)} = \log D''' = 0{,}00564$$
$$\log \delta''_{(1)} = \log \delta''' = 0{,}39520n$$

Da questi valori di $log\,\delta''$, $log\,\delta'''$ e dall' inclinazione del piano dell'orbita si deducono, secondo le formole (24), (25), (28), (29) dei numeri 50, 51, i raggi vettori e gli argomenti di latitudine negl'istanti delle due osservazioni intermedie nel seguente modo:

$$\Lambda'' = 159^\circ\,33'\,28'' \qquad log\,2 = 0{,}30103$$
$$L'' = 230\;\;50\;\;17 \qquad log\,cot\,\lambda'' = 0{,}47445n$$
$$\Lambda'' - L'' = 288\;\;34\;\;11 \qquad log\,cos\,(\Lambda'' - L'') = 9{,}50642$$
$$log\,D'' = 0{,}00478$$
$$log\,\delta'' = 9{,}27949n$$
$$2cot\lambda''cos(\Lambda''-L'')D''\delta'' = 0{,}36827 \qquad log2cot\lambda''cos(\Lambda''-L'')D''\delta'' = 9{,}56617$$
$$log\,\delta''^2 = 8{,}55898$$
$$C\,log\,sin^2\lambda'' = 0{,}99519$$
$$\delta''^2 : sin^2\lambda'' = 0{,}35824 \qquad log\,\delta''^2 : sin^2\lambda'' = 9{,}55417$$
$$D''^2 = 1{,}02223 \qquad log\,D''^2 = 0{,}00955$$
$$r''^2 = 1{,}74874 \qquad log\,r''^2 = 0{,}24273$$
$$C\,log\,r'' = 9{,}87864$$
$$log\,\delta'' = 9{,}27949n$$
$$C\,log\,sin\,i = 0{,}51734$$
$$u'' = 208^\circ\,16'\,21'' \qquad log\,sin\,u'' = 9{,}67547n$$
$$\Lambda''' = 157\;\;33\;\;49 \qquad log\,2 = 0{,}30103$$
$$L''' = 240\;\;27\;\;26 \qquad log\,cot\,\lambda''' = 0{,}57078n$$
$$\Lambda''' - L''' = 277\;\;\;6\;\;23 \qquad log\,cos\,(\Lambda''' - L''') = 9{,}09241$$
$$log\,D''' = 0{,}00564$$
$$log\,\delta''' = 9{,}39520n$$
$$2cot\lambda'''cos(L'''-L''')D'''\delta''' = 0{,}23177 \qquad log2cot\lambda'''cos(\Lambda'''-L''')D'''\delta''' = 9{,}36506$$
$$log\,\delta'''^2 = 8{,}79040$$
$$C\,log\,sin^2\lambda''' = 1{,}17183$$
$$\delta'''^2 : sin^2\lambda''' = 0{,}91666 \qquad log\,\delta'''^2 : sin\,\lambda''' = 9{,}96223$$
$$D'''^2 = 1{,}02631 \qquad log\,D'''^2 = 0{,}01128$$
$$r'''^2 = 2{,}17474 \qquad log\,r'''^2 = 0{,}33741$$
$$C\,log\,r''' = 9{,}83130$$
$$log\,\delta''' = 9{,}39520$$
$$C\,log\,sin\,i = 0{,}51734$$
$$u''' = 213^\circ\,40'\,15'' \qquad log\,sin\,u''' = 9{,}74384$$

57.

Con questi valori di $log\,r''$, $log\,r'''$, u'', u''', e col semiparametro sopra determinato possiamo ora ritrovare l'argomento di latitudine del perielio, e quindi la longitudine del medesimo colle formole (30), (31) del numero 51.

Calcolo dell'argomento di latitudine e della longitudine del perielio.

$$u''' = 213^\circ\,40'\,15'' \qquad log\,p = 0{,}05772$$
$$u'' = 208\;\;16\;\;21 \qquad C\,log\,r'' = 9{,}87864$$
$$u''' - u'' = \;\;5\;\;23\;\;54 \qquad C\,log\,r''' = 9{,}83130$$
$$p : r'' = 0{,}86369 \qquad log\,p : r'' = 9{,}93636$$
$$p : r''' = 0{,}77450 \qquad log\,p : r''' = 9{,}88902$$
$$q'' - q''' = 0{,}08919 \qquad log\,(q'' - q''') = 8{,}95032n$$
$$q'' + q''' = -0{,}36281 \qquad C\,log\,(q'' + q''') = 0{,}44152$$
$$\tfrac{1}{2}(u''' - u'') = 2^\circ\,41'\,57'' \qquad log\,cot\,(\tfrac{1}{2}u''' - u'') = 1{,}32657$$
$$log\,tan\,(\tfrac{1}{2}u'' + \tfrac{1}{2}u''' - \tilde{\omega}) = 0{,}71841n$$
$$\tfrac{1}{2}u'' + \tfrac{1}{2}u''' - \tilde{\omega} = 100\;\;49\;\;36$$
$$\tfrac{1}{2}u'' + \tfrac{1}{2}u''' = 210\;\;58\;\;18$$
$$\tilde{\omega} = 110\;\;\;8\;\;42$$
$$\Omega = \;\;53\;\;43\;\;43$$
$$\Pi = 163\;\;52\;\;25$$

58.

Calcoleremo finalmente l'eccentricità e e la distanza perielia q colle formole (32), (33) dello stesso numero 51 nel modo che segue:

Calcolo dell'eccentricità e della distanza perielia.

$$q'' - q''' = 0{,}08919 \qquad log\,(q'' - q''') = 8{,}95032$$
$$\tfrac{1}{2}(u''' - u'') = 2^\circ\,41'\,57'' \qquad C\,log\,sin\,\tfrac{1}{2}(u''' - u'') = 1{,}32705$$
$$\tfrac{1}{2}u'' + \tfrac{1}{2}u''' - \tilde{\omega} = 100\;\;49\;\;36 \qquad C\,log\,sin\,(\tfrac{1}{2}u'' + \tfrac{1}{2}u''' - \tilde{\omega}) = 0{,}00780$$
$$C\,log\,2 = 9{,}69897$$
$$log\,e = 9{,}98414$$

$$e = 0{,}96414$$
$$1 = 1$$
$$1 + e = 1{,}96414 \qquad C \log(1+e) = 9{,}70683$$
$$\log p = 0{,}05772$$
$$\log q = 9{,}76455$$

59.

Rimane ora da trovarsi il tempo del passaggio della cometa al perielio: per tale ricerca, essendo l'eccentricità molto grande, ebbi ricorso alle sovra citate formole della *Theoria motus corporum cœlestium etc.*, e servendomi dell'anomalia della seconda osservazione, mi risultò

$$\Theta = 71{,}4485.$$

60.

Unisco tutti i ritrovati elementi qui sotto in una tavola, ponendovi a fianco i veri dati da Klinkenberg sui quali sono stati calcolati i luoghi geocentrici, acciò si possa instituire il confronto.

Elementi	Approssimati	Veri
Passaggio al perielio	71,4485	71,546933
Log. della distanza perielia . .	9,76455	9,7656484
Eccentricità	0,96414	0,9676457
Longitudine del perielio . . .	163° 52′ 25″	164° 11′ 52″
Inclinazione	162 18 40	162 19 55
Longitud. del nodo ascendente .	53 43 43	53 45 35

L'approssimazione di cui godono gli elementi che abbiamo ritrovato ci dà a dividere che le quantità che ci siamo fatto lecito di trascurare nel valutare le $a_1^{\prime}$, $a_3^{\prime\prime\prime}$, ecc. sono molto piccole ancorchè le osservazioni

distassero di 10 giorni. A questo proposito aggiungerò che quand' anche s'impiegassero delle osservazioni distanti fra loro di 15 o 20 giorni, si otterrà una sufficiente approssimazione, ed in molti casi ove le quantità β, $\beta_{(1)}$ rimangono ancora piccole si potranno spingere gl'intervalli di tempo fra le osservazioni ad un mese e più.

Per conseguire i riferiti elementi non ci fu d'uopo cercar sulle tavole che 140 logaritmi, e 112 sarebbero bastati se avessimo voluto supporre l'orbita parabolica, perchè in tal caso si avrebbe potuto risparmiare il calcolo di $\log \delta'''$, $\log r'''$, u''', e e $\log q$, essendo in questo caso $q = \frac{1}{2}p$, ed il valore di II non ci sarebbe costato che un logaritmo. Il signor Delambre riportando nel suo Trattato d'Astronomia i metodi pel calcolo delle orbite paraboliche delle comete del dottor Olbers e del signor Legendre, i quali sono riconosciuti pei più brevi, assegna tutt'al più per la ricerca di tutti gli elementi (ommesso parimente il passaggio al perielio, il calcolo del quale è comune ed eguale in tutti i metodi) 200 logaritmi al primo, e 160 al secondo, e negli esempi che egli arreca ne impiega 130 col metodo del primo, e 128 con quello del secondo. Così il metodo proposto unisce al pregio di una maggior semplicità di calcolo anche quello di una maggior brevità.

ARTICOLO III.

Formole per valutare l' influenza degli errori delle osservazioni sugli elementi dell'orbita.

61.

Dalle formole esposte e dai calcoli testè eseguiti appare evidentemente che i valori di tutti gli elementi dell'orbita dipendono principalmente dalle quantità M ed N, talmente che l'approssimazione di cui godranno i detti elementi sarà collegata a quella colla quale le medesime quantità M, N saranno state apprezzate. Ora le formole che somministrano i valori di M ed N sono soggette a due specie d'errori; la prima dipende dalla difficoltà che s'incontra nell'osservare per cui i dati che si assumono dalle osservazioni, non si possono risguardare a tutto rigore esatti, ma soltanto

approssimati; la seconda è dovuta ai termini che nel valutare le a_1^{I}, a_3^{III}, ecc. ci siamo fatto lecito di trascurare.

L'influenza degli errori della prima specie è sempre molto sensibile quando l'orbita è determinata con osservazioni vicine, come lo esigono le soluzioni tutte di questo problema: per evitare l'effetto della medesima altro mezzo non abbiamo che di aumentare le osservazioni e correggere gli elementi in modo che soddisfacciano coi minori errori possibili a tutte le osservazioni. Prima però d'intraprendere dei nuovi calcoli è bene che l'astronomo dietro gli errori probabili delle osservazioni sappia valutare il grado di fiducia che meritano gli elementi ritrovati, perciò esporremo in quest'articolo alcuni mezzi onde ottenere quest'intento.

62.

Il ripiego che si presenta a primo aspetto si è di cercare, variando un poco le longitudini e latitudini delle osservazioni, dei nuovi valori di M ed N, i quali paragonati ai primi colle differenze faranno conoscere il rapporto che hanno le loro variazioni cogli errori delle osservazioni. Per provare anche questo mezzo io ho calcolato i logaritmi di M ed N colle longitudini e latitudini geocentriche date dalla suddetta tavola del signor Delambre [1], le quali erano ora maggiori, ora minori di quelle che noi abbiamo impiegate nelle quantità seguenti:

$$d\Lambda' = -2'\,5'',16 \qquad d\lambda' = -7'',46$$
$$d\Lambda'' = +24'',89 \qquad d\lambda'' = -27'',84$$
$$d\Lambda''' = +13'',77 \qquad d\lambda''' = -15'',73$$
$$d\Lambda'''' = +15'',83 \qquad d\lambda'''' = -11'',98$$

Calle longitudini e latitudini geocentriehe così variate seguendo lo stesso processo di calcolo col quale nell'articolo precedente si sono ottenuti i logaritmi di M ed N, ho ritrovato, i valori di $log\,M$, $log\,N$ che sieguono:

$$log\,M = 9{,}11140n \qquad log\,N = 8{,}98216n$$

i quali danno per la longitudine dei nodi l'angolo

[1] Vedi la nota del numero 52.

$$\Omega = 53^\circ\,24'\,8''$$

I veri valori di $log\,M$, $log\,N$ sono

$$log\,N = 9{,}1131314u \qquad log\,N = 8{,}9782273n$$

dai quali risulta la longitudine dei nodi

$$\Omega = 53^\circ\,45'\,35''$$

63.

Il mezzo più diretto onde illuminarci sull'effetto che gli errori delle osservazioni producono nei valori di $log\,M$, $log\,N$ parmi quello di cercare col calcolo differenziale le variazioni delle stesse quantità, supponendo variate le longitudini e latitudini geocentriche. È per questo che riporterò qui le espressioni delle dette differenziali che applicherò in seguito ad un esempio.

Primieramente differenziando le equazioni (1) si ha

$$(35)\quad \begin{aligned} \left(\frac{dm}{d\Lambda}\right) &= -n & \left(\frac{dm}{d\lambda}\right) &= -m\tan\lambda\,\mathrm{cosec}^2\lambda \\ \left(\frac{dn}{d\Lambda}\right) &= m & \left(\frac{dn}{d\lambda}\right) &= -n\tan\lambda\,\mathrm{cosec}^2\lambda \end{aligned}$$

e poi le (7) danno

$$(36)\quad \begin{aligned} \left(\frac{db_1^{\mathrm{I}}}{d\Lambda'}\right) &= \cot\lambda'\cos(L'-\Lambda') & \left(\frac{db_1^{\mathrm{I}}}{d\lambda'}\right) &= \mathrm{cosec}^2\lambda'\sin(L'-\Lambda') \\ \left(\frac{db_1^{\mathrm{I}}}{d\Lambda''}\right) &= -\cot\lambda''\cos(L'-\Lambda'') & \left(\frac{db_1^{\mathrm{I}}}{d\lambda''}\right) &= -\mathrm{cosec}^2\lambda''\sin(L'-\Lambda'') \\ \left(\frac{db_2^{\mathrm{I}}}{d\Lambda'}\right) &= \cot\lambda'\cos(L''-\Lambda') & \left(\frac{db_2^{\mathrm{I}}}{d\lambda'}\right) &= \mathrm{cosec}^2\lambda'\sin(L''-\Lambda') \\ \left(\frac{db_2^{\mathrm{I}}}{d\Lambda''}\right) &= -\cot\lambda''\cos(L''-\Lambda'') & \left(\frac{db_2^{\mathrm{I}}}{d\lambda''}\right) &= -\mathrm{cosec}^2\lambda''\sin(L''-\Lambda'') \end{aligned}$$

Facendo aumentare nei secondi membri di queste equazioni gli apici di un'unità, risulteranno i valori delle funzioni prime

$$\left(\frac{db_2^{111}}{d\Lambda''}\right),\ \left(\frac{db_2^{111}}{d\lambda''}\right),\ \left(\frac{db_2^{111}}{d\Lambda'''}\right),\ \left(\frac{db_2^{111}}{d\lambda'''}\right),\ \left(\frac{db_3^{111}}{d\Lambda''}\right),\ \left(\frac{db_3^{111}}{d\lambda''}\right),\ \left(\frac{db_3^{111}}{d\Lambda'''}\right),\ \left(\frac{db_3^{111}}{d\lambda'''}\right).$$

Colle differenziazioni delle equazioni (8) si otterrà

$$(37)\quad \begin{aligned}
\left(\frac{d\beta}{d\Lambda'}\right) &= -\{(n''-n''')\,n' + (m''-m''')\,m'\}\\
\left(\frac{d\beta}{d\lambda'}\right) &= -\{n''-n''')\,m' - (m''-m''')\,n'\}\,\tan\lambda'\,\operatorname{cosec}^2\lambda'\\
\left(\frac{d\beta}{d\Lambda''}\right) &= \{(n'-n''')\,n'' + (m'-m''')\,m''\}\\
\left(\frac{d\beta}{d\lambda''}\right) &= \{(n'-n''')\,m'' - (m'-m''')\,n''\}\,\tan\lambda''\,\operatorname{cosec}^2\lambda''\\
\left(\frac{d\beta}{d\Lambda'''}\right) &= -\{(n'-n'')\,n''' + (m'-m'')\,m'''\}\\
\left(\frac{d\beta}{d\lambda'''}\right) &= -\{(n'-n'')\,m''' - (m'-m'')\,n'''\}\,\tan\lambda'''\,\operatorname{cosec}^2\lambda'''
\end{aligned}$$

Avendosi così le funzioni prime delle quantità b, β, potremo per mezzo di queste ottenere i valori delle funzioni prime delle quantità a_1^1, a_3^{111}; α_1^1, α_3^{111} colla differenziazione delle equazioni (9), (10); e si avrà

$$(38)\quad \begin{aligned}
\left(\frac{da_1^1}{d\Lambda}\right) &= \frac{1}{\sin(L''-L')}\left(\frac{db_1^1}{d\Lambda}\right)\\
\left(\frac{da_1^1}{d\lambda}\right) &= \frac{1}{\sin(L''-L')}\left(\frac{db_1^1}{d\lambda}\right)\\
\left(\frac{da_3^{111}}{d\Lambda}\right) &= \frac{1}{\sin(L'''-L'')}\left(\frac{db_3^{111}}{d\Lambda}\right)\\
\left(\frac{da_3^{111}}{d\lambda}\right) &= \frac{1}{\sin(L'''-L'')}\left(\frac{db_3^{111}}{d\lambda}\right)
\end{aligned}$$

$$(39)\quad \begin{aligned}
\left(\frac{d\alpha_1^1}{d\Lambda}\right) &= -\frac{1}{6}\frac{D'}{D''}\frac{1}{b_2^{111}}\left\{\left(\frac{d\beta}{d\Lambda}\right) - \frac{\beta}{b_2^{111}}\left(\frac{db_2^{111}}{d\Lambda}\right)\right\}\\
\left(\frac{d\alpha_1^1}{d\lambda}\right) &= -\frac{1}{6}\frac{D'}{D''}\frac{1}{b_2^{111}}\left\{\left(\frac{d\beta}{d\lambda}\right) - \frac{\beta}{b_2^{111}}\left(\frac{db_2^{111}}{d\lambda}\right)\right\}\\
\left(\frac{d\alpha_3^{111}}{d\Lambda}\right) &= -\frac{1}{6}\frac{D'''}{D''}\frac{1}{b_2^1}\left\{\left(\frac{d\beta}{d\Lambda}\right) - \frac{\beta}{b_2^1}\left(\frac{db_2^1}{d\Lambda}\right)\right\}\\
\left(\frac{d\alpha_3^{111}}{d\lambda}\right) &= -\frac{1}{6}\frac{D'''}{D''}\frac{1}{b_2^1}\left\{\left(\frac{d\beta}{d\lambda}\right) - \frac{\beta}{b_2^1}\left(\frac{db_2^1}{d\lambda}\right)\right\}
\end{aligned}$$

Per ricavare ora i valori delle funzioni prime di h e k differenziamo primieramente le equazioni (11), ed avremo

$$(40)\quad \begin{aligned}
\left(\frac{dd'}{d\Lambda}\right) &= 0\\
\left(\frac{dd'}{d\lambda}\right) &= 0\\
\left(\frac{dd'_1}{d\Lambda}\right) &= \frac{1}{a_3^{111}}\left\{\left(\frac{da_1^1}{d\Lambda}\right) - d'_1\left(\frac{da_3^{111}}{d\Lambda}\right)\right\}\\
\left(\frac{dd'_1}{d\lambda}\right) &= \frac{1}{a_3^{111}}\left\{\left(\frac{da_1^1}{d\lambda}\right) - d'_1\left(\frac{da_3^{111}}{d\lambda}\right)\right\}\\
\left(\frac{df'}{d\Lambda}\right) &= \left(\frac{dn'}{d\Lambda}\right) + \nu'\left(\frac{d\alpha_1^1}{d\Lambda}\right)\\
\left(\frac{df'}{d\lambda}\right) &= \left(\frac{dn'}{d\lambda}\right) + \nu'\left(\frac{d\alpha_1^1}{d\lambda}\right)\\
\left(\frac{df'_1}{d\Lambda}\right) &= d'_1\left\{\left(\frac{dn'''}{d\Lambda}\right) + \nu'''\left(\frac{d\alpha_3^{111}}{d\Lambda}\right)\right\} + \left\{n''' + \alpha_3^{111}\nu'''\right\}\left(\frac{dd'_1}{d\Lambda}\right)\\
\left(\frac{df'_1}{d\lambda}\right) &= d'_1\left\{\left(\frac{dn'''}{d\lambda}\right) + \nu'''\left(\frac{d\alpha_3^{111}}{d\lambda}\right)\right\} + \left\{n''' + \alpha_3^{111}\nu'''_1\right\}\left(\frac{dd'_1}{d\lambda}\right)\\
\left(\frac{dg'}{d\Lambda}\right) &= \left(\frac{dm'}{d\Lambda}\right) + \mu'\left(\frac{d\alpha_1^1}{d\Lambda}\right)\\
\left(\frac{dg'}{d\lambda}\right) &= \left(\frac{dm'}{d\lambda}\right) + \mu'\left(\frac{d\alpha_1^1}{d\lambda}\right)\\
\left(\frac{dg'_1}{d\Lambda}\right) &= d'_1\left\{\left(\frac{dm'''}{d\Lambda}\right) + \mu'''\left(\frac{d\alpha_3^{111}}{d\Lambda}\right)\right\} + \left\{m''' + \alpha_3^{111}\mu'''\right\}\left(\frac{dd'_1}{d\Lambda}\right)\\
\left(\frac{dg'_1}{d\lambda}\right) &= d'_1\left\{\left(\frac{dm'''}{d\lambda}\right) + \mu'''\left(\frac{d\alpha_3^{111}}{d\lambda}\right)\right\} + \left\{m''' + \alpha_3^{111}\mu'''\right\}\left(\frac{dd'_1}{d\lambda}\right)
\end{aligned}$$

In seguito le equazioni (12) differenziate ci somministrano

$$
(41)\qquad
\begin{aligned}
\left(\frac{dh'}{d\Lambda}\right) &= \frac{1}{d'-d'_1}\left\{\left(\frac{df'}{d\Lambda}\right)-\left(\frac{df'_1}{d\Lambda}\right)+h'\left(\frac{dd'_1}{d\Lambda}\right)\right\}\\
\left(\frac{dh'}{d\lambda}\right) &= \frac{1}{d'-d'_1}\left\{\left(\frac{df'}{d\lambda}\right)-\left(\frac{df'_1}{d\lambda}\right)+h'\left(\frac{dd'_1}{d\lambda}\right)\right\}\\
\left(\frac{dk'}{d\Lambda}\right) &= \frac{1}{d'-d'_1}\left\{\left(\frac{dg'}{d\Lambda}\right)-\left(\frac{dg'_1}{d\Lambda}\right)+k'\left(\frac{dd'_1}{d\Lambda}\right)\right\}\\
\left(\frac{dk'}{d\lambda}\right) &= \frac{1}{d'-d'_1}\left\{\left(\frac{dg'}{d\lambda}\right)-\left(\frac{dg'_1}{d\lambda}\right)+k'\left(\frac{dd'_1}{d\lambda}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

Posponendo l'indice (1) a tutte le quantità nelle equazioni precedenti (35), (36), (37), (38), (39), (40), (41), quest' ultime ci daranno i valori delle funzioni prime di $h'_{(1)}$, $k'_{(1)}$, o sia dei coefficienti appartenenti alla seconda equazione (14).

Trovate le funzioni prime di h', k', non che quelle di $h'_{(1)}$, $k'_{(1)}$, ci rimane di passare dai valori di queste a quelli delle funzioni prime di $\log M$, $\log N$; perciò supponiamo

$$
(42)\qquad H = h'\,k'_{(1)} \qquad\qquad K = k'\,h'_{(1)}
$$

avremo primieramente

$$
(43)\qquad
\begin{aligned}
\left(\frac{dH}{d\Lambda}\right) &= h'\left(\frac{dk'_{(1)}}{d\Lambda}\right)+k'_{(1)}\left(\frac{dh'}{d\Lambda}\right)\\
\left(\frac{dH}{d\lambda}\right) &= h'\left(\frac{dk'_{(1)}}{d\lambda}\right)+k'_{(1)}\left(\frac{dh'}{d\lambda}\right)\\
\left(\frac{dK}{d\Lambda}\right) &= k'\left(\frac{dh'_{(1)}}{d\Lambda}\right)+k'_{(1)}\left(\frac{dk'}{d\Lambda}\right)\\
\left(\frac{dK}{d\lambda}\right) &= k'\left(\frac{dh'_{(1)}}{d\lambda}\right)+h'_{(1)}\left(\frac{dk'}{d\lambda}\right)
\end{aligned}
$$

e quindi dalle equazioni (15) si otterrà

$$
(44)\qquad
\begin{aligned}
\left(\frac{d\log M}{d\Lambda}\right) &= \frac{m}{H-K}\left[\frac{1}{M}\left\{\left(\frac{dh'_{(1)}}{d\Lambda}\right)-\left(\frac{dh'}{d\Lambda}\right)\right\}-\left(\frac{dH}{d\Lambda}\right)+\left(\frac{dK}{d\Lambda}\right)\right]\\
\left(\frac{d\log M}{d\lambda}\right) &= \frac{m}{H-K}\left[\frac{1}{M}\left\{\left(\frac{dh'_{(1)}}{d\lambda}\right)-\left(\frac{dh'}{d\lambda}\right)\right\}-\left(\frac{dH}{d\lambda}\right)+\left(\frac{dK}{d\lambda}\right)\right]\\
\left(\frac{d\log N}{d\Lambda}\right) &= \frac{m}{H-K}\left[\frac{1}{N}\left\{\left(\frac{dk'_{(1)}}{d\Lambda}\right)-\left(\frac{dk'}{d\Lambda}\right)\right\}-\left(\frac{dH}{d\Lambda}\right)+\left(\frac{dK}{d\Lambda}\right)\right]\\
\left(\frac{d\log N}{d\lambda}\right) &= \frac{m}{H-K}\left[\frac{1}{N}\left\{\left(\frac{dk'_{(1)}}{d\lambda}\right)-\left(\frac{dk'}{d\lambda}\right)\right\}-\left(\frac{dH}{d\lambda}\right)+\left(\frac{dK}{d\lambda}\right)\right]
\end{aligned}
$$

In queste equazioni m indica il modulo dei logaritmi ordinarj delle tavole moltiplicato per 1″ espresso in parti del raggio, o sia indica il numero il cui logaritmo è 4,32336.

Se poi si desidererà di avere anche le funzioni prime dell'angolo Ω, si troverà facilmente che differenziando l'equazione (34) del numero 54, verranno così espresse:

$$
(45)\qquad
\begin{aligned}
\left(\frac{d\Omega}{d\Lambda}\right) &= \frac{\sin 2\,\Omega}{m}\left\{\left(\frac{d\log M}{d\Lambda}\right)-\left(\frac{d\log N}{d\Lambda}\right)\right\}\\
\left(\frac{d\Omega}{d\Lambda}\right) &= \frac{\sin 2\,\Omega}{m}\left\{\left(\frac{d\log M}{d\lambda}\right)-\left(\frac{d\log N}{d\lambda}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

64.

Per fare un' applicazione di queste equazioni, supponiamo variate la longitudine e latitudine della seconda osservazione, la quale è una delle più interessanti, e di quelle che hanno la massima influenza nel calcolo, e cerchiamo le funzioni di $\log M$, $\log N$.

Incominciando dalle equazioni (35), instituisco il calcolo nel modo seguente:

$$
\begin{aligned}
\log \tan \lambda'' &= 9{,}5256n\\
\log \operatorname{cosec}^2 \lambda'' &= 0{,}9952\\
\hline
\log \tan \lambda'' \operatorname{cosec}^2 \lambda'' &= 0{,}5208n\\
\log m'' &= 0{,}4462\\
\log n'' &= 0{,}0176n\\
\hline
\log \left(\frac{dm''}{d\lambda''}\right) &= 0{,}9670
\end{aligned}
$$

$$\log\left(\frac{dn''}{d\lambda''}\right) = 0{,}5384n$$

$$\left(\frac{dm''}{d\Lambda''}\right) = -n = 1{,}041 \qquad \left(\frac{dm''}{d\lambda''}\right) = 9{,}268$$

$$\left(\frac{dn''}{d\Lambda''}\right) = m = 2{,}794 \qquad \left(\frac{dn''}{d\lambda''}\right) = -3{,}455$$

Il calcolo delle funzioni prime di a_1^{I}, a_3^{III}, $a_{1(1)}^{\mathrm{I}}$, ecc., b_1^{I}, b_3^{III}, $b_{1(1)}^{\mathrm{I}}$, ecc. si eseguisce secondo le formole (36), (38) col seguente processo:

$$L' = 221^\circ\ 10'\ 40''$$
$$\Lambda'' = 159\ \ 33\ \ 30$$
$$L' - \Lambda'' = 61\ \ 37\ \ 10$$

$$\log\cos(L' - \Lambda'') = 9{,}6770 \qquad \log\sin(L' - \Lambda'') = 9{,}9444$$
$$\log\cot\lambda'' = 0{,}4744n \qquad \log\operatorname{cosec}^2\Lambda'' = 0{,}9952$$
$$\log\left(\frac{db_1^{\mathrm{I}}}{d\Lambda''}\right) = 0{,}1514 \qquad \log\left(\frac{db_1^{\mathrm{I}}}{d\lambda''}\right) = 0{,}9396n$$
$$C\log\sin(L' - L') = 0{,}7752 \qquad = 0{,}7752$$
$$\log\left(\frac{da_1^{\mathrm{I}}}{d\Lambda''}\right) = 0{,}9266 \qquad \log\left(\frac{da_1^{\mathrm{I}}}{d\lambda''}\right) = 1{,}7148n$$

$$L'' = 230^\circ\ 50'\ 20''$$
$$\Lambda'' = 159\ \ 33\ \ 30$$
$$L'' - \Lambda'' = 71\ \ 16\ \ 50$$

$$\log\cos(L'' - \Lambda'') = 9{,}5064 \qquad \log\sin(L'' - \Lambda'') = 0{,}9764$$
$$\log\cot\lambda'' = 0{,}4744n \qquad \log\operatorname{cosec}^2\lambda'' = 0{,}9952$$
$$\log\left(\frac{db_2^{\mathrm{I}}}{d\Lambda''}\right) = 9{,}9808 \qquad \log\left(\frac{db_2^{\mathrm{I}}}{d\lambda''}\right) = 0{,}9716n$$

$$\log\left(\frac{db_2^{\mathrm{III}}}{d\Lambda''}\right) = \log\left(\frac{db_{1(1)}^{\mathrm{I}}}{d\Lambda''}\right) = 9{,}9808n \qquad \log\left(\frac{db_2^{\mathrm{III}}}{d\lambda''}\right) = \log\left(\frac{db_{1(1)}^{\mathrm{I}}}{d\lambda''}\right) = 0{,}9716$$
$$C\log\sin(L''' - L'') = 0{,}7770 \qquad = 0{,}7770$$
$$\log\left(\frac{da_{1(1)}^{\mathrm{I}}}{d\Lambda''}\right) = 0{,}7578n \qquad \log\left(\frac{da_{1(1)}^{\mathrm{I}}}{d\lambda''}\right) = 1{,}7486$$

$$L''' = 240^\circ\ 27'\ 30''$$
$$\Lambda'' = 159\ \ 33\ \ 30$$
$$L''' - \Lambda'' = 80\ \ 54\ \ 0$$

$$\log\cos(L''' - \Lambda'') = 9{,}1991 \qquad \log\sin(L''' - L'') = 9{,}9945$$
$$\log\cot\lambda'' = 0{,}4744n \qquad \log\operatorname{cosec}^2\lambda'' = 0{,}9952$$
$$\log\left(\frac{db_3^{\mathrm{III}}}{d\Lambda''}\right) = \log\left(\frac{db_{2(1)}^{\mathrm{I}}}{d\Lambda''}\right) = 9{,}6735n \qquad \log\left(\frac{db_3^{\mathrm{III}}}{d\lambda''}\right) = \log\left(\frac{db_{2(1)}^{\mathrm{I}}}{d\lambda''}\right) = 0{,}9897$$
$$C\log\sin(L''' - L'') = 0{,}7770 \qquad = 0{,}7770$$
$$\log\left(\frac{da_3^{\mathrm{III}}}{d\Lambda''}\right) = 0{,}4505n \qquad \log\left(\frac{da_3^{\mathrm{III}}}{d\lambda''}\right) = 1{,}7667$$

Col mezzo delle formole (37) passo ora al calcolo delle funzioni prime

$$\left(\frac{d\beta}{d\Lambda''}\right), \quad \left(\frac{d\beta}{d\lambda''}\right), \quad \left(\frac{d\beta_{(1)}}{d\Lambda''}\right), \quad \left(\frac{d\beta_{(1)}}{d\lambda''}\right)$$

$$m' = 1{,}633 \qquad n' = -0{,}222$$
$$m''' = 3{,}440 \qquad n''' = -1{,}421$$
$$m' + m''' = 1{,}807 \qquad n' + n''' = 1{,}199$$
$$\log(m' - m''') = 0{,}257n \qquad \log(n' - n''') = 0{,}079$$
$$\log m'' = 0{,}446 \qquad = 0{,}446$$
$$\log n'' = 0{,}018n \qquad = 0{,}018n$$
$$\log(m' - m''')\,m'' = 0{,}703n \qquad \log(n' - n''')\,m'' = 0{,}525$$
$$\log(m' - m''')\,n'' = 0{,}275 \qquad \log(n' - n''')\,n'' = 0{,}097n$$
$$(m' - m''')\,m'' = -5{,}05 \qquad (n' - n''')\,m'' = 3{,}35$$
$$(n' - n''')\,n'' = -1{,}25 \qquad (m' - m''')\,n'' = 1{,}88$$
$$\left(\frac{d\beta}{d\Lambda''}\right) = -6{,}30 \qquad (n' - n''')\,m'' - (m' - m''')\,n'' = 1{,}47$$
$$\log\{(n' - n''')\,m'' - (m' - m''')\,n''\} = 0{,}167$$
$$\log\tan\lambda''\operatorname{cosec}^2\lambda'' = 0{,}521n$$
$$\log\left(\frac{d\beta}{d\Lambda''}\right) = 0{,}779n \qquad \log\left(\frac{d\beta}{d\lambda''}\right) = 0{,}688$$

$$\log(m''' - m^{iv}) = 9{,}639n \qquad \log(n''' - n^{iv}) = 9{,}260$$
$$\log m'' = 0{,}446 \qquad = 0{,}446$$
$$\log n'' = 0{,}018n \qquad = 0{,}018n$$
$$\log(m''' - m^{iv})\, m'' = 0{,}085n \qquad \log(n''' - n^{iv}) = 9{,}706$$
$$\log(m''' - m^{iv})\, n'' = 9{,}657 \qquad \log(n''' - n^{iv})\, n'' = 9{,}278n$$
$$(m''' - m^{iv})\, m'' = -1{,}217 \qquad (n''' - n^{iv})\, m'' = 0{,}508$$
$$(n''' - n^{iv})\, n'' = -0{,}190 \qquad (m''' - m^{iv})\, n'' = 0{,}454$$
$$\left(\frac{d\theta_{(1)}}{d\Lambda''}\right) = 1{,}407 \qquad (n''' - n^{iv})\, m'' - (m''' - m^{iv})\, n'' = 0{,}054$$
$$\log\{(n''' - n^{iv})\, m'' - (m''' - m^{iv})\, n''\} = 8{,}732$$
$$\log \tan\lambda''\, \mathrm{cosec}^2\lambda'' = 0{,}521$$
$$\log\left(\frac{d\theta_{(1)}}{d\lambda''}\right) = 9{,}253$$

Ottenute così le funzioni prime di θ, $\theta_{(1)}$, cerchiamo quelle di α_1^1, α_3^{111}; $\alpha_{1(1)}^1$, $\alpha_{3(1)}^{111}$ colle formole (39)

$$\log\theta = 8{,}952$$
$$C\log b_2^{111} = 0{,}130n$$
$$\log\frac{\theta}{b_2^{111}} = 9{,}082n \qquad = 9{,}082n$$
$$\log\left(\frac{db_2^{111}}{d\Lambda''}\right) = 9{,}981n \qquad \log\left(\frac{db_2^{111}}{d\lambda''}\right) = 0{,}972n$$
$$\log\frac{\theta}{b_2^{111}}\left(\frac{db_2^{111}}{d\Lambda''}\right) = 9{,}063 \qquad \log\frac{\theta}{b_2^{111}}\left(\frac{db_3^{111}}{d\lambda''}\right) = 0{,}054n$$
$$\frac{\theta}{b_2^{111}}\left(\frac{db_2^{111}}{d\Lambda''}\right) = 0{,}12 \qquad \frac{\theta}{b_2^{111}}\left(\frac{db_2^{111}}{d\lambda''}\right) = -1{,}13$$
$$\left(\frac{d\theta}{d\Lambda''}\right) = -6{,}30 \qquad \left(\frac{d\theta}{d\lambda''}\right) = -4{,}88$$
$$\left(\frac{d\theta}{d\Lambda''}\right) - \frac{\theta}{b_2^{111}}\left(\frac{db_2^{111}}{d\Lambda''}\right) = -6{,}42 \qquad \left(\frac{d\theta}{d\lambda''}\right) - \frac{\theta}{b_2^{111}}\left(\frac{db_2^{111}}{d\lambda''}\right) = -3{,}75$$

$$\log D' = 0{,}004$$
$$C\log D'' = 9{,}995$$
$$C\log\theta = 9{,}222$$
$$C\log b_2^{111} = 0{,}130n$$
$$\log\frac{1}{6}\frac{D'}{D''}\cdot\frac{1}{b_2^{111}} = 9{,}351n$$

$$= 9{,}351n \qquad = 9{,}351n$$
$$\log\left\{\left(\frac{d\theta}{d\Lambda''}\right) - \frac{\theta}{b_2^{111}}\left(\frac{db_2^{111}}{d\Lambda''}\right)\right\} = 0{,}808n \qquad \log\left\{\left(\frac{d\theta}{d\lambda''}\right) - \frac{\theta}{b_2^{111}}\left(\frac{db_2^{111}}{d\lambda''}\right)\right\} = 0{,}574n$$
$$\log\left(\frac{d\alpha_1^1}{d\Lambda''}\right) = 0{,}159n \qquad \log\left(\frac{d\alpha_1^1}{d\lambda'}\right) = 9{,}925n$$
$$\log\theta = 8{,}952$$
$$C\log b_2^1 = 9{,}848n$$
$$\log\frac{\theta}{b_2^1} = 8{,}800n \qquad = 8{,}800n$$
$$\log\left(\frac{db_2^1}{d\Lambda''}\right) = 9{,}981 \qquad \log\left(\frac{db_2^1}{d\lambda''}\right) = 0{,}972n$$
$$\log\frac{\theta}{b_2^1}\left(\frac{db_2^1}{d\Lambda''}\right) = 8{,}781n \qquad \log\frac{\theta}{b_2^1}\left(\frac{db_2^1}{d\lambda''}\right) = 9{,}772$$
$$\frac{\theta}{b_2^1}\left(\frac{db_2^1}{d\Lambda''}\right) = -0{,}06 \qquad \frac{\theta}{b_2^1}\left(\frac{db_2^1}{d\lambda''}\right) = 0{,}59$$
$$\left(\frac{d\theta}{d\Lambda''}\right) = -6{,}30 \qquad \left(\frac{d\theta}{d\lambda''}\right) = -4{,}88$$
$$\left(\frac{d\theta}{d\Lambda''}\right) - \frac{\theta}{b_2^1}\left(\frac{db_2^1}{d\Lambda''}\right) = -6{,}24 \qquad \left(\frac{d\theta}{d\lambda''}\right) - \frac{\theta}{b_2^1}\left(\frac{db_2^1}{d\lambda''}\right) = -5{,}47$$

$$\log D''' = 0{,}006$$
$$C\log D'' = 9{,}995$$
$$C\log\theta = 9{,}222$$
$$C\log b_2^1 = 9{,}848n$$
$$\log\frac{1}{6}\frac{D'''}{D''}\frac{1}{b_2^1} = 9{,}071n$$

$$9{,}017n \qquad 9{,}071n$$
$$\log\left\{\left(\frac{d\theta}{d\Lambda''}\right) - \frac{\theta}{b_2^1}\left(\frac{db_2^1}{d\Lambda''}\right)\right\} = 0{,}795n \qquad \log\left\{\left(\frac{d\theta}{d\lambda''}\right) - \frac{\theta}{b_2^1}\left(\frac{db_2^1}{d\lambda''}\right)\right\} = 0{,}738n$$
$$\log\left(\frac{d\alpha_3^{111}}{d\Lambda''}\right) = 9{,}866n \qquad \log\left(\frac{d\alpha_3^{111}}{d\lambda''}\right) = 9{,}809n$$
$$\frac{\theta_{(1)}}{b_{2(1)}^{111}}\left(\frac{db_{2(1)}^{111}}{d\Lambda''}\right) = 0, \qquad \frac{\theta}{b_{2(1)}^{111}}\left(\frac{db_{2(1)}^{111}}{d\lambda''}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{d\theta_{(1)}}{d\Lambda''}\right) = 1{,}407 \qquad \left(\frac{d\theta_{(1)}}{d\lambda''}\right) = 0{,}179$$
$$\left(\frac{d\theta_{(1)}}{d\Lambda''}\right) - \frac{\theta_{(1)}}{b_{2(1)}^{111}}\left(\frac{db_{1(1)}^{111}}{d\Lambda''}\right) = 1{,}407 \qquad \left(\frac{d\theta_{(1)}}{d\lambda''}\right) - \frac{\theta}{b_{2(1)}^{111}}\left(\frac{db_{2(1)}^{111}}{d\lambda''}\right) = 0{,}179$$

$$\log D'' = 0{,}005$$
$$C \log D''' = 9{,}994$$
$$C \log 6 = 9{,}222$$
$$C \log b^{111}_{2(1)} = 0{,}329n$$
$$\log \frac{1}{6}\frac{D''}{D'''}\frac{1}{b^{111}_{2(1)}} = 9{,}550n$$

$$9{,}550n \qquad\qquad 9{,}550n$$
$$\log\left\{\left(\frac{d\,6_{(1)}}{d\Lambda''}\right) - \frac{6_{(1)}}{b^{111}_{2(1)}}\left(\frac{d\,b^{111}_{2(1)}}{d\Lambda''}\right)\right\} = 0{,}148n \qquad \log\left\{\left(\frac{d6_{(1)}}{d\lambda''}\right) - \frac{6_{(1)}}{b^{111}_{2(1)}}\left(\frac{d\,b^{111}_{2(1)}}{d\lambda''}\right)\right\} = 9{,}253n$$
$$\log\left(\frac{d\,\alpha^1_{1(1)}}{d\Lambda''}\right) = 9{,}698n \qquad \log\left(\frac{d\,\alpha^1_{1(1)}}{d\lambda''}\right) = 8{,}803n$$

$$\log 6_{(1)} = 8{,}679$$
$$C \log b^1_{2(1)} = 0{,}125n$$
$$\log \frac{6_{(1)}}{b^1_{2(1)}} = 8{,}804n \qquad\qquad = 8{,}804n$$
$$\log\left(\frac{d\,b^1_{2(1)}}{d\Lambda''}\right) = 9{,}673n \qquad \log\left(\frac{d\,b^1_{2(1)}}{d\lambda''}\right) = 0{,}990$$
$$\log \frac{6}{b^{111}_{2}}\left(\frac{d\,b^1_{2(1)}}{d\Lambda''}\right) = 8{,}477 \qquad \log \frac{6_{(1)}}{b^1_{2(1)}}\left(\frac{d\,b^1_{2(1)}}{d\lambda''}\right) = 9{,}794n$$
$$\frac{6_{(1)}}{b^1_{2(1)}}\left(\frac{d b^1_{2(1)}}{d\Lambda''}\right) = 0{,}030 \qquad \frac{6_{(1)}}{b^1_{2(1)}}\left(\frac{d b^1_{2(1)}}{d\lambda''}\right) = 0{,}622$$
$$\left(\frac{d\,6_{(1)}}{d\Lambda''}\right) = 1{,}407 \qquad \left(\frac{d6_{(1)}}{d\lambda''}\right) = 0{,}179$$
$$\left(\frac{d\,6_{(1)}}{d\Lambda''}\right) - \frac{6_{(1)}}{b^1_{2(1)}}\left(\frac{d b^1_{2(1)}}{d\Lambda''}\right) = 1{,}377 \qquad \left(\frac{d6_{(1)}}{d\lambda''}\right) - \frac{6_{(1)}}{b^1_{2(1)}}\left(\frac{d\,b^1_{2(1)}}{d\lambda''}\right) = 0{,}801$$

$$\log D''' = 0{,}006$$
$$C \log D''' = 9{,}994$$
$$C \log 6 = 9{,}222$$
$$C \log b^1_{2(1)} = 0{,}125n$$
$$\log \frac{1}{6}\frac{D'''}{D'''} \cdot \frac{1}{b^1_{2(1)}} = 9{,}347n$$

$$= 9{,}347n \qquad\qquad = 9{,}347n$$
$$\log\left\{\left(\frac{d6_{(1)}}{d\Lambda''}\right) = \frac{6_{(1)}}{b^1_{2(1)}}\left(\frac{d\,b^1_{2(1)}}{d\Lambda''}\right)\right\} = 0{,}139n \qquad \log\left\{\left(\frac{d6_{(1)}}{d\lambda''}\right) = \frac{6_{(1)}}{b^1_{2(1)}}\left(\frac{d b^1_{2(1)}}{d\lambda''}\right)\right\} = 9{,}904n$$
$$\log\left(\frac{d\,\alpha^{111}_{3(1)}}{d\Lambda''}\right) = 9{,}486n \qquad \log\left(\frac{d\,\alpha^{111}_{3(1)}}{d\lambda''}\right) = 9{,}251n$$

Per avere le funzioni prime dei coefficienti h, k conviene prima cercare le funzioni prime di d', d'_1; f', f'_1; g', g'_1, delle quali ecco il calcolo secondo le formole (40)

$$\left(\frac{dd'}{d\Lambda''}\right) = 0 \qquad \left(\frac{dd'}{d\lambda''}\right) = 0$$

$$\log d'_1 = 0{,}2638 \qquad = 0{,}2638$$
$$\log\left(\frac{d\,a^{111}_3}{d\Lambda''}\right) = 0{,}4505n \qquad \log\left(\frac{d\,a^{111}_3}{d\Lambda''}\right) = 1{,}7667$$
$$\log d'_1\left(\frac{d\,a^{111}_3}{d\Lambda''}\right) = 0{,}7143n \qquad \log d'_1\left(\frac{d\,a^{111}_3}{d\Lambda''}\right) = 2{,}0305$$
$$d'_1\left(\frac{d\,a^1_1}{d\Lambda''}\right) = -5{,}180 \qquad d'_1\left(\frac{d\,a^{111}_3}{d\lambda''}\right) = 107{,}28$$
$$\left(\frac{d\,a^1_1}{d\Lambda''}\right) = 8{,}445 \qquad \left(\frac{d\,a^1_1}{d\lambda''}\right) = -51{,}86$$
$$\left(\frac{d\,a^1_1}{d\Lambda''}\right) - d'_1\left(\frac{d\,a^{111}_3}{d\Lambda''}\right) = 13{,}625 \qquad \left(\frac{d\,a^1_1}{d\Lambda''}\right) - d'_1\left(\frac{d\,a^{111}_3}{d\lambda''}\right) = -159{,}14$$
$$\log\left\{\left(\frac{d\,a^1_1}{d\Lambda'}\right) - d'_1\left(\frac{d\,a^{111}_3}{d\Lambda''}\right)\right\} = 1{,}1343 \qquad \log\left\{\left(\frac{d\,a^1_1}{d\lambda'}\right) - d'_1\left(\frac{d\,a^{111}_3}{d\lambda''}\right)\right\} = 2{,}2018n$$
$$C \log a^{111}_3 = 9{,}3483n \qquad = 9{,}3483n$$
$$\log\left(\frac{d\,d'_1}{d\Lambda''}\right) = 0{,}4826n \qquad \log\left(\frac{d\,d'_1}{d\lambda''}\right) = 1{,}5501$$

$$\log \nu' = 9{,}818n \qquad = 9{,}818n$$
$$\log\left(\frac{d\,\alpha^1_1}{d\Lambda''}\right) = 0{,}159n \qquad \log\left(\frac{d\,\alpha^1_1}{d\lambda''}\right) = 9{,}925n$$
$$\log \nu'\left(\frac{d\,\alpha^1_1}{d\Lambda''}\right) = 9{,}977 \qquad \log \nu'\left(\frac{d\,\alpha^1_1}{d\lambda''}\right) = 9{,}743$$
$$\nu'\left(\frac{d\,\alpha^1_1}{d\Lambda''}\right) = 0{,}948 \qquad \nu'\left(\frac{d\,\alpha^1_1}{d\lambda''}\right) = 0{,}553$$
$$\left(\frac{dn'}{d\Lambda''}\right) = 0{,}000 \qquad \left(\frac{dn'}{d\lambda''}\right) = 0{,}000$$
$$\left(\frac{df'}{d\Lambda''}\right) = 0{,}948 \qquad \left(\frac{df'}{d\lambda''}\right) = 0{,}553$$

$$\log d'_1 = 0{,}264$$
$$\log v''' = 9{,}940n$$

$$\log d'_1 v''' = 0{,}204n \qquad = 0{,}204n$$
$$\log\left(\frac{d\alpha_3^{111}}{d\Lambda''}\right) = 9{,}866n \qquad \log\left(\frac{d\alpha_3^{111}}{d\lambda''}\right) = 9{,}809n$$
$$\log d'_1 v'''\left(\frac{d\alpha_3^{111}}{d\Lambda''}\right) = 0{,}070 \qquad \log d'_1 v'''\left(\frac{d\alpha_3^{111}}{d\lambda''}\right) = 0{,}013$$

$$\log(n''' + a_3^{111} v''') = \log f'_1 : d'_1 = 0{,}1552n \qquad = 0{,}1552n$$
$$\log\left(\frac{dd'_1}{d\Lambda''}\right) = 0{,}4836n \qquad \log\left(\frac{dd'_1}{d\lambda''}\right) = 1{,}5501$$
$$\log f'_1 : d'_1\left(\frac{dd'_1}{d\Lambda''}\right) = 0{,}6378 \qquad \log f'_1 : d'_1\left(\frac{dd'_1}{d\lambda''}\right) = 1{,}7053n$$

$$d'_1\left(\frac{dm'''}{d\Lambda''}\right) = 0{,}000 \qquad d'_1\left(\frac{dm'''}{d\lambda''}\right) = 0{,}000$$
$$d'_1 v'''\left(\frac{d\alpha_3^{111}}{d\Lambda''}\right) = 1{,}175 \qquad d'_1 v'''\left(\frac{d\alpha_3^{111}}{d\lambda''}\right) = 1{,}03$$
$$f'_1 : d'_1\left(\frac{dd'_1}{d\Lambda''}\right) = 4{,}343 \qquad f'_1 : d'_1\left(\frac{dd'_1}{d\lambda''}\right) = -50{,}73$$
$$\left(\frac{df'_1}{d\Lambda''}\right) = 5{,}518 \qquad \left(\frac{df'_1}{d\lambda''}\right) = -49{,}70$$

$$\log \mu' = 9{,}877n \qquad = 9{,}877n$$
$$\log\left(\frac{d\alpha_1^1}{d\Lambda''}\right) = 0{,}159n \qquad \log\left(\frac{d\alpha_1^1}{d\lambda''}\right) = 9{,}925n$$
$$\log \mu'\left(\frac{d\alpha_1^1}{d\Lambda''}\right) = 0{,}036 \qquad \log \mu'\left(\frac{d\alpha_1^1}{d\lambda''}\right) = 9{,}802$$
$$\mu'\left(\frac{d\alpha_1^1}{d\Lambda''}\right) = 1{,}087 \qquad \mu'\left(\frac{d\alpha_1^1}{d\lambda''}\right) = 0{,}634$$
$$\left(\frac{dm'}{d\Lambda''}\right) = 0{,}000 \qquad \left(\frac{dn'}{d\lambda''}\right) = 0{,}000$$
$$\left(\frac{dg'}{d\Lambda''}\right) = 1{,}087 \qquad \left(\frac{dg'}{d\lambda''}\right) = 0{,}634$$

$$\log d'_1 = 0{,}264$$
$$\log \mu''' = 9{,}693n$$

$$\log d'_1 \mu''' = 9{,}957n \qquad = 9{,}957n$$
$$\log\left(\frac{d\alpha_3^{111}}{d\Lambda''}\right) = 9{,}866n \qquad \log\left(\frac{d\alpha_3^{111}}{d\lambda''}\right) = 9{,}809n$$
$$\log d'_1 \mu'''\left(\frac{d\alpha_3^{111}}{d\Lambda''}\right) = 9{,}820 \qquad \log d'_1 \mu'''\left(\frac{d\alpha_3^{111}}{d\lambda''}\right) = 9{,}766$$

$$\log(m''' + \alpha_3^{111}\mu''') = \log g'_1 : d'_1 = 0{,}5359 \qquad = 0{,}5359$$
$$\log\left(\frac{dd'_1}{d\Lambda''}\right) = 0{,}4826n \qquad \log\left(\frac{dd'_1}{d\lambda''}\right) = 1{,}5501$$
$$\log g'_1 : d'_1\left(\frac{dd'_1}{d\Lambda''}\right) = 1{,}0185n \qquad \log g'_1 : d'_1\left(\frac{dd'_1}{d\lambda''}\right) = 2{,}0860$$

$$\left(\frac{dm'''}{d\Lambda''}\right) = 0{,}000 \qquad \left(\frac{dm'''}{d\lambda''}\right) = 0{,}00$$
$$d'_1 \mu'''\left(\frac{d\alpha_3^{111}}{d\Lambda''}\right) = 0{,}665 \qquad d'_1 \mu'''\left(\frac{d\alpha_3^{111}}{d\lambda''}\right) = 0{,}58$$
$$g'_1 : d'_1\left(\frac{dd'_1}{d\Lambda''}\right) = -10{,}435 \qquad g'_1 : d'_1\left(\frac{dd'_1}{d\lambda''}\right) = 121{,}90$$
$$\left(\frac{dg'_1}{d\Lambda''}\right) = -9{,}770 \qquad \left(\frac{dg'_1}{d\lambda''}\right) = 122{,}48$$

Ad imitazione di ciò che è già stato praticato al numero 53, ommetteremo anche qui per brevità l' indice (1) a tutte le quantità del seguente calcolo delle funzioni prime

$$\left(\frac{dd'_{1(1)}}{d\Lambda''}\right), \left(\frac{dd'_{(1)}}{d\lambda}\right), \left(\frac{df'_{(1)}}{d\Lambda''}\right), \left(\frac{df'_{1(1)}}{d\lambda''}\right), \left(\frac{df'_{1(1)}}{d\Lambda''}\right), \left(\frac{df'_{1(1)}}{d\lambda''}\right),$$
$$\left(\frac{dg'_{(1)}}{d\Lambda''}\right), \left(\frac{dg'_{(1)}}{d\lambda''}\right), \left(\frac{dg'_{1(1)}}{d\Lambda''}\right), \left(\frac{dg'_{1(1)}}{d\lambda''}\right)$$

$$\left(\frac{dd'_{(1)}}{d\Lambda''}\right) = 0{,}0000 \qquad \left(\frac{dd'_{(1)}}{d\lambda''}\right) = 0{,}0000$$

$$d'_1\left(\frac{d\alpha_3^{111}}{d\Lambda''}\right) = 0{,}0000 \qquad d'\left(\frac{d\alpha_3^{111}}{d\Lambda''}\right) = 0{,}0000$$

$$\log\left\{\left(\frac{da_1^1}{d\Lambda''}\right)-d'_1\left(\frac{da_3^{111}}{d\Lambda''}\right)\right\}=\log\left(\frac{da_2^1}{d\Lambda''}\right)= \quad 0{,}7578n \qquad \log\left\{\left(\frac{da_1^1}{d\lambda''}\right)-d'_1\left(\frac{da_2^{111}}{d\lambda''}\right)\right\}=\log\left(\frac{da_1^1}{d\lambda''}\right)= \quad 1{,}7486$$

$$C\log a_3^{111} = \quad 9{,}5478n \qquad\qquad = \quad 9{,}5478n$$

$$\log\left(\frac{dd'_{1(1)}}{d\Lambda''}\right) = \quad 0{,}3056 \qquad\qquad \log\left(\frac{dd'_{1(1)}}{d\lambda''}\right) = \quad 1{,}2964n$$

$$\log \nu'' = \quad 9{,}890n \qquad\qquad = \quad 9{,}890n$$

$$\log\left(\frac{d\alpha_1^1}{d\Lambda''}\right) = \quad 9{,}698 \qquad\qquad \log\left(\frac{d\alpha_1^1}{d\lambda''}\right) = \quad 8{,}803$$

$$\log \nu''\left(\frac{d\alpha_1^1}{d\Lambda''}\right) = \quad 9{,}588n \qquad\qquad \log \nu''\left(\frac{d\alpha_1^1}{d\lambda''}\right) = \quad 8{,}693n$$

$$\nu''\left(\frac{d\alpha_1^1}{d\Lambda''}\right) = -0{,}387 \qquad\qquad \nu''\left(\frac{d\alpha_1^1}{d\lambda''}\right) = -0{,}049$$

$$\left(\frac{dn''}{d\Lambda''}\right) = \quad 2{,}794 \qquad\qquad \left(\frac{dn''}{d\lambda''}\right) = -3{,}455$$

$$\left(\frac{df'_{(1)}}{d\Lambda''}\right) = \quad 2{,}407 \qquad\qquad \left(\frac{df'_{(1)}}{d\lambda''}\right) = -3{,}504$$

$$\log d'_1 = \quad 0{,}195n$$

$$\log \nu''' = \quad 9{,}973$$

$$\log d'_1\,\nu''' = \quad 0{,}168n \qquad\qquad = \quad 0{,}168n$$

$$\log\left(\frac{d\alpha_3^{111}}{d\Lambda''}\right) = \quad 9{,}486 \qquad\qquad \log\left(\frac{d\alpha_3^{111}}{d\lambda''}\right) = \quad 9{,}251$$

$$\log d'_1\,\nu'''\left(\frac{d\alpha_3^{111}}{d\Lambda''}\right) = \quad 9{,}654n \qquad\qquad \log d'_1\,\nu'''\left(\frac{d\alpha_3^{111}}{d\lambda''}\right) = \quad 9{,}419n$$

$$\log (n''' + \alpha_3^{111}\,\nu''') = \log f'_1 : d'_1 = \quad 0{,}2075n \qquad\qquad = \quad 0{,}2075n$$

$$\log\left(\frac{dd'_1}{d\Lambda''}\right) = \quad 0{,}3056 \qquad\qquad \log\left(\frac{dd'_1}{d\lambda''}\right) = \quad 1{,}2964n$$

$$\log f'_1 : d'_1\left(\frac{dd'_1}{d\Lambda''}\right) = \quad 0{,}5131n \qquad\qquad \log f'_1 : d'_1\left(\frac{dd'_1}{d\lambda''}\right) = \quad 1{,}5039$$

$$d'_1\left(\frac{dm'''}{d\Lambda''}\right) = \quad 0{,}000 \qquad\qquad d'_1\left(\frac{dm''}{d\lambda''}\right) = \quad 0{,}000$$

$$d'_1\,\nu'''\left(\frac{d\alpha_3^{111}}{d\Lambda''}\right) = -0{,}451 \qquad\qquad d'_1\,\nu'''\left(\frac{d\alpha_3^{111}}{d\lambda''}\right) = \quad 9{,}26$$

$$f'_1 : d'_1\left(\frac{dd'_1}{d\Lambda''}\right) = -3{,}239 \qquad\qquad f'_1 : d'_1\left(\frac{dd'_1}{d\lambda''}\right) = \quad 31{,}91$$

$$\left(\frac{df'_{1(1)}}{d\Lambda''}\right) = -3{,}710 \qquad\qquad \left(\frac{df'_{1(1)}}{d\lambda''}\right) = \quad 31{,}65$$

$$\log \mu'' = \quad 9{,}800n \qquad\qquad = \quad 9{,}800n$$

$$\log\left(\frac{d\alpha_1^1}{d\Lambda''}\right) = \quad 9{,}698 \qquad\qquad \log\left(\frac{d\alpha_1^1}{d\lambda''}\right) = \quad 8{,}803$$

$$\log \mu''\left(\frac{d\alpha_1^1}{d\Lambda''}\right) = \quad 9{,}498n \qquad\qquad \log \mu''\left(\frac{d\alpha_1^1}{d\lambda''}\right) = \quad 8{,}603n$$

$$\mu''\left(\frac{d\alpha_1^1}{d\Lambda''}\right) = -0{,}315 \qquad\qquad \mu''\left(\frac{d\alpha_1^1}{d\lambda''}\right) = -\ 0{,}040$$

$$\left(\frac{dm''}{d\Lambda''}\right) = \quad 1{,}041 \qquad\qquad \left(\frac{dm''}{d\lambda''}\right) = \quad 9{,}268$$

$$\left(\frac{dg'_{(1)}}{d\Lambda''}\right) = \quad 0{,}726 \qquad\qquad \left(\frac{dg'_{(1)}}{d\lambda''}\right) = \quad 9{,}228$$

$$\log d'_1 = \quad 0{,}195$$

$$\log \mu''' = \quad 9{,}533n$$

$$\log d'_1\,\mu''' = \quad 9{,}728n \qquad\qquad = \quad 9{,}728n$$

$$\log\left(\frac{d\alpha_3^{111}}{d\Lambda''}\right) = \quad 9{,}486 \qquad\qquad \log\left(\frac{d\alpha_3^{111}}{d\lambda''}\right) = \quad 9{,}251$$

$$\log d'_1\,\mu'''\left(\frac{d\alpha_3^{111}}{d\Lambda''}\right) = \quad 9{,}214n \qquad\qquad \log d'_1\,\mu'''\left(\frac{d\alpha_3^{111}}{d\lambda''}\right) = \quad 0{,}979n$$

$$\log (m''' + a_3^{111}\,\mu''') = \log g'_1 : d'_1 = \quad 0{,}5880 \qquad\qquad = \quad 0{,}5880$$

$$\log\left(\frac{dd'_1}{d\Lambda''}\right) = \quad 0{,}3056 \qquad\qquad \log\left(\frac{dd'_1}{d\lambda''}\right) = \quad 1{,}2964n$$

$$\log g'_1 : d'_1\left(\frac{dd'_1}{d\Lambda''}\right) = \quad 0{,}8936 \qquad\qquad \log g'_1 : d'_1\left(\frac{dd'_1}{d\lambda''}\right) = \quad 1{,}8844n$$

$$d'_1\left(\frac{dm'''}{d\Lambda''}\right) = \quad 0{,}000 \qquad\qquad d'_1\left(\frac{dm'''}{d\lambda''}\right) = \quad 0{,}000$$

$$d'_1\,\mu'''\left(\frac{d\alpha_3^{111}}{d\Lambda''}\right) = -0{,}164 \qquad\qquad d'_1\,\mu'''\left(\frac{d\alpha_3^{111}}{d\lambda''}\right) = -\ 0{,}10$$

$$g'_1 : d'_1\left(\frac{dd'_1}{d\Lambda''}\right) = \quad 7{,}827 \qquad\qquad g'_1 : d'_1\left(\frac{dd'_1}{d\lambda''}\right) = -76{,}63$$

$$\left(\frac{dg'_{1(1)}}{d\Lambda''}\right) = \quad 7{,}663 \qquad\qquad \left(\frac{dg'_{1(1)}}{d\lambda''}\right) = \quad 76{,}73$$

Calcolo ora i valori delle funzioni prime di h, k; $h_{(1)}$, $k_{(1)}$ colle formole (41)

$$\log h = 0{,}4563n \qquad = 0{,}4563n$$
$$\log\left(\frac{dd'_1}{d\Lambda''}\right) = 0{,}4826n \qquad \log\left(\frac{dd'_1}{d\lambda''}\right) = 1{,}5501$$
$$\log h\left(\frac{dd'_1}{d\Lambda''}\right) = 0{,}9389 \qquad \log h\left(\frac{dd'_1}{d\lambda''}\right) = 2{,}0064n$$

$$\left(\frac{df'_1}{d\Lambda''}\right) = 0{,}948 \qquad \left(\frac{df'_1}{d\lambda''}\right) = 0{,}55$$
$$\left(\frac{df'_1}{d\Lambda''}\right) = 5{,}518 \qquad \left(\frac{df'_1}{d\lambda''}\right) = -49{,}70$$
$$h\left(\frac{dd'_1}{d\Lambda''}\right) = 8{,}688 \qquad h\left(\frac{dd'_1}{d\lambda''}\right) = -101{,}48$$
$$\left(\frac{df'}{d\Lambda''}\right) - \left(\frac{df'_1}{d\Lambda''}\right) + h\left(\frac{dd'_1}{d\Lambda''}\right) = 4{,}118 \qquad \left(\frac{df'}{d\lambda''}\right) - \left(\frac{df'_1}{d\lambda''}\right) + h\left(\frac{dd'_1}{d\lambda''}\right) = 151{,}23$$

$$\log = 0{,}6147 \qquad \log = 1{,}7095n$$
$$C\log(d' - d'_1) = 0{,}0780n \qquad = 0{,}0780n$$
$$\log\left(\frac{dh}{d\Lambda''}\right) = 0{,}6927n \qquad \log\left(\frac{dh}{d\lambda''}\right) = 1{,}7875$$

$$\log k = 0{,}7490 \qquad = 0{,}7490$$
$$\log\left(\frac{dd'_1}{d\Lambda''}\right) = 0{,}4826n \qquad \log\left(\frac{dd'_1}{d\lambda''}\right) = 1{,}5501$$
$$\log k\left(\frac{dd'_1}{d\Lambda''}\right) = 1{,}2316n \qquad \log k\left(\frac{dd'_1}{d\lambda''}\right) = 2{,}2991$$

$$\left(\frac{dg'}{d\Lambda''}\right) = -1{,}087 \qquad \left(\frac{dg'}{d\lambda''}\right) = 0{,}63$$
$$\left(\frac{dg'_1}{d\Lambda''}\right) = -9{,}970 \qquad \left(\frac{dg'_1}{d\lambda''}\right) = 122{,}48$$
$$k\left(\frac{dd'_1}{d\Lambda''}\right) = -17{,}045 \qquad k\left(\frac{dd'_1}{d\lambda''}\right) = 199{,}11$$
$$\left(\frac{dg'}{d\Lambda''}\right) - \left(\frac{dg'_1}{d\Lambda''}\right) + k\left(\frac{dd'_1}{d\Lambda''}\right) = -6{,}188 \qquad \left(\frac{dg'}{d\lambda''}\right) - \left(\frac{dg'_1}{d\lambda''}\right) + k\left(\frac{dd'_1}{d\lambda''}\right) = 77{,}26$$

$$\log = 0{,}791n \qquad \log = 1{,}8880$$
$$C\log(d' - d'_1) = 0{,}0780 \qquad = 0{,}0780n$$
$$\log\left(\frac{dk}{d\Lambda''}\right) = 0{,}8696 \qquad \log\left(\frac{dk}{d\lambda''}\right) = 1{,}9660n$$

$$\log h_{(1)} = 0{,}4150n \qquad = 0{,}4150n$$
$$\log\left(\frac{dd'_{1(1)}}{d\Lambda''}\right) = 0{,}3056 \qquad \log\left(\frac{dd'_{1(1)}}{d\lambda''}\right) = 1{,}2964n$$
$$\log h_{(1)}\left(\frac{dd'_{1(1)}}{d\Lambda''}\right) = 0{,}7206n \qquad \log h_{(1)}\left(\frac{dd'_{1(1)}}{d\lambda''}\right) = 1{,}7114$$
$$\left(\frac{df'_{(1)}}{d\Lambda''}\right) = 2{,}407 \qquad \left(\frac{df'_{(1)}}{d\lambda''}\right) = 3{,}50$$
$$\left(\frac{df'_{1(1)}}{d\Lambda''}\right) = -3{,}710 \qquad \left(\frac{df'_{1(1)}}{d\lambda''}\right) = -31{,}65$$
$$h_{(1)}\left(\frac{dd'_{1(1)}}{d\Lambda''}\right) = -5{,}255 \qquad h_{(1)}\left(\frac{dd'_{1(1)}}{d\lambda''}\right) = 51{,}45$$
$$\left(\frac{df'_{(1)}}{d\Lambda''}\right) - \left(\frac{df'_{1(1)}}{d\Lambda''}\right) + h_{(1)}\left(\frac{dd'_{1(1)}}{d\Lambda''}\right) = 0{,}862 \qquad \left(\frac{df'_{(1)}}{d\lambda''}\right) - \left(\frac{df'_{1(1)}}{d\lambda''}\right) + h_{(1)}\left(\frac{dd'_{1(1)}}{d\lambda''}\right) = 16{,}30$$

$$\log = 9{,}9355 \qquad \log = 1{,}2122$$
$$C\log(d' - d'_1) = 0{,}2479n \qquad = 0{,}2479n$$
$$\log\left(\frac{dh_{(1)}}{d\Lambda''}\right) = 0{,}1834n \qquad \log\left(\frac{dh_{(1)}}{d\lambda''}\right) = 1{,}4601n$$

$$\log k_{(1)} = 0{,}7635 \qquad = 0{,}7635$$
$$\log\left(\frac{dd'_{1(1)}}{d\Lambda''}\right) = 0{,}3056 \qquad \log\left(\frac{dd'_{1(1)}}{d\lambda''}\right) = 1{,}2964n$$
$$\log k_{(1)}\left(\frac{dd'_{1(1)}}{d\Lambda''}\right) = 1{,}0691 \qquad \log k_{(1)}\left(\frac{dd'_{1(1)}}{d\lambda''}\right) = 2{,}0599n$$
$$\left(\frac{dg'_{(1)}}{d\Lambda''}\right) = 0{,}726 \qquad \left(\frac{dg'_{(1)}}{d\lambda''}\right) = 9{,}23$$
$$\left(\frac{dg'_{1(1)}}{d\Lambda''}\right) = 7{,}663 \qquad \left(\frac{dg'_{1(1)}}{d\lambda''}\right) = -76{,}73$$
$$k_{(1)}\left(\frac{dd'_{1(1)}}{d\Lambda''}\right) = 11{,}724 \qquad k_{(1)}\left(\frac{dd'_{1(1)}}{d\lambda''}\right) = -114{,}79$$
$$\left(\frac{dg'_{(1)}}{d\Lambda''}\right) - \left(\frac{dg'_{1(1)}}{d\Lambda''}\right) + k_{(1)}\left(\frac{dd'_{1(1)}}{d\Lambda''}\right) = 4{,}787 \qquad \left(\frac{dg'_{(1)}}{d\lambda''}\right) - \left(\frac{dg'_{1(1)}}{d\lambda''}\right) + k_{(1)}\left(\frac{dd'_{1(1)}}{d\lambda''}\right) = -28{,}83$$

$$\begin{aligned} \log &= 0{,}6801 & \log &= 1{,}4598n \\ C \log (d' - d'_1) &= 0{,}2479n & &= 0{,}2479n \\ \log \left(\frac{d k_{(1)}}{d \Lambda''}\right) &= 0{,}9280n & \log \left(\frac{d k_{(1)}}{d \lambda''}\right) &= 1{,}7077 \end{aligned}$$

Conviene ora cercare le funzioni prime di H, K per poi passare a quelle di M ed N; perciò usando le formole (42), (43) istituisco il calcolo seguente:

$$\begin{aligned} \log k_{(1)} &= 0{,}7635 & &= 0{,}7635 \\ \log \left(\frac{d h}{d \Lambda''}\right) &= 0{,}6927n & \log \left(\frac{d h}{d \lambda''}\right) &= 1{,}7875 \\ \log k_{(1)} \left(\frac{d h}{d \Lambda''}\right) &= 1{,}4562n & \log k_{(1)} \left(\frac{d h}{d \lambda''}\right) &= 2{,}5510 \\ \log h &= 0{,}4563n & &= 0{,}4563n \\ \log \left(\frac{d k_{(1)}}{d \Lambda''}\right) &= 0{,}9280n & \log \left(\frac{d k_{(1)}}{d \lambda''}\right) &= 1{,}7077 \\ \log h \left(\frac{d k_{(1)}}{d \Lambda''}\right) &= 1{,}3843 & \log h \left(\frac{d k_{(1)}}{d \lambda''}\right) &= 2{,}1640n \\ k_{(1)} \left(\frac{d h}{d \Lambda''}\right) &= -28{,}59 & k_{(1)} \left(\frac{d h}{d \lambda''}\right) &= 335{,}6 \\ h \left(\frac{d k_{(1)}}{d \Lambda''}\right) &= 24{,}33 & h \left(\frac{d k_{(1)}}{d \lambda''}\right) &= -145{,}9 \\ \left(\frac{d H}{d \Lambda''}\right) &= -4{,}36 & \left(\frac{d H}{d \lambda''}\right) &= 209{,}7 \\ \log h_{(1)} &= 0{,}4150n & &= 0{,}4150n \\ \log \left(\frac{d k}{d \Lambda''}\right) &= 0{,}8696 & \log \left(\frac{d k}{d \lambda''}\right) &= 1{,}9660n \\ \log h_{(1)} \left(\frac{d k}{d \Lambda''}\right) &= 1{,}2846n & \log h_{(1)} \left(\frac{d k}{d \lambda''}\right) &= 2{,}3810 \\ \log k &= 0{,}7490 & &= 0{,}7490 \\ \log \left(\frac{d h_{(1)}}{d \Lambda''}\right) &= 0{,}1834n & \log \left(\frac{d h_{(1)}}{d \lambda''}\right) &= 1{,}4601n \\ \log k \left(\frac{d h_{(1)}}{d \Lambda''}\right) &= 0{,}9324n & \log k \left(\frac{d h_{(1)}}{d \lambda''}\right) &= 1{,}2091n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{(1)} \left(\frac{d k}{d \Lambda''}\right) &= -19{,}26 & h_{(1)} \left(\frac{d k}{d \lambda''}\right) &= 240{,}44 \\ k \left(\frac{d h_{(1)}}{d \Lambda''}\right) &= -8{,}56 & k \left(\frac{d h_{(1)}}{d \lambda''}\right) &= -161{,}85 \\ \left(\frac{d K}{d \Lambda''}\right) &= -27{,}82 & \left(\frac{d K}{d \lambda''}\right) &= 78{,}59 \end{aligned}$$

Dalle formole (44) dedurremo ora i valori delle funzioni prime di $\log M$, $\log N$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d h_{(1)}}{d \Lambda''}\right) &= -1{,}525 & \left(\frac{d h_{(1)}}{d \lambda''}\right) &= -28{,}85 \\ \left(\frac{d h}{d \Lambda''}\right) &= -4{,}928 & \left(\frac{d h}{d \lambda''}\right) &= 61{,}30 \\ \left(\frac{d h_{(1)}}{d \Lambda''}\right) - \left(\frac{d h}{d \Lambda''}\right) &= 3{,}403 & \left(\frac{d h_{(1)}}{d \lambda''}\right) - \left(\frac{d h}{d \lambda''}\right) &= 90{,}15 \\ \log \left\{\left(\frac{d h_{(1)}}{d \Lambda''}\right) - \left(\frac{d h}{d \Lambda''}\right)\right\} &= 0{,}5319 & \log \left\{\left(\frac{d h_{(1)}}{d \lambda''}\right) - \left(\frac{d h}{d \lambda''}\right)\right\} &= 1{,}9550n \\ C \log M &= 0{,}8870n & &= 0{,}8870n \\ \log \frac{1}{M} \left\{\left(\frac{d h_{(1)}}{d \Lambda''}\right) - \left(\frac{d h}{d \Lambda''}\right)\right\} &= 1{,}4189n & \log \frac{1}{M} \left\{\left(\frac{d h_{(1)}}{d \lambda''}\right) - \left(\frac{d h}{d \lambda''}\right)\right\} &= 2{,}8420 \\ \frac{1}{M} \left\{\left(\frac{d h_{(1)}}{d \Lambda''}\right) - \left(\frac{d h}{d \Lambda''}\right)\right\} &= -26{,}24 & \frac{1}{M} \left\{\left(\frac{d h_{(1)}}{d \lambda''}\right) - \left(\frac{d h}{d \lambda''}\right)\right\} &= 695{,}0 \\ \left(\frac{d H}{d \Lambda''}\right) &= -4{,}36 & \left(\frac{d H}{d \lambda''}\right) &= 209{,}7 \\ \left(\frac{d K}{d \Lambda''}\right) &= -27{,}82 & \left(\frac{d K}{d \lambda''}\right) &= 78{,}6 \\ \frac{H - K}{\mathrm{m}} \left(\frac{d \log M}{d \Lambda''}\right) &= -49{,}70 & \frac{H - K}{\mathrm{m}} \left(\frac{d \log M}{d \lambda''}\right) &= 563{,}9 \\ \log &= 1{,}6964n & \log &= 2{,}7512 \\ C \log (H - K) &= 9{,}6987n & &= 9{,}6987n \\ \log \frac{1}{\mathrm{m}} \left(\frac{d \log M}{d \Lambda''}\right) &= 1{,}3951 & \log \frac{1}{\mathrm{m}} \left(\frac{d \log M}{d \lambda''}\right) &= 2{,}4499 \end{aligned}$$

$$\log m = 4{,}3234$$
$$\log\left(\frac{d\log M}{d\Lambda''}\right) = 5{,}7183$$

$$\left(\frac{dk_{(1)}}{d\Lambda''}\right) = -8{,}472$$
$$\left(\frac{dk}{d\Lambda''}\right) = 7{,}406$$
$$\left(\frac{dk_{(1)}}{d\Lambda''}\right) - \left(\frac{dk}{d\Lambda''}\right) = -15{,}878$$

$$\log\left\{\left(\frac{dk_{(1)}}{d\Lambda''}\right) - \left(\frac{dk}{d\Lambda''}\right)\right\} = 1{,}2008n$$
$$C\log N = 1{,}0214n$$
$$\log\frac{1}{N}\left\{\left(\frac{dk_{(1)}}{d\Lambda''}\right) - \left(\frac{dk}{d\Lambda''}\right)\right\} = 2{,}2222$$

$$\frac{1}{N}\left\{\left(\frac{dk_{(1)}}{d\Lambda''}\right) - \left(\frac{dk}{d\Lambda''}\right)\right\} = 166{,}8$$
$$\left(\frac{dH}{d\Lambda''}\right) = -4{,}4$$
$$\left(\frac{dK}{d\Lambda''}\right) = -27{,}8$$
$$\frac{H-K}{m}\left(\frac{d\log N}{d\Lambda''}\right) = 143{,}4$$

$$\log = 2{,}1565$$
$$C\log(H-K) = 9{,}6987n$$
$$\log\frac{1}{m}\left(\frac{d\log N}{d\Lambda''}\right) = 1{,}8552n$$
$$\log m = 4{,}3234$$
$$\log\left(\frac{d\log N}{d\Lambda''}\right) = 6{,}1786n$$

$$= 4{,}3234$$
$$\log\left(\frac{d\log M}{d\lambda''}\right) = 6{,}7733n$$

$$\left(\frac{dk_{(1)}}{d\lambda''}\right) = 51{,}01$$
$$\left(\frac{dk}{d\lambda''}\right) = -92{,}47$$
$$\left(\frac{dk_{(1)}}{d\lambda''}\right) - \left(\frac{dk}{d\lambda''}\right) = 143{,}48$$

$$\log\left\{\left(\frac{dk_{(1)}}{d\lambda''}\right) - \left(\frac{dk}{d\lambda''}\right)\right\} = 2{,}1568$$
$$= 1{,}0214n$$
$$\log\frac{1}{N}\left\{\left(\frac{dk_{(1)}}{d\lambda''}\right) - \left(\frac{dk}{d\lambda''}\right)\right\} = 3{,}1782$$

$$\frac{1}{N}\left\{\left(\frac{dk_{(1)}}{d\lambda''}\right) - \left(\frac{dk}{d\lambda''}\right)\right\} = -1507{,}3$$
$$\left(\frac{dH}{d\lambda''}\right) = 209{,}7$$
$$\left(\frac{dK}{d\lambda''}\right) = 78{,}6$$
$$\frac{H-K}{m}\left(\frac{d\log N}{d\lambda''}\right) = -1638{,}4$$

$$\log = 3{,}2144n$$
$$= 9{,}6987n$$
$$\log\frac{1}{m}\left(\frac{d\log N}{d\lambda''}\right) = 2{,}9131$$
$$= 4{,}3234$$
$$\log\left(\frac{d\log N}{d\lambda''}\right) = 7{,}2365$$

Volendo altresì il valore delle funzioni prime dell' angolo Ω, s' istituisca colle formole (45) il calcolo seguente:

$$\frac{1}{m}\left(\frac{d\log M}{d\Lambda''}\right) = 24{,}84 \qquad \frac{1}{m}\left(\frac{d\log M}{d\lambda''}\right) = -281{,}8$$
$$\frac{1}{m}\left(\frac{d\log N}{d\Lambda''}\right) = 71{,}65 \qquad \frac{1}{m}\left(\frac{d\log N}{d\lambda''}\right) = 818{,}6$$
$$\frac{1}{m}\left\{\left(\frac{d\log M}{d\Lambda''}\right) - \left(\frac{d\log N}{d\Lambda''}\right)\right\} = 96{,}49 \qquad \frac{1}{m}\left\{\left(\frac{d\log M}{d\lambda''}\right) - \left(\frac{d\log N}{d\lambda''}\right)\right\} = 1100{,}4$$

$$\log = 1{,}9845 \qquad \log = 3{,}0446n$$
$$\log\sin 2\Omega = 9{,}9795 \qquad = 9{,}9795$$
$$C\log 2 = 9{,}6990 \qquad = 9{,}6990$$
$$\log\left(\frac{d\Omega}{d\Lambda''}\right) = 1{,}6630 \qquad \log\left(\frac{d\Omega}{d\lambda''}\right) = 2{,}7231n$$

I calcoli coi quali abbiamo ottenuti i valori delle premesse funzioni prime sono per verità un poco lunghi, ma d' altronde essi si fanno colla massima facilità tanto pel piccol numero di cifre decimali che conviene impiegare, quanto perchè una gran parte dei logaritmi che si usano si trovano già esposti nel precedente calcolo dell'orbita.

Se gli errori che si vorranno attribuire alle osservazioni saranno tali che i termini moltiplicati pei loro quadrati non abbiano notabile influenza sui valori di M, N, Ω, potremo colle ritrovate funzioni prime $\left(\frac{d\log M}{d\Lambda''}\right)$, $\left(\frac{d\log M}{d\lambda''}\right)$, $\left(\frac{d\log N}{d\Lambda''}\right)$, ecc. determinare i valori delle quantità $\log M$, $\log N$, Ω, a qualsivoglia errore si suppongano soggetti i luoghi geocentrici della seconda osservazione. Così supponendo che tanto la longitudine, quanto la latitudine siano insieme minori di 10″, ciò che è il caso più sfavorevole, osservando che la latitudine è australe, e perciò negativa, sarà

$$d\Lambda'' = -10'' \qquad -d\lambda'' = -10''$$

e quindi avremo

$$\log d\Lambda'' = 1{,}0000n \qquad \log d\lambda'' = 1{,}0000$$

$$\log\left(\frac{d\log M}{d\Lambda''}\right) = 5{,}7185 \qquad \log\left(\frac{d\log M}{d\lambda''}\right) = 6{,}7733n$$

$$\log\left(\frac{d\log N}{d\Lambda''}\right) = 6{,}1786n \qquad \log\left(\frac{d\log N}{d\lambda''}\right) = 7{,}2365$$

$$\log\left(\frac{d\Omega}{d\Lambda''}\right) = 1{,}6630 \qquad \log\left(\frac{d\Omega}{d\lambda''}\right) = 2{,}7201n$$

$$\log\left(\frac{d\log M}{d\Lambda''}\right)d\Lambda'' = 6{,}7185n \qquad \log\left(\frac{d\log M}{d\lambda''}\right)d\lambda'' = 7{,}7733n$$

$$\log\left(\frac{d\log N}{d\Lambda''}\right)d\Lambda'' = 7{,}1786 \qquad \log\left(\frac{d\log N}{d\lambda''}\right)d\lambda'' = 8{,}2365$$

$$\log\left(\frac{d\Omega}{d\Lambda''}\right)d\Lambda'' = 2{,}6630 \qquad \log\left(\frac{d\Omega}{d\lambda''}\right)d\lambda'' = 3{,}7201n$$

Essendo poi

$$d\log M = \left(\frac{d\log M}{d\Lambda''}\right)d\Lambda'' + \left(\frac{d\log M}{d\lambda''}\right)d\lambda''$$

$$d\log N = \left(\frac{d\log N}{d\Lambda''}\right)d\Lambda'' + \left(\frac{d\log N}{d\lambda''}\right)d\lambda''$$

$$d\Omega = \left(\frac{d\Omega}{d\Lambda''}\right)d\Lambda'' + \left(\frac{d\Omega}{d\lambda''}\right)d\lambda''$$

si troverà

$$d\log M = -0{,}00052 - 0{,}00593 = -0{,}00645$$

$$d\log N = 0{,}00151 + 0{,}01724 = 0{,}01875$$

$$d\Omega = -460'' - 5249'' = -5709'' = -1^\circ\,35'\,9''$$

Perciò i nuovi valori di $\log M$, $\log N$, Ω saranno

$$\log M = 9{,}10657n \qquad \log N = 8{,}99735n \qquad \Omega = 52^\circ\,8'\,34''$$

Supponendo diminuita la longitudine di 20″, e viceversa aumentata la latitudine di 10″ con un calcolo simile al precedente, risulteranno

per $\log M$, $\log N$, Ω i valori seguenti:

$$\log M = 9{,}11790n \qquad \log N = 8{,}96438n \qquad \Omega = 54^\circ\,55'\,2''$$

Siccome gli errori dati alle longitudini e latitudini nei due casi precedenti sono di tale grandezza che attinge i limiti di quelli che si possono supporre in osservazioni eseguite con qualche cura e con buoni istromenti, ed i valori risultati per Ω non sono tanto lontani dal vero da potersi ritenere per una prima approssimazione; così si può conchiudere che l'influenza di questi errori comunque sensibile non è tale da toglierci una prossima cognizione dell'orbita.

ARTICOLO IV.

Metodo per correggere gli elementi approssimati dell'orbita.

65.

Se per evitare l'influenza degli errori delle osservazioni altro mezzo non abbiamo, come dissi precedentemente, che di aumentare il numero delle osservazioni e correggere gli elementi dell'orbita in modo che soddisfacciano coi minori errori possibili a tutte le osservazioni, non deve però all'analisi essere necessario questo mezzo per togliere gli errori della seconda specie, cioè di quelli nati dalle piccole quantità che abbiamo trascurato nel valutare le α. L'analisi per compiere il suo oggetto deve procurarci una soluzione dalla quale, quando si abbiano delle osservazioni meritevoli di molta fiducia, si possano dedurre gli elementi in modo che i luoghi calcolati corrispondano esattamente a quelli osservati [1]. Volendo quindi nulla ommettere al compimento di quest'analisi, ho desti-

[1] Questa proposizione va intesa a tutto rigore nel caso che l'orbita sia dedotta da sole tre osservazioni; quando le osservazioni sono in numero maggiore, l'orbita non potrà esattamente soddisfare a tutte, a meno che avvenga o che le osservazioni siano prive d'errori, o che questi si compensino in modo che una trajettoria possa passare per tutti i luoghi osservati.

nato il presente articolo ad indicare i mezzi coi quali si può soddisfare a questa nuova condizione, ed a dare un saggio dell'applicazione de' medesimi con un esempio numerico.

66.

La ragione per cui non si è potuto da principio calcolare con esattezza le quantita α_1^{I}, α_3^{III}, ecc. si è perchè esse contenevano le quantità τ^{I}, τ^{III}, ecc. le quali erano ancora incognite. Queste ultime quantità rappresentano, come si è fatto osservare al numero 11, il doppio delle aree de' triangoli formati dai raggi vettori r', r''; r'', r''', ecc., e dalle corde che gli uniscono, divise per la radice del semiparametro dell' orbita. Ora dai valori in serie delle medesime quantità τ^{I}, τ^{III}, ecc., dati al numero 18, risulta che esse sono proporzionali al tempo decorso fra le due osservazioni moltiplicato per una serie che si avvicina molto all'unità allorchè θ è piccolo. Il valente sig. Gauss con artificj tutti nuovi è arrivato a somministrare un mezzo per determinare il valore di questa serie, che d' ora in avanti indicheremo con η, quando siano dati i due raggi vettori, l'angolo compreso e l'intervallo di tempo fra le due osservazioni, e questa determinazione forma uno de' più bei pregi dell' eccellente sua opera : *Theoria motus corporum cœlestium etc.* Ancorchè i valori che s' impiegano dei raggi vettori e della differenza delle anomalie vere non siano molto esatti, il valore η della detta serie risulta molto più vicino al vero. Questa circostanza offre un mezzo facile e pronto per correggere gli elementi dell'orbita degli errori dipendenti dalle quantità trascurate nel calcolo. In fatti presa, per esempio, l' orbita determinata nell' articolo II, si calcolino coi metodi del sig. Gauss, i quali riescono spediti perchè abbreviati da alcune tavole annesse all' opera citata, i valori di η corrispondenti alle quantità τ^{I}, $\tau^{\text{III}} = \tau_{(1)}^{\text{I}}$, $\tau_{(1)}^{\text{III}}$, e con questi valori si formino le quantità

$$1 - \frac{\tau^{\text{I}}}{T^{\text{I}}} \qquad 1 - \frac{\tau^{\text{III}}}{T^{\text{III}}}$$

$$1 - \frac{\tau_{(1)}^{\text{I}}}{T_{(1)}^{\text{I}}} \qquad 1 - \frac{\tau_{(1)}^{\text{III}}}{T_{(1)}^{\text{III}}}$$

nelle quali le T^{I}, $T^{\text{III}} = T_{(1)}^{\text{I}}$, $T_{(1)}^{\text{III}}$ che esprimono parimente le doppie aree dei triangoli fatti dai raggi vettori $R'\,R''$, $R''\,R'''$, $R'''\,R''''$ e dalle corde che uniscono le loro estremità divise per la radice del semiparametro della terra, sono conosciute per mezzo delle tavole del movimento di questo pianeta, dette tavole solari. Finchè i tempi fra le osservazioni non saranno molto grandi, come si è sempre supposto, i rapporti $\frac{\tau^{\text{I}}}{T^{\text{I}}}$, $\frac{\tau^{\text{III}}}{T^{\text{III}}}$, ecc. non differiranno molto dall'unità, e quindi le quattro sovrascritte quantità risulteranno molto piccole. Si sostituiscano queste quantità nei valori di α_1^{I}, α_3^{III}, ecc. dati dalle formole (120) del numero 25; ancorchè i rapporti $\frac{D'}{\delta'}$, $\frac{D'''}{\delta'''}$, ecc., contengano le δ' δ'', delle quali non abbiamo che dei valori approssimati, pure venendo moltiplicate per quantità piccole, l'influenza dei loro errori verrà a diminuire notabilmente. Per tal modo con maggiore approssimazione di prima avremo

$$\alpha_1^{\text{I}} = \left(1 - \frac{\tau^{\text{I}}}{T^{\text{I}}}\right)\frac{D'}{\delta'} \qquad \alpha_3^{\text{III}} = \left(1 - \frac{\tau^{\text{III}}}{T^{\text{III}}}\right)\frac{D'''}{\delta'''}$$

$$\alpha_{1(1)}^{\text{I}} = 1\left(-\frac{\tau_{(1)}^{\text{I}}}{T_{(1)}^{\text{I}}}\right)\frac{D'_{(1)}}{\delta'_{(1)}} \qquad \alpha_{3(1)}^{\text{III}} = \left(1 - \frac{\tau_{(1)}^{\text{III}}}{T_{(1)}^{\text{III}}}\right)\frac{D'''_{(1)}}{\delta'''_{(1)}}$$

Con questi nuovi valori di α_1^{I}, α_3^{III}, $\alpha_{(1)}^{\text{III}}$, ecc. riprenderemo la risoluzione delle equazioni fondamentali (134) ovvero (13), (14), poichè tutti gli altri calcoli preliminari si troveranno già fatti sino dalla prima approssimazione, e determineremo dei nuovi valori di M ed N, coi quali passeremo nello stesso modo indicato alla cognizione di tutti gli elementi dell' orbita. Se questi nuovi elementi non ci sembreranno ancora godere di una sufficiente approssimazione, si calcoleranno coi dati di questi degli altri valori di η', η'', $\eta'_{(1)}$ ecc. che riusciranno assai più prossimi al vero dei primi; e con questi seguendo la stessa strada, determineremo degli altri elementi parimente più vicini al vero; e così ripetendo l' operazione quanto ci piace, potremo attingere tutta quell' esattezza della quale è suscettibile la risoluzione delle equazioni (134) ovvero (13), (14).

67.

Applichiamo tutto ciò all'esempio trattato nell'articolo II. Siccome ci mancano ancora i valori di $log\, r'$, $log\, r'''$; u', u''''; $log\, \delta'$, $log\, \delta''''$, giacchè al numero 56 non abbiamo determinati che quelli di $log\, r''$, $log\, r'''$; u'', u''', ecc. che erano i soli dei quali avevamo bisogno; così converrà prima di tutto calcolare i detti valori, ciò che ho fatto colle formole 37, l'uso del numero delle quali essendo già conosciuto, non riporterò qui che i risultamenti, e sono:

$$log\, r' = 0{,}06741 \qquad log\, r''' = 0{,}21040$$
$$u' = 201^\circ\, 27'\, 5'' \qquad u'''' = 218^\circ\, 3'\, 20''$$
$$log\, \delta' = 9{,}11343 \qquad log\, \delta'''' = 9{,}48293$$

Con questi e coi già riferiti valori dei raggi vettori e degli argomenti di latitudine ho calcolato, secondo i metodi citati del sig. Gauss, i valori di η', $\eta''' = \eta'_{(1)}$, $\eta'''_{(1)}$ [1] che risultarono i seguenti:

$$log\, \eta' = 9{,}9988852$$
$$log\, \eta''' = log\, \eta'_{(1)} = 9{,}9992144$$
$$log\, \eta'''_{(1)} = 9{,}9994223$$

Moltiplicando questi valori per θ o sia pel prodotto di $\sqrt{g}$ nell'intervallo di tempo fra le osservazioni, il qual prodotto chiamasi tempo fra le osservazioni ridotto in parti del raggio, avremo i valori di τ^{1}, $\tau^{111} = \tau^{1}_{(1)}$, $\tau^{111}_{(1)}$.

$$log\, t = log\, 10 = 1{,}0000000$$
$$log\, \sqrt{g} = 8{,}2355814$$
$$log\, \theta = 9{,}2355814$$

[1] I valori di $log\, \eta'$, ecc. sono i complementi di quelli di $log\, y$, di cui parla il professore Gauss ai numeri 91 — 95 della detta opera.

$$log\, \theta = 9{,}2355814$$
$$log\, \eta' = 9{,}9988852$$
$$log\, \eta''' = log\, \eta'_{(1)} = 9{,}9992144$$
$$log\, \eta'''_{(1)} = 9{,}9994223$$
$$log\, \tau^{1} = 9{,}2344666$$
$$log\, \tau^{111} = log\, \tau^{1}_{(1)} = 9{,}2347958$$
$$log\, \tau^{111}_{(1)} = 9{,}2350037$$

A questi valori di τ^{1}, $\tau^{111} = \tau^{1}_{(1)}$, $\tau^{111}_{(1)}$ unisco quelli di T^{1}, $T^{111} = T^{1}_{(1)}$, $T^{111}_{(1)}$ che si calcolano giusta le formole (126) del numero 26 nel seguente modo:

$$L'' = 230^\circ\, 50'\, 17''$$
$$L' = 221\ \ 10\ \ 41$$
$$L'' - L' = 9\ \ 39\ \ 36$$

$$log\, D' = 0{,}0038110$$
$$log\, D'' = 0{,}0047770$$
$$log\, sin\, (L'' - L') = 9{,}2247950$$
$$C\, .\, log\, \sqrt{P} = 0{,}0000060$$
$$log\, T^{1} = 9{,}2333890$$

$$L''' = 240\ \ 27\ \ 26$$
$$L'' = 230\ \ 50\ \ 17$$
$$L''' - L'' = 9\ \ 37\ \ 9$$

$$log\, D'' = 0{,}0047770$$
$$log\, D''' = 0{,}0056400$$
$$log\, sin\, (L''' - L'') = 9{,}2229728$$
$$C\, log\, \sqrt{P} = 0{,}0000060$$
$$log\, T^{111} = log\, T^{1}_{(1)} = 9{,}2333958$$

$$L'''' = 239\ \ 2\ \ 48$$
$$L''' = 240\ \ 27\ \ 26$$
$$L'''' - L''' = 9\ \ 35\ \ 22$$

$$log\, D''' = 0{,}0056400$$
$$log\, D'''' = 0{,}0063200$$
$$log\, sin\, (L'''' - L''') = 9{,}2216413$$
$$C\, log\, \sqrt{P} = 0{,}0000060$$
$$log\, T^{111}_{(1)} = 9{,}2336073$$

68.

Determinati questi valori di τ^{1}, τ^{111}, ecc. T^{1}, T^{111}, ecc., compongo ora quelli di α^{1}_{1}, α^{111}_{3}; $\alpha^{1}_{1(1)}$, $\alpha^{111}_{3(1)}$, eseguendo il calcolo seguente:

$$\log \tau^{\mathrm{I}} = 9{,}2344666$$
$$C \log T^{\mathrm{I}} = 0{,}7666110$$

$$\frac{\tau^{\mathrm{I}}}{T^{\mathrm{I}}} = 1{,}0024843 \qquad \log \frac{\tau^{\mathrm{I}}}{T^{\mathrm{I}}} = 0{,}0010776$$

$$1 - \frac{\tau^{\mathrm{I}}}{T^{\mathrm{I}}} = -0{,}0024843 \qquad \log\left(1 - \frac{\tau^{\mathrm{I}}}{T^{\mathrm{I}}}\right) = 7{,}3952040n$$

$$\log D' = 0{,}0038110$$
$$C \log \delta' = 0{,}8865700n$$

$$\log \alpha_1^{\mathrm{I}} = 8{,}2855850$$
$$\log \tau^{\mathrm{III}} = 9{,}2347958$$
$$C \log T^{\mathrm{III}} = 0{,}7666042$$

$$\frac{\tau^{\mathrm{III}}}{T^{\mathrm{III}}} = 1{,}0032288 \qquad \log \frac{\tau^{\mathrm{III}}}{T^{\mathrm{III}}} = 0{,}0014000$$

$$1 - \frac{\tau^{\mathrm{III}}}{T^{\mathrm{III}}} = -0{,}0032288 \qquad \log\left(1 - \frac{\tau^{\mathrm{III}}}{T^{\mathrm{III}}}\right) = 7{,}5090411n$$

$$\log D''' = 0{,}0056400$$
$$C \log \delta''' = 0{,}6048000n$$

$$\log \alpha_3^{\mathrm{III}} = 8{,}1194811$$

$$1 - \frac{\tau^{\mathrm{I}}_{(1)}}{T^{\mathrm{I}}_{(1)}} = 1 - \frac{\tau^{\mathrm{III}}}{T^{\mathrm{III}}} \qquad \log\left(1 - \frac{\tau^{\mathrm{I}}_{(1)}}{T^{\mathrm{I}}_{(1)}}\right) = 7{,}5090411$$

$$\log D'' = 0{,}0047770$$
$$C \log \delta'' = 0{,}7205100n$$

$$\log \alpha^{\mathrm{I}}_{1(1)} = 8{,}2343281$$
$$\log \tau^{\mathrm{III}}_{(1)} = 9{,}2350037$$
$$C \log T^{\mathrm{III}}_{(1)} = 0{,}7663927$$

$$\frac{\tau^{\mathrm{III}}}{T^{\mathrm{III}}} = 1{,}0032205 \qquad \log \frac{\tau^{\mathrm{III}}_{(1)}}{T^{\mathrm{III}}_{(1)}} = 0{,}0013964$$

$$1 - \frac{\tau^{\mathrm{III}}_{(1)}}{T^{\mathrm{III}}_{(1)}} = -0{,}0032205 \qquad \log\left(1 - \frac{\tau^{\mathrm{III}}_{(1)}}{T^{\mathrm{III}}_{(1)}}\right) = 7{,}5079233n$$

$$\log D'''' = 0{,}0063200$$
$$C \log \delta'''' = 0{,}5170700$$

$$\log \alpha^{\mathrm{III}}_{3(1)} = 8{,}0313133$$

69.

Con questi valori di α_1^{I}, α_3^{III}; $\alpha^{\mathrm{I}}_{1(1)}$, $\alpha^{\mathrm{III}}_{3(1)}$ avendo già determinati quelli di m', n'; m'', ecc.; a_1^{I}, a_3^{III}, ecc. nell'articolo II [1] non ci resta che di comporre le equazioni (13), (14), battendo la stessa strada seguita al numero 58.

Calcolo della prima equazione.

$$\log \alpha_1^{\mathrm{I}} = 0{,}9155160n$$
$$C \log \alpha_3^{\mathrm{III}} = 9{,}3482631n$$

$$d' = 1 \qquad \log \alpha_1^{\mathrm{I}} : \alpha_3^{\mathrm{III}} = 0{,}2637791$$
$$d'_1 = 1{,}8356047$$
$$d' - d'_1 = -0{,}8356047$$

$$\log \alpha_1^{\mathrm{I}} = 8{,}2855850$$
$$n' = -0{,}2217825 \qquad \log \nu' = 9{,}8184906n$$
$$\alpha_1^{\mathrm{I}} \nu' = -0{,}0127080 \qquad \log \alpha_1^{\mathrm{I}} \nu' = 8{,}1040756n$$
$$f' = -0{,}2344905$$

$$\log \alpha_3^{\mathrm{III}} = 8{,}1194811$$
$$n''' = -1{,}4205388 \qquad \log \nu''' = 9{,}9395131n$$
$$\alpha_3^{\mathrm{III}} \nu''' = -0{,}0114550 \qquad \log \alpha_3^{\mathrm{III}} \nu''' = 8{,}0589942n$$
$$n''' + \alpha_3^{\mathrm{III}} \nu''' = -1{,}4319938 \qquad \log (n''' + \alpha_3^{\mathrm{III}} \nu''') = 0{,}1559411n$$
$$\log \alpha_1^{\mathrm{I}} : \alpha_3^{\mathrm{III}} = 0{,}2637791$$

$$f_1' = -2{,}6285736 \qquad \log f_1' = 0{,}4197202n$$
$$f' - f'_1 = 2{,}3940831 \qquad \log (f' - f_1') = 0{,}3791392$$
$$C \log (d' - d_1') = 0{,}0779991n$$

$$h = -2{,}8650900 \qquad \log h = 0{,}4571383n$$

[1] A questo fine abbiamo calcolato al numero 52 con 7 cifre decimali i logaritmi di m', n'; m'', ecc.; a_1^{I}, a_3^{III}, ecc., ciò che sarà bene di praticare ogni volta che si avrà intenzione di progredire nella correzione degli elementi per non ripeterne il calcolo posteriormente.

$$\log \alpha_1^1 = 8,2855850$$
$$m' = 1,6326575 \qquad \log \mu' = 9,8766030n$$
$$\alpha_1^1 \mu' = 0,0145274 \qquad \log \alpha_1^1 \mu' = 8,1621880n$$
$$g' = 1,6181301$$

$$\log \alpha_3^{111} = 8,1194811$$
$$m''' = 3,4402932 \qquad \log \mu''' = 9,6929114n$$
$$\alpha_3^{111} \mu''' = -0,0064922 \qquad \log \alpha_3^{111} \mu''' = 7,8123925n$$
$$m''' + \alpha_3^{111} \mu''' = -3,4338010 \qquad \log (m''' + \alpha_3^{111} \mu''') = 0,5357751$$
$$\log a_1^1 : a_3^{111} = 0,2637791$$
$$g_1' = 6,3031000 \qquad \log g_1' = 0,7995542$$
$$g' - g_1' = -4,6849699 \qquad \log (g' - g_1') = 0,6707068n$$
$$C \log (d' - d'_1) = 0,0779991n$$
$$k = 5,6066813 \qquad \log k = 0,7487059$$

Quindi la prima equazione sarà

$$5,6066813\, c''' + 2,8650900\, c'' + c' - C' = 0$$

Calcolo della seconda equazione.

$$\log a_1^1 = 0,6466790n$$
$$d = 1 \qquad C \log a_3^{111} = 9,5478374n$$
$$d'_1 = 1,5650075 \qquad \log a_1^1 : \alpha_3^{111} = 0,1945154$$
$$d' - d'_1 = -0,5650075$$

$$\log \alpha_1^1 = 8,2343281$$
$$n'' = -1,0413534 \qquad \log \nu'' = 9,8895057n$$
$$\alpha_1^1 \nu'' = -0,0132995 \qquad \log \alpha_1^1 \nu'' = 8,1238338n$$
$$f' = -1,0546529$$

$$\log \alpha_3^{111} = 8,0313133$$
$$n'''' = -1,6024396 \qquad \log \nu'''' = 9,9731144n$$
$$\alpha_3^{111} \nu'''' = -0,0101025 \qquad \log \alpha_3^{111} \nu'''' = 8,0044277n$$
$$n'''' + \alpha_3^{111} \nu'''' = -1,6925421 \qquad \log (n'''' + \alpha_3^{111} \nu'''') = 0,2075111n$$
$$\log a_1^1 : a_3^{111} = 0,1945164$$
$$f'_1 = -2,5236406 \qquad \log f'_1 = 0,4020275$$
$$f' - f'_1 = 1,4689877 \qquad \log (f' - f'_1) = 0,1670182$$
$$C \log (d' - d'_1) = 0,2479458n$$
$$h_{(1)} = -2,5999442 \qquad \log h_{(1)} = 0,4149640n$$

$$\log \alpha_1^1 = 8,2343281$$
$$m'' = 2,7938164 \qquad \log \mu'' = 9,8003833n$$
$$\alpha_1^1 \mu'' = -0,0108321 \qquad \log \alpha_1^1 \mu'' = 8,0347114n$$
$$g' = 2,7829843$$

$$\log \alpha_3^{111} = 8,0313133$$
$$m'''' = 3,8762380 \qquad \log \mu'''' = 9,5330786n$$
$$\alpha_3^{111} \mu'''' = 0,0036677 \qquad \log \alpha_3^{111} \mu'''' = 7,5643919n$$
$$m'''' + \alpha_3^{111} \mu'''' = -3,8725703 \qquad \log (m'''' + \alpha_3^{111} \mu'''') = 0,5879993$$
$$\log a_1^1 : a_3^{111} = 0,1945164$$
$$g'_1 = 6,0606014 \qquad \log g'_1 = 0,7825157$$
$$g' - g'_1 = -3,2776171 \qquad \log (g' - g'_1) = 0,5155583n$$
$$C \log (d' - d'_1) = 0,2479458n$$
$$k_{(1)} = 5,8010168 \qquad \log k_{(1)} = 0,7635041$$

Avremo perciò la seconda equazione così espressa:

$$5,8010168\, c''' + 2,5999442\, c'' + c' - C' = 0.$$

70.

Dalle due equazioni ora calcolate dedurremo i valori di $log\, M$, $log\, N$ nel modo che siegue:

$$\begin{aligned} log\, h &= 0{,}4571383n \\ log\, k_{(1)} &= 0{,}7635041 \\ \hline log\, h\, k_{(1)} &= 1{,}2206424n \end{aligned} \qquad \begin{aligned} log\, k &= 0{,}7487059 \\ log\, h_{(1)} &= 0{,}4149640n \\ \hline log\, k\, h_{(1)} &= 1{,}1636699n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h\, k &= -16{,}620438 \\ k\, h_{(1)} &= -14{,}577057 \\ \hline h\, k_{(1)} - k\, h_{(1)} &= -\ 2{,}043381 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{(1)} &= -2{,}5999442 \\ h &= -2{,}8650900 \\ \hline h_{(1)} - h &= 0{,}2651458 \\ log\,(h_{(1)} - h) &= 9{,}4234848 \\ log\,(hk_{(1)} - kh_{(1)}) &= 9{,}6896507n \\ \hline log\, M &= 9{,}1131355n \end{aligned} \qquad \begin{aligned} k_{(1)} &= 5{,}8010168 \\ k &= 5{,}6066813 \\ \hline k_{(1)} - k &= 0{,}1943355 \\ log\,(k_{(1)} - k) &= 9{,}2885522 \\ &= 9{,}6896507n \\ \hline log\, N &= 8{,}9782029n \end{aligned}$$

71.

Prima di progredire faremo un' osservazione che gioverà molto a stimare il grado d' approssimazione colla quale si può determinare l'orbita di un corpo celeste con osservazioni vicine. Se immaginiamo che qualcuna delle longitudini o latitudini geocentriche della cometa, per esempio la latitudine della seconda osservazione venga alterata appena di una centesima di secondo, non sarà difficile il vedere per mezzo delle funzioni prime date nell' articolo precedente, che le quantità a_1^{I}, a_3^{III} e h, k anderanno soggette ad un errore circa cinquanta volte maggiore, che i logaritmi di M ed N verranno ad essere intaccati di una o quasi due unità nella loro quinta cifra decimale, e che la longitudine dei nodi verrà a cangiare di 5″, 29, di modo che in generale l' impercettibile errore di

una centesima di secondo nelle osservazioni può introdurre degli errori sensibili negli elementi dell' orbita. Questa riflessione basterà a persuadere che ogni cura deve porre l' astronomo nella scelta e nelle riduzioni delle osservazioni che vuole impiegare per la determinazione dell'orbita, e che infine converrà correggere gli elementi con osservazioni lontane, perchè l'orbita attinga qualche grado di precisione.

72.

Coi valori di M ed N determiniamo ora tutti gli elementi dell'orbita. Cominciando dalla longitudine dei nodi, avremo

$$\begin{aligned} log\, M &= 9{,}1131355n \\ C\, log\, N &= 8{,}0217971n \\ \hline log\, tan\, \Omega &= 0{,}1349326 \\ \Omega &= 53^\circ\, 45'\, 39{,}19 \end{aligned}$$

Per mezzo di questa longitudine dei nodi e dei valori di M ed N passo ora a determinare l'inclinazione dell'orbita e la radice del semiparametro nel modo seguito al numero 55.

$$\begin{aligned} d'_1 &= 1{,}8356047 \\ & \qquad\qquad log\, f'_1 = 0{,}4197202n \\ & \qquad\qquad log\, N = 8{,}9782029n \\ \hline f'_1 N &= 0{,}2499903 \qquad log\, f'_1 N = 9{,}3979231 \\ & \qquad\qquad log\, g'_1 = 0{,}7995542 \\ & \qquad\qquad log\, M = 9{,}1131355n \\ \hline g'_1 M &= -0{,}8178802 \qquad log\, g_1' M = 9{,}9126897n \\ \hline d'_1 - f'_1 N + g'_1 M &= 0{,}7677342 \qquad log\,(d'_1 - f'_1 N + g'_1 M) = 9{,}8852109 \\ & \qquad\qquad C\, log\, a_1^{\mathrm{I}} = 9{,}0844840n \\ \hline O'' &= -0{,}0932599 \qquad log\, O'' = 8{,}9696949n \end{aligned}$$

$$\log \nu'' = 9{,}8895057n$$
$$\log N = 8{,}9782029n$$
$$\nu'' N = 0{,}0737409 \qquad \log \nu'' N = 8{,}8677086$$

$$\log \mu'' = 9{,}8003833n$$
$$\log M = 9{,}1131355n$$
$$\mu'' M = 0{,}0819443 \qquad \log \mu'' M = 8{,}9135188$$
$$O'' + \nu'' N - \mu'' M = -0{,}1014633 \qquad \log (O'' + \nu'' N - \mu'' M) = 9{,}0063090n$$
$$\log C' = 9{,}9999940$$
$$\log(O'' + \nu'' N - \mu'' M) C' = 9{,}0063030n$$

$$o'' = 1$$

$$\log n'' = 0{,}0175982n$$
$$\log N = 8{,}9782029n$$
$$n'' N = 0{,}0990378 \qquad \log n'' N = 8{,}9958011$$

$$\log m'' = 0{,}4461979n$$
$$\log M = 9{,}1131355$$
$$m'' M = 0{,}3625212 \qquad \log m'' M = 9{,}5593334n$$
$$o'' - n'' N + m'' M = 0{,}5384410 \qquad \log (o'' - n'' N + m'' M) = 0{,}2688619$$
$$C \log O'' = 1{,}0303051n$$
$$\log(O'' + \nu'' N - \mu'' M) C' = 9{,}0063030n$$

$$C' - c' = 2{,}0205519 \qquad \log (C' - c') = 0{,}3054700$$
$$C' = 0{,}9999862 \qquad \log M = 9{,}1131355$$
$$c' = -1{,}0205657 \qquad \log c''' = 9{,}4186055$$
$$C \log c' = 9{,}9911590n$$
$$C \log \sin \Omega = 0{,}0933650$$

$$i = 162^\circ\, 19'\, 57'',21 \qquad \log \tan i = 9{,}5031295n$$
$$\log c' = 0{,}0088410n$$
$$C \log \cos i = 0{,}0209826n$$
$$\log \sqrt{p} = 0{,}0298236$$

73.

Siccome le formole (30), (32) del numero 51 contengono le differenze degli argomenti di latitudine e dei rapporti $\frac{p}{r}$, in modo che se le osservazioni sono vicine i piccoli errori ai quali possono essere soggette queste quantità hanno una più grande influenza in seguito; così a fine di diminuire il loro effetto ho scelto la prima e l'ultima delle osservazioni, e colle formole del numero 37 ho calcolato i logaritmi dei raggi vettori e gli argomenti di latitudine, che risultarono i seguenti:

$$\log r' = 0{,}0674449 \qquad \log r'''' = 0{,}2109057$$
$$u' = 201^\circ\, 29'\, 59'',49 \qquad u'''' = 218^\circ\, 8'\, 19'',15$$

Da questi valori di r', r''''; u', u'''' e da quello di p si deduce l'argomento di latitudine del perielio col seguente calcolo:

$$\log p = 0{,}0596472$$
$$C \log r' = 9{,}9325551$$
$$C \log r'''' = 9{,}7890943$$
$$\frac{p}{r'} = 0{,}9822053 \qquad \log \frac{p}{r'} = 9{,}9922023$$
$$\frac{p}{r''''} = 0{,}7058973 \qquad \log \frac{p}{r''''} = 9{,}8487415$$
$$q'''' - q' = 0{,}2763080 \qquad \log (q'''' - q') = 9{,}4413935$$
$$q'''' + q' = 0{,}3118974 \qquad C \log (q'''' + q') = 0{,}5059882n$$
$$\frac{u'''' - u'}{2} = 8^\circ\, 19'\, 9'',83 \qquad \log \cot \left(\frac{u'''' - u'}{2}\right) = 0{,}8349635$$
$$\tfrac{1}{2} u'''' + \tfrac{1}{2} u' - \varpi = 99\ 22\ 22{,}82 \qquad \log \tan (\tfrac{1}{2} u'''' + \tfrac{1}{2} u' - \varpi) = 0{,}7823452n$$
$$\tfrac{1}{2} u'''' + \tfrac{1}{2} u' = 209\ 49\ 9{,}32$$
$$\varpi = 110\ 26\ 46{,}50$$

E quindi avremo la longitudine del perielio π, facendo

$$\varpi = 110^\circ\, 26'\, 46'',50$$
$$\Omega = 53\ 45\ 39{,}19$$
$$\pi = 164\ 12\ 25{,}69$$

L'eccentricità e si ottiene col seguente processo:

$$\log (q'' - q') = 9{,}4413935$$
$$C \log \sin (u'''' - u') = 0{,}8395579$$
$$C \log \sin (\tfrac{1}{2} u'''' + \tfrac{1}{2} u' - \tilde{\omega}) = 0{,}0058373$$
$$C \log 2 = 9{,}6989700$$
$$e = 0{,}9677400 \qquad \log e = 9{,}9857587$$

Trovato e, si cerca la distanza perielia q nel modo che siegue:

$$\log p = 0{,}0596572$$
$$1 + e = 1{,}9677400 \qquad C \log (1 + e) = 9{,}7060323$$
$$\log q = 9{,}7656795$$

Ho finalmente determinato il tempo del passaggio al perielio coll'enunciato metodo del signor Gauss, usando dell' anomalia della prima osservazione, ed ho ritrovato

$$\theta = 71,\ 54957.$$

74.

Tutti i ritrovati elementi ridotti in una tavola somministrano la seguente:

Tempo del passaggio al perielio	71, 54957
Logaritmo della distanza perielia	9,7656795
Eccentricità	0,9677400
Longitudine del perielio	164° 12′ 25″,69
Inclinazione	162 19 57,21
Longitudine del nodo ascendente	53 45 39,19

Quantunque i valori di η', η''', ecc. che abbiamo usati non fossero ancora totalmente esatti, tuttavia questi elementi godono di quell' approssimazione che puossi desiderare in simili ricerche. Tralasceremo perciò di proseguire il presente calcolo, giacchè quanto abbiam fatto basta a dare un' idea del modo con cui vanno eseguite queste correzioni, ed il di più sarebbe superfluo, non trattandosi qui di determinare l'orbita in questione. D' altronde per ricadere esattamente negli elementi di Klinkenberg converrebbe fare il calcolo a 9 o 10 cifre decimali, perchè, come si è fatto osservare al numero 71, i piccoli errori sulla settima cifra decimale delle prime quantità possono produrre degli errori sulla quinta nel valore degli elementi.

75.

Terminerò quest'analisi sul problema della determinazione di una nuova orbita, indicando un mezzo che può esser utile per istituire la ricerca di un'orbita interessante su di un gran numero d'osservazioni, al fine d' eludere in gran parte l' effetto che hanno gli errori delle medesime. Questo mezzo potrà anche giovare nel caso che il corpo celeste in tutto il tempo dell' apparizione siasi conservato ad una distanza pressochè eguale dalla terra, nel qual caso le equazioni (134) che nascono dal paragone del doppio valore di due qualunque delle enunciate distanze riescono quasi identiche, e gli errori delle osservazioni acquistano molta influenza.

Tutti i migliori metodi finora proposti per la determinazione d'un'orbita conducono alla risoluzione di un'equazione, la quale consta fra i dati di un certo numero di osservazioni ed un'incognita. Se si cangiano le osservazioni, un'altra incognita subentra al luogo della prima, e la determinazione del valore di questa dipende parimente dai dati d' uno stesso numero d' osservazioni, in modo che non si può far concorrere a dirittura molte osservazioni alla ricerca della nuova orbita. A questa difficoltà non sono soggette le nostre equazioni, le quali hanno per incognite delle quantità che rimangono costanti cangiando le osservazioni. Si dividano perciò le osservazioni, che voglionsi impiegare, a tre a tre in tanti gruppi, e con ciascuno di questi gruppi formisi un'equazione simile a quella segnata (13). Fatto al solito

SUPPLIMENTO

ALLA NUOVA ANALISI DEL PROBLEMA

DI DETERMINARE LE ORBITE DEI CORPI CELESTI

76.

La soluzione del problema di determinare l'orbita d'un pianeta o d'una cometa dedotta dalla precedente analisi è fondata sulla supposizione che le quantità τ, T, le quali dinotano i doppj delle aree dei settori triangolari del corpo celeste e della terra divisi per la radice del rispettivo semiparametro, siano espresse dalle formole $\theta - \frac{\theta^3}{6r^3}$, $\theta - \frac{\theta^3}{6R^3}$. Se i raggi vettori r del corpo celeste sono maggiori di quelli R della terra, avviene spesso che i quozienti τ sono rappresentati abbastanza prossimamente dalla premessa formola per un tempo assai più lungo che non sono quelli T della loro corrispondente. In questi casi i valori approssimati di τ permetterebbero di servirsi per la determinazione dell'orbita di osservazioni fatte a più grandi intervalli di tempo, se non si fosse costretti d'abbandonare un tale vantaggio a motivo dell'insufficiente approssimazione delle T. Il conservare però per le T la riferita espressione non è punto essenziale all'ottenuta soluzione, quindi correderò il metodo dell'enunciato vantaggio esponendo in questo Supplimento le modificazioni che ricevono le nostre formole allorchè non si possa o non si voglia ammettere una tale supposizione.

Perciò facciamo per maggiore generalità

$$\tau^{\prime} = \theta'\left(1 - \frac{\theta'^2}{6r'^3} + \sigma'\right) \qquad T^{\prime} = \theta'\left(1 - \frac{\theta'^2}{6R'^3} + s'\right)$$

$$\tau^{\prime\prime\prime} = \theta'''\left(1 - \frac{\theta'''^2}{6r'''^3} + \sigma'''\right) \qquad T^{\prime\prime\prime} = \theta'''\left(1 - \frac{\theta'''^2}{6R'''^3} + s'''\right)$$

SUPPLIMENTO

ALLA NUOVA ANALISI DEL PROBLEMA

DI DETERMINARE LE ORBITE DEI CORPI CELESTI

76.

La soluzione del problema di determinare l'orbita d'un pianeta o d'una cometa dedotta dalla precedente analisi è fondata sulla supposizione che le quantità τ, T, le quali dinotano i doppj delle aree dei settori triangolari del corpo celeste e della terra divisi per la radice del rispettivo semiparametro, siano espresse dalle formole $\theta - \frac{\theta^3}{6r^3}$, $\theta - \frac{\theta^3}{6R^3}$. Se i raggi vettori r del corpo celeste sono maggiori di quelli R della terra, avviene spesso che i quozienti τ sono rappresentati abbastanza prossimamente dalla premessa formola per un tempo assai più lungo che non sono quelli T della loro corrispondente. In questi casi i valori approssimati di τ permetterebbero di servirsi per la determinazione dell'orbita di osservazioni fatte a più grandi intervalli di tempo, se non si fosse costretti d'abbandonare un tale vantaggio a motivo dell'insufficiente approssimazione delle T. Il conservare però per le T la riferita espressione non è punto essenziale all'ottenuta soluzione, quindi correderò il metodo dell'enunciato vantaggio esponendo in questo Supplimento le modificazioni che ricevono le nostre formole allorchè non si possa o non si voglia ammettere una tale supposizione.

Perciò facciamo per maggiore generalità

$$\tau^{\text{I}} = \theta'\left(1 - \frac{\theta'^2}{6r'^3} + \sigma'\right) \qquad T^{\text{I}} = \theta'\left(1 - \frac{\theta'^2}{6R'^3} + s'\right)$$

$$\tau^{\text{III}} = \theta'''\left(1 - \frac{\theta'''^2}{6r'''^3} + \sigma'''\right) \qquad T^{\text{III}} = \theta'''\left(1 - \frac{\theta'''^2}{6R'''^3} + s'''\right)$$

e supponiamo

$$\frac{\tau^{\mathrm{I}}}{\tau^{\mathrm{III}}} = \frac{\theta'}{\theta'''}\left(1 - \frac{\theta'^2 - \theta'''^2}{6r''^3}\right) + \Sigma_3^{\mathrm{I}}$$

$$\frac{\tau^{\mathrm{II}}}{\tau^{\mathrm{III}}} = \frac{\theta''}{\theta'''}\left(1 - \frac{\theta''^2 - \theta'''^2}{6r''^3}\right) + \Sigma_3^{\mathrm{II}}$$

$$\frac{\tau^{\mathrm{II}}}{\tau^{\mathrm{I}}} = \frac{\theta''}{\theta'}\left(1 - \frac{\theta''^2 - \theta'^2}{6r''^3}\right) + \Sigma_1^{\mathrm{II}}$$

$$\frac{\tau}{\tau^{\mathrm{I}}} = \frac{\theta'''}{\theta'}\left(1 - \frac{\theta'''^2 - \theta'^2}{6r'^3}\right) + \Sigma_1^{\mathrm{III}}$$

$$\frac{T^{\mathrm{I}}}{T^{\mathrm{III}}} = \frac{\theta'}{\theta'''}\left(1 - \frac{\theta'^2 - \theta'''^2}{6R''^3}\right) + S_3^{\mathrm{I}}$$

$$\frac{T^{\mathrm{II}}}{T^{\mathrm{III}}} = \frac{\theta''}{\theta'''}\left(1 - \frac{\theta''^2 - \theta'''^2}{6R''^3}\right) + S_3^{\mathrm{II}}$$

$$\frac{T^{\mathrm{II}}}{T^{\mathrm{I}}} = \frac{\theta''}{\theta'}\left(1 - \frac{\theta''^2 - \theta'^2}{6R''^3}\right) + S_1^{\mathrm{II}}$$

$$\frac{T^{\mathrm{III}}}{T^{\mathrm{I}}} = \frac{\theta'''}{\theta'}\left(1 - \frac{\theta'''^2 - \theta'^2}{6R''^3}\right) + S_1^{\mathrm{III}}.$$

Da queste supposizioni, conservando le denominazioni già adottate, non sarà difficile il dedurre le seguenti equazioni:

$$\frac{\tau^{\mathrm{I}}}{\tau^{\mathrm{III}}} - \frac{T^{\mathrm{I}}}{T^{\mathrm{III}}} = \rho\,(1 - \sigma)\,\frac{1}{\theta'}\,\{\tau^{\mathrm{I}} - T^{\mathrm{I}} - \theta'\,(\sigma' - s')\} + \Sigma_3^{\mathrm{I}} - S_3^{\mathrm{I}}$$

$$\frac{\tau^{\mathrm{II}}}{\tau^{\mathrm{III}}} - \frac{T^{\mathrm{II}}}{T^{\mathrm{III}}} = \rho\,(1 + 2\sigma)\,\frac{1}{\theta'}\,\{\tau^{\mathrm{I}} - T^{\mathrm{I}} - \theta'\,(\sigma' - s')\} + \Sigma_3^{\mathrm{II}} - S_3^{\mathrm{II}}$$

$$\frac{\tau^{\mathrm{II}}}{\tau^{\mathrm{I}}} - \frac{T^{\mathrm{II}}}{T^{\mathrm{I}}} = \rho\,(2 + \sigma)\,\frac{1}{\theta'''}\,\{\tau^{\mathrm{III}} - T^{\mathrm{III}} - \theta'''\,(\sigma''' - s''')\} + \Sigma^{\mathrm{II}} - S_1^{\mathrm{II}}$$

$$\frac{\tau^{\mathrm{III}}}{\tau^{\mathrm{I}}} - \frac{T^{\mathrm{III}}}{T^{\mathrm{I}}} = \rho\,(\sigma - 1)\,\frac{1}{\theta'''}\,\{\tau^{\mathrm{III}} - T^{\mathrm{III}} - \theta'''\,(\sigma''' - s''')\} + \Sigma_1^{\mathrm{III}} - S_1^{\mathrm{III}}$$

Sostituiamo nella prima e nella terza delle equazioni (91) in luogo dei secondi membri le loro espressioni date dalle equazioni (92); mol-

tiplicando la prima per ψ' e la terza per ψ''', facendo uso dell'equazione (119) e delle premesse, e supponendo

$$Q^{\mathrm{III}}\Sigma' = b_2^{\mathrm{III}}\,D''\,\Sigma_3^{\mathrm{II}} - b_3^{\mathrm{III}}\,D'''\,\Sigma_3^{\mathrm{I}}$$

$$Q^{\mathrm{I}}\,\Sigma''' = \sigma^2\,(b_2^{\mathrm{I}}\,D''\,\Sigma_1^{\mathrm{II}} - b_1^{\mathrm{I}}\,D'\,\Sigma_1^{\mathrm{III}})$$

$$Q^{\mathrm{III}}S' = b_2^{\mathrm{III}}\,D''\,S_3^{\mathrm{II}} - b_3^{\mathrm{III}}\,D'''\,S_3^{\mathrm{I}}$$

$$Q^{\mathrm{I}}\,S''' = \sigma^2\,(b_2^{\mathrm{I}}\,D''\,S_1^{\mathrm{II}} - b_1^{\mathrm{I}}\,D'\,S_1^{\mathrm{III}})$$

si troveranno le equazioni

$$6\,\varphi'\,D' = \frac{T^{\mathrm{I}}}{\theta'}\,Q^{\mathrm{III}}\left(1 - \frac{\tau^{\mathrm{I}}}{T'}\right)\psi' + Q^{\mathrm{III}}\,\{\sigma' - s' + \Sigma' - S'\}\,\psi'$$

$$6\sigma^2\varphi'''\,D''' = \frac{T^{\mathrm{III}}}{\theta'''}\,Q^{\mathrm{I}}\left(1 - \frac{\tau^{\mathrm{III}}}{T^{\mathrm{III}}}\right)\psi''' + Q^{\mathrm{I}}\,\{\sigma''' - s''' + \Sigma''' - S'''\}\,\psi'''$$

nelle quali le Q^{I}, Q^{III} sono le stesse quantità notate (112).

Poniamo i valori di $\left(1 - \frac{\tau^{\mathrm{I}}}{T^{\mathrm{I}}}\right)\psi'$, $\left(1 - \frac{\tau^{\mathrm{III}}}{T^{\mathrm{III}}}\right)\psi'''$ che si ricavano da queste equazioni nella seconda delle equazioni (115), facendo

$$\frac{\theta'}{T^{\mathrm{I}}} = P^{\mathrm{I}}, \quad \frac{P^{\mathrm{I}}}{Q^{\mathrm{III}}}\,6\,D' = \alpha_1^{\mathrm{I}}, \quad \frac{\theta'''}{T^{\mathrm{III}}} = P^{\mathrm{III}}, \quad \frac{P^{\mathrm{III}}\,\sigma^2}{Q^{\mathrm{I}}}\,6\,D''' = \alpha_3^{\mathrm{III}},$$

$$P^{\mathrm{I}}\,(\sigma' - s' + \Sigma' - S') = \beta_1^{\mathrm{I}}, \quad P^{\mathrm{III}}\,(\sigma''' - s''' + \Sigma''' - S''') = \beta_3^{\mathrm{III}},$$

si vedrà che l'equazione (129) si trasformerà nella seguente:

$$a_3^{\mathrm{III}}\,\{(1 + \beta_1^{\mathrm{I}})\,\Phi' + \alpha_1^{\mathrm{I}}\,\varphi'\} - a_1^{\mathrm{I}}\,\{(1 + \beta_3^{\mathrm{III}})\,\Phi''' + \alpha_3^{\mathrm{III}}\,\varphi'''\} = a_3^{\mathrm{III}}\,\beta_1^{\mathrm{I}}\,\chi' - a_1^{\mathrm{I}}\,\beta_3^{\mathrm{III}}\,\chi'''$$

Questa equazione sarebbe approssimata entro le prime potenze dei frattempi se si trascurassero le quantità α e β; lo sarebbe come la (129), entro le seconde potenze se si trascurassero le sole β; e diverrebbe perfettamente rigorosa se si potesse tener conto anche delle quantità β. La parte delle β che dipende dalle quantità s. S, o sia dai luoghi della terra, può sempre valutarsi esattamente per mezzo delle tavole solari e delle

formole sovrascritte; l'altra parte che dipende dai luoghi veri del corpo celeste è la sola che si è obbligato nella prima approssimazione di trascurare, onde non complicar troppo il problema. Ma quest'ultima parte è quella che ne' casi summentovati si mantiene trascurabile in confronto della prima per un più grande intervallo di tempo.

Supponiamo in generale $\chi = \Gamma C'$, e facciamo a similitudine del numero 27

$$o'(1+\beta_1^1)+\alpha_1^1\omega' = d' \qquad a_1^1\{o'''(1+\beta_3^{111})+\alpha_3^{111}\omega'''\} = a_3^{111}d'_1$$

$$n'(1+\beta_1^1)+\alpha_1^1\nu' = f' \qquad a_1^1\{n'''(1+\beta_3^{111})+\alpha_3^{111}\nu'''\} = a_3^{111}f'_1$$

$$m'(1+\beta_1^1)+\alpha_1^1\mu' = g' \qquad a_1^1\{m'''(1+\beta_3^{111})+\alpha_3^{111}\mu'''\} = a_3^{111}g'_1$$

$$\beta_1^1\Gamma' = e' \qquad \alpha_1^1\beta_3^{111}\Gamma''' = \alpha_3^{111}e_1^1$$

$$\frac{f'-f'_1}{d'-d'_1} = h' \qquad \frac{g'-g'_1}{d'-d'_1} = k' \qquad \frac{e'-e'_1}{d'-d'_1} = j'$$

Colla sostituzione dei rispettivi valori delle Φ e φ in funzioni di $C'-c'$, $C''-c''$, $C'''-c'''$ si otterrà l'equazione

$$k'(C'''-c''')-h'(C''-c'')+C'-c' = j'C'$$

Tre altre osservazioni o semplicemente una quarta con due delle prime forniranno nello stesso modo un'altra equazione simile, che dinoteremo con

$$k'_{(1)}(C'''-c''')-h'_{(1)}(C''-c'')+C'-c' = j'_{(1)}C'$$

Se si ritengono per M ed N le espressioni date dalle notazioni (135), (136), e si fa di più

$$\frac{j'h'_{(1)}-h'j'_{(1)}}{h'k'_{(1)}-k'h'_{(1)}} = M' \qquad \frac{j'k'_{(1)}-k'j'_{(1)}}{h'k'_{(1)}-k'h'_{(1)}} = N'$$

queste equazioni danno

$$C'''-c''' = M(C'-c')-M'C'$$

$$C''-c'' = N(C'-c')-N'C'$$

Seguendo le tracce del numero 20, potremo anche ottenere i valori di δ'', δ''' in funzione di $C'-c'$; in fatti ritenendo per O'', $O''_{(1)}$ le stesse espressioni, e ponendo di più

$$\vartheta'' = \frac{\sqrt{P}}{O''C'} \qquad \vartheta''' = \frac{\sqrt{P}}{O''_{(1)}C'}$$

$$\gamma'' = \frac{\beta_1^1\Gamma''-f'N'+g'M'}{d'-f'N+g'M} \qquad \gamma''' = \frac{\beta_{1(1)}^1\Gamma'''-f'_{(1)}N'+g'_{(1)}M'}{d'_{(1)}-f'_{(1)}N+g'_{(1)}M}$$

si avrà

$$C'\vartheta''\delta'' = (C'-c'-\gamma''C')D''$$

$$C'\vartheta'''\delta''' = (C'-c'-\gamma'''C')D'''$$

Colla sostituzione di questi valori di $C'''-c'''$, $C''-c''$, δ'' nella prima equazione del num. 31 facendo per brevità

$$o''-n''N+m''M = G \qquad n''N'-m''M' = G'$$

$$\omega''-\nu''N+\mu''M = F \qquad \nu''N'-\mu''M' = F'$$

$$\frac{\Gamma''-G'+\gamma''G-\vartheta''F}{G} = A \qquad \frac{\gamma''(\Gamma''-G')+\vartheta''F'}{G} = A'$$

si dedurrà per determinare $C'-c'$ l'equazione

$$(C'-c')^2-A(C'-c')C'+A'C'^2 = 0$$

Siccome in quest'equazione A' sarà quasi sempre una quantità piccola, sarà più comodo ottenere il valore di $C'-c'$ in serie colla formola

$$C'-c' = A\left(1-\frac{A'}{A^2}-\frac{A'^2}{A^4}-\frac{2A'^3}{A^6}-\text{ecc.}\right)C'$$

Trovato $C' - c'$, rimontando alle formole precedenti ricaveremo i valori di δ', δ''', $C''' - c'''$, $C'' - c''$, coi quali si potranno coi metodi già esposti ricavare senza altre modificazioni i valori di tutti gli elementi dell' orbita.

77.

Volendo provare queste formole, ho scelto lo stesso quarto esempio trattato nella *Theoria motus corporum cœlestium*, ecc., di cui i dati sono quelli delle quattro osservazioni seguenti istituite sul pianeta Vesta nei giorni

89,505162, 137,344502, 192,419502, 251,288102

dell'anno 1807.

Longitudini di Vesta	Latitudini di Vesta	Longitudini della Terra	Logaritmi de' raggi vettori terr.
178° 43′ 38″,87	12° 27′ 6″,16	189° 21′ 33″,71	9,9997990
174 1 30 ,08	10 8 7 ,80	235 56 0 ,63	0,0051376
187 45 42 ,23	6 47 25 ,51	288 35 20 ,32	0,0071739
213 34 15 ,63	4 20 21 ,63	345 9 18 ,69	0,0030625

Con questi dati facendo il calcolo delle equazioni (1), (2) nel modo esposto all' articolo II della seconda parte, ma tenendo di più conto di quei termini delle $\beta_1^{\prime}$, $\beta_3^{\prime\prime}$ che dipendono dalle quantità s', S', s''', S''', si trovano i risultamenti seguenti:

$$2{,}9064013\, c''' + 0{,}3823386\, c'' + C' - c' - 0{,}0025784\, C' = 0$$
$$3{,}5594549\, c''' + 3{,}1592507\, c'' + C' - c' - 0{,}0017654\, C' = 0$$

e da questi si ricava

$$-c''' = (9{,}5502924\ )\ (C' - c') - (6{,}98010\ )\ C'$$
$$-c'' = (8{,}9216791n)\ (C' - c') - (6{,}71385n)\ C'$$

e quindi

$$(0{,}2822052n)\ \delta'' = (C' - c' - 0{,}0022311)\ D''$$
$$(0{,}3219011n)\ \delta''' = (C' - c' - 0{,}0019779)\ D'''$$

Determinando in appresso il valore di $C' - c'$ coll'equazione (3), di cui ora basta il calcolo dei primi tre termini, si ha

$$C' - c' = -0{,}5182425$$

ed i valori di c', c'', c''' risultano

$$c' = 1{,}518229 \qquad c'' = -0{,}0437890 \qquad c''' = 0{,}184958$$

si ottiene poi

$$\log \delta'' = 9{,}4393310 \qquad \log \delta''' = 9{,}4014600$$

Da questi valori colle formole (24), (28) della seconda parte, e colle espressioni di c^{III} e dei rapporti fra le τ date in principio di questo Supplimento, trascurando in esse le σ, Σ, si ottiene

$$\log r' = 0{,}35419 \qquad \log r'' = 0{,}34651$$
$$\log r''' = 0{,}33920 \qquad \log r'''' = 0{,}33395$$
$$u'' - u' = 14^\circ\, 21'\, 35'' \qquad u''' - u'' = 17^\circ\, 7'\, 52''$$
$$u'''' - u''' = 18^\circ\, 52'\, 11''$$

Nella *Theoria motus corporum cœlestium* colla prima approssimazione si trova

$$\log r' = 0{,}35865 \qquad \log r'' = 0{,}34951$$
$$\log r''' = 0{,}34194 \qquad \log r'''' = 0{,}33887$$
$$u'' - u' = 14^\circ\, 14'\, 32'' \qquad u''' - u'' = 17^\circ\, 7'\, 5''$$
$$u'''' - u''' = 18^\circ\, 48'\, 33''$$

Ed i valori definitivi di queste quantità ottenuti dopo tre correzioni o alla quarta ipotesi sono

$$\log r' = 0{,}354503 \qquad \log r'' = 0{,}346638$$
$$\log r''' = 0{,}339263 \qquad \log r'''' = 0{,}334263$$
$$u'' - u' = 14^\circ\, 21'\, 51'',9 \qquad u''' - u'' = 17^\circ\, 8'\, 5'',1$$
$$u'''' - u''' = 18^\circ\, 51'\, 9'',5$$

Seguendo poi il processo del calcolo esposto nell' articolo II della seconda parte, ho dedotto coi valori di c', c'', c'''; r'', r'''; u'', u''' dati da questa prima approssimazione gli elementi dell' orbita di Vesta notati nella seguente tavola, in cui ho pure uniti pel confronto quelli definitivi che trovansi nell'opera citata.

Elementi.	Approssimati.	Definitivi.
Longit. del nodo ascendente .	103° 19′ 10″	103° 16′ 37″,2
Inclinazione	7 8 9	7 8 14 ,8
Longitudine del perielio	249 41 11	249 57 6 ,5
Anom. med. al prin. del 1807.	278 5 16	278 13 39 ,1
Eccentricità	5 1 39	5 2 58 ,1
Logarit. del semiasse magg. .	0,37278	0,372898

Non mi tratterrò sul modo con cui possono essere eseguite le successive approssimazioni, essendo ciò facile dopo le formole quivi esposte: si prevede però che non dovranno essere ripetute un gran numero di volte, poichè i valori dei raggi vettori e delle differenze delle anomalie vere, che sono i dati da cui si parte, risultarono assai vicini al vero. In generale per la prima determinazione si dovranno attendere da questo metodo dei valori più soddisfacenti, perchè le nostre formole li somministrano coll' approssimazione d' una potenza di più dei frattempi che quelle dei metodi comunemente conosciuti.

II

FORMOLE

PER DETERMINARE GLI ASSI DEL SOLE SUPPOSTO UNO SFEROIDE ELITTICO, CON APPLICAZIONI

[1819]

1. La misura del diametro del Sole costituisce uno degl'importanti elementi dell'astronomia, e nelle osservazioni colle quali si conseguisce venendo esclusa una gran parte di quelle cause d'errori che concorrono generalmente ad alterare i risultati delle altre osservazioni astronomiche, pare che questa misura possa determinarsi assai facilmente. Pure se si confrontano fra loro i valori della misura del diametro solare dati da varj astronomi, si riscontra in essi una disparità tale che non riconoscesi senza qualche sorpresa. Il signor Littrow, che in una bene estesa Memoria inserita nei volumi XIX e XXI della Mensuale Corrispondenza del Barone di Zach ha discusse più di 2000 osservazioni del diametro verticale e più di 2000 osservazioni del diametro orizzontale fatte dal sig. Maskelyne a Greenvich dall'anno 1765 all'anno 1798, è stato condotto a questo risultato, che il diametro verticale del Sole è maggiore di 4″,7 del diametro orizzontale, e che nelle misure di quest'ultimo diametro esistono delle variazioni annue periodiche che ben convengono con un allungamento del Sole ai poli. Questo risultato ha anche confermato con molte osservazioni del signor Piazzi fatte negli anni 1792 e 1793, e che trovansi nei libri V e VI della Specola astronomica di Palermo. Ciò non ostante avendo poco dopo il signor Delambre calcolato