Mossotti. Scritti - Pisa - Domus Galileiana, 1942

magine della stella sul disco della luna, dovrebbe essere l' angolo CT*s* < CTS, o sia il punto *e* dovrebbe cadere interiormente nel triangolo CTE. Ora nel triangolo CET si ha l'angolo esterno CES = ECT + CTE e nel triangolo C*e*T si ha C*es* = *e*CT + CT*e*, ma è ECT > *e*CT, e CTE > CT*e*, dunque dovrebbe essere CES > C*es*, cioè l' angolo che il raggio di luce OET, che parte da un punto della superficie della luna, fa col raggio CE al punto d' emergenza, dovrebbe essere maggiore dell' angolo che il raggio di luce *se*T che viene dalla stella ed ha traversato l' atmosfera fa col rispettivo raggio C*e*, la qual cosa, come abbiamo veduto sopra, non è possibile.

XXII

SOPRA LA DETERMINAZIONE
DELLE ORBITE DEI CORPI CELESTI
PER MEZZO DI TRE OSSERVAZIONI

[*Memoria postuma*, 1866]

I

Determinazione delle coordinate e delle velocità di un corpo celeste relative a tre assi ortogonali, per mezzo dei dati delle osservazioni.

Gli elementi delle orbite dei pianeti si possono determinare con la massima esattezza in quanto che essi possono essere osservati in tutte le circostanze favorevoli per questo oggetto, come sono le loro opposizioni e congiunzioni col sole, le loro massime elongazioni, il loro passaggio per i nodi ec. Non è così quando si presenta in cielo un nuovo corpo celeste, come sarebbe una cometa. Le osservazioni dei primi giorni non possono somministrarci che le direzioni dei raggi visuali diretti al corpo celeste in quelle posizioni che occupa in quei giorni; ed è naturale che la curiosità ecciti gli astronomi a voler presagire il cammino che il corpo seguirà in appresso, ciò che si può fare determinando l'orbita per mezzo di quelle poche osservazioni. Questa determinazione per mezzo di un piccol numero di osservazioni diviene spesso anche indispensabile perchè molte comete non sono visibili che per breve tempo.

La determinazione di un'orbita esige almeno tre osservazioni complete; cioè tali che dieno ciascuna la longitudine e la latitudine del corpo osservato, ed i tempi corrispondenti alle osservazioni. Molte orbite possono farsi passare per due raggi visuali in modo che il corpo vada da un raggio all'altro nell'intervallo di tempo delle due osservazioni; ma non è più possibile che di far passare una sola orbita per tre raggi visuali, in modo che il corpo passi dal primo al secondo raggio visuale, e dal secondo al terzo nei due respettivi intervalli di tempo che separano le osservazioni. Infatti un'orbita contenendo sole cinque costanti arbitrarie, oltre quella che determina il tempo del passaggio al perielio: con queste cinque costanti non si può soddisfare che alle tre condizioni che l'orbita passi per i tre raggi visuali dati di posizione, ed alle due altre che gli intervalli di tempo che il corpo impiega a passare dal punto ove il primo raggio visuale interseca l'orbita al punto ove la interseca il secondo raggio, e da questo punto a quello ove la interseca il terzo raggio corrispondano giusto ai due intervalli di tempo fra le tre osservazioni. Il sesto elemento poi, cioè il tempo del passaggio al perielio, resta fissato calcolando la durata di tempo necessaria al corpo per passare dal perielio al punto che occupa sull'orbita nell'istante di una osservazione, e sottraendo, o aggiungendo (secondo i casi) questa durata al tempo dell'osservazione medesima.

Poichè l'equazione che nella teoria del movimento ellittico dei corpi celesti dà la relazione fra il tempo e l'anomalia vera è trascendente, il problema di cui trattiamo in tutta la sua generalità conduce a delle equazioni trascendenti così complicate che non sarebbe possibile di trarne un conveniente partito. La circostanza però che quando si ha bisogno di risolvere questo problema è giusto quando le osservazioni sono poche e fatte a brevi intervalli fra loro, offre il mezzo di evitare una tale complicazione. In questi casi le quantità variabili che determinano la posizione e la velocità del corpo celeste si possono ordinare per serie procedenti per le potenze dei tempi che separano le osservazioni; i quali vengono ad essere espressi da numeri frazionari, e danno così delle serie convergenti. Le equazioni divengono per tale sviluppo tutte algebriche ed atte ad essere risolute coi noti metodi.

Malgrado però la condizione favorevole della piccolezza degli intervalli di tempo, il problema è tuttora assai complicato ed ha esercitato

l'ingegno di quasi tutti i grandi matematici da Newton fino ai giorni nostri.

Noi esporremo la soluzione che ci pare la più diretta ed elegante, corredandola di formule che non sono prive di novità.

Quando si trascura la massa del corpo celeste rispetto a quella del sole presa per unità, le equazioni del movimento del corpo celeste attratto dal sole considerato come immobile, sono:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{gx}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{gy}{r^3}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{gz}{r^3} \tag{1}$$

indicando x, y, z le coordinate del corpo contate colla loro origine nel centro del sole e t il tempo, ed essendo:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{I}$$

La quantità g contenuta nelle precedenti equazioni dipende dalla forza attrattiva del sole, ed ha il seguente valore numerico:

$$\log \sqrt{g} = 8.23558144 \text{ [1]}$$

quando si prenda il giorno medio solare per unità di tempo.

Si esprima t in giorni medi, e poniamo:

$$\tau = t\sqrt{g},$$

cosicchè τ sarà sempre una frazione se il numero t di giorni non oltrepassa 58, e si avrà più semplicemente:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = -\frac{x}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{d\tau^2} = -\frac{y}{r^3}, \quad \frac{d^2z}{d\tau^2} = -\frac{z}{r^3}. \tag{2}$$

Le osservazioni che si hanno da impiegare per la determinazione dell'orbita essendo fatte ad intervalli di pochi giorni, come 5 o 10 giorni, noi

[1] Vedi GAUSS, *Theoria Motus Corporum Cœlestium*, pag. 2.

potremo cercare gli integrali di queste equazioni sviluppati per le potenze degli intervalli espressi da τ, che le serie saranno convergenti.

Dinotiamo dunque con X, Y, Z le coordinate della cometa nel momento di una osservazione: le coordinate dello stesso corpo dopo un breve intervallo τ, saranno date dalle note formule:

$$(3)\quad \begin{cases} x = X + \frac{dX}{d\tau}\tau + \frac{1}{2}\frac{d^2X}{d\tau^2}\tau^2 + \frac{1}{2.3}\frac{d^3X}{d\tau^3}\tau^3 + \ldots\ldots \\ y = Y + \frac{dY}{d\tau}\tau + \frac{1}{2}\frac{d^2Y}{d\tau^2}\tau^2 + \frac{1}{2.3}\frac{d^3Y}{d\tau^3}\tau^3 + \ldots\ldots \\ z = Z + \frac{dZ}{d\tau}\tau + \frac{1}{2}\frac{d^2Z}{d\tau^2}\tau^2 + \frac{1}{2.3}\frac{d^3Z}{d\tau^3}\tau^3 + \ldots\ldots \end{cases}$$

nelle quali i coefficienti:

$$\frac{dX}{d\tau},\ \frac{d^2X}{d\tau^2}\ldots;\quad \frac{dY}{d\tau},\ \frac{d^2Y}{d\tau^2}\ldots;\quad \frac{dZ}{d\tau},\ \frac{d^2Z}{d\tau^2},\ \ldots\ldots$$

rappresentano i valori delle differenziali successive delle coordinate della cometa nel momento di quella osservazione da cui il tempo τ viene contato.

Per mezzo delle equazioni (2) ed (1) possiamo eliminare le quantità:

$$\frac{d^2X}{d\tau^2},\ \frac{d^2Y}{d\tau^2},\ \frac{d^2Z}{d\tau^2}$$

e le loro differenziali successive dalle precedenti serie; e le espressioni che risulteranno per x, y, z rappresenteranno gli integrali delle (2) in funzione del tempo τ e delle *sei* costanti:

$$X,\ Y,\ Z,\ \frac{dX}{d\tau},\ \frac{dY}{d\tau},\ \frac{dZ}{d\tau};$$

le quali possono essere considerate come le *sei* costanti arbitrarie che richiedono gli integrali di quelle *tre* equazioni di secondo ordine.

Siccome però le successive differenziazioni del raggio r dato dall'equazione (1) condurrebbero ad espressioni un poco complicate, converrà per semplificarle fare uso anche dell'equazione seguente:

$$s = x\frac{dx}{d\tau} + y\frac{dy}{d\tau} + z\frac{dz}{d\tau} = r\frac{dr}{d\tau},$$

de cui si ha

$$\frac{d^2s}{d\tau^2} = -\frac{s}{r^3}$$

Con queste denominazioni, eseguendo le differenziazioni si ottiene:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = -\frac{x}{r^3}$$

$$\frac{d^3x}{d\tau^3} = \frac{3s}{r^5}x - \frac{1}{r^3}\cdot\frac{dx}{d\tau}$$

$$\frac{d^4x}{d\tau^4} = \left(\frac{3}{r^5}\cdot\frac{ds}{d\tau} - \frac{3.5}{r^7}s^2 + \frac{1}{r^6}\right)x + \frac{2.3}{r^5}\cdot s\cdot\frac{dx}{d\tau}$$

$$\frac{d^5x}{d\tau^5} = \left(-\frac{3.3.5}{r^7}\cdot s\cdot\frac{ds}{d\tau} + \frac{3.5.7}{r^9}s^3 - \frac{3.5}{r^8}\cdot s\right)x + \left(\frac{3.3}{r^5}\cdot\frac{ds}{d\tau} - \frac{3.3.5}{r^7}\cdot s^2 + \frac{1}{r^6}\right)\frac{dx}{d\tau}$$

e così di seguito.

Si otterranno delle equazioni simili per i differenziali delle coordinate y e z cambiando nelle precedenti la x in y e poi la x in z.

Se poi si cambiano

$$x, y, z;\ \frac{dx}{d\tau},\ \frac{dy}{d\tau},\ \frac{dz}{d\tau}\ \text{in}\ X,\ Y,\ Z;\ \frac{dX}{d\tau},\ \frac{dY}{d\tau},\ \frac{dZ}{d\tau}$$

per avere i valori dei suddetti differenziali corrispondenti al momento dell'osservazione da cui si comincia a contare il tempo, e supponiamo che r ed s corrispondano a quell'istesso istante, si vedrà che ponendo:

$$(4)\quad \begin{cases} T = 1 - \frac{1}{r^3}\cdot\frac{\tau^2}{2} + \frac{3s}{r^5}\cdot\frac{\tau^3}{2.3} + \left(\frac{3}{r^5}\frac{ds}{d\tau} - \frac{3.5}{r^7}s^2 + \frac{1}{r^6}\right)\frac{\tau^4}{2.3.4} \\ \qquad + \left(-\frac{3.3.5}{r^7}\cdot s\cdot\frac{ds}{d\tau} + \frac{3.5.7}{r^9}s^3 - \frac{3.5}{r^8}\cdot s\right)\frac{\tau^5}{2.3.4.5} + \text{ec.} \\ V = \tau - \frac{1}{r^3}\cdot\frac{\tau^3}{2.3} + \frac{2.3}{r^5}\cdot s\cdot\frac{\tau^4}{2.3.4} + \left(\frac{3.3}{r^5}\cdot\frac{ds}{d\tau} - \frac{3.3.5}{r^7}s^2 + \frac{1}{r^6}\right)\frac{\tau^5}{2.3.4.5} + \end{cases}$$

le equazioni (3) diverranno:

$$(6)\qquad \begin{cases} x = \mathrm{X\,T} + \dfrac{d\mathrm{X}}{d\tau}.\mathrm{V} \\ y = \mathrm{Y\,T} + \dfrac{d\mathrm{Y}}{d\tau}.\mathrm{V} \\ z = \mathrm{Z\,T} + \dfrac{d\mathrm{Z}}{d\tau}.\mathrm{V} \end{cases}$$

Nelle quali avremo:

$$(7)\qquad \begin{cases} s = \mathrm{X}\dfrac{d\mathrm{X}}{d\tau} + \mathrm{Y}\dfrac{d\mathrm{Y}}{d\tau} + \mathrm{Z}\dfrac{d\mathrm{Z}}{d\tau} \\ v^2 = \left(\dfrac{d\mathrm{X}}{d\tau}\right)^2 + \left(\dfrac{d\mathrm{Y}}{d\tau}\right)^2 + \left(\dfrac{d\mathrm{Z}}{d\tau}\right)^2 \\ \dfrac{ds}{d\tau} = v^2 - \dfrac{1}{r} \end{cases}$$

chiamando v la velocità della cometa nel momento dell' osservazione da cui si comincia a contare il tempo.

Le espressioni delle coordinate x, y, z date dalle formule (6) vengono somministrate dalla teoria dell' attrazione universale, e possono per un certo tempo essere sostituite con vantaggio alle note formule generali del movimento in una sezione conica.

Per istabilire tutte le equazioni che sono necessarie alla soluzione del problema che trattiamo ci rimane ora da esprimere quelle che vengono somministrate dai dati delle osservazioni.

Si rappresentino con R la distanza della cometa dalla terra in un dato tempo e con l, m, n i coseni degli angoli che il raggio visuale R fa con i tre assi ortogonali dati; avremo $\mathrm{R}\,l$, $\mathrm{R}\,m$, $\mathrm{R}\,n$ per le tre coordinate rettangolari della cometa parallele a questi assi ed aventi la loro origine nel centro della terra,

La quantità R non sarà conosciuta; ma l, m, n saranno date dall' osservazione della cometa, e dovranno soddisfare all'equazione di condizione:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

poichè per ipotesi abbiamo:

$$\mathrm{R}^2 = (\mathrm{R}\,l)^2 + (\mathrm{R}\,m)^2 + (\mathrm{R}\,n)^2 .$$

Siano di più ρ, λ, μ, ν le quantità analoghe corrispondenti al sole; così che i prodotti $\rho\lambda$, $\rho\mu$, $\rho\nu$ rappresentino le coordinate del luogo del sole contate dal centro della terra e parallele agli assi di prima. Queste quantità dovranno essere considerate come conosciute per mezzo delle tavole solari, colle quali si può fare il calcolo del luogo del sole per il momento dell' osservazione della cometa.

Avremo pure

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1.$$

Dinotando finalmente, come si è fatto sopra, con x, y, z le coordinate della cometa contate su di un sistema di assi paralleli al primo, ma coll' origine nel centro del sole; e con r il raggio vettore dell' orbita, avremo le tre equazioni:

$$(8)\qquad \begin{cases} x = \mathrm{R}\,l - \rho\lambda \\ y = \mathrm{R}\,m - \rho\mu \\ z = \mathrm{R}\,n - \rho\nu \end{cases}$$

e poichè $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ne resulterà:

$$r^2 = \mathrm{R}^2 + \rho^2 - 2\,\mathrm{R}\rho\,(l\lambda + m\mu + n\nu).$$

Ma dalla Geometria Analitica si sa che $l\lambda + m\mu + n\nu$ eguaglia il coseno dell'angolo che i raggi R e ρ condotti ambedue per il centro della terra, l'uno alla cometa, l'altro al sole, fanno fra loro. Quindi dinotando con S C l'arco che unisce sulla sfera celeste le posizioni del sole e della cometa, si avrà:

$$(9)\qquad r^2 = \mathrm{R}^2 + \rho^2 - 2\,\mathrm{R}\rho\,.\cos(\mathrm{S\,C}).$$

Sostituiamo ora nelle equazioni (8) e (9) per x, y, z le espressioni (6) che abbiamo trovato precedentemente, ed avremo in generale:

$$(a)\quad \begin{cases} Rl - \rho\lambda = TX + V\dfrac{dX}{d\tau} \\ Rm - \rho\mu = TY + V\dfrac{dY}{d\tau} \\ Rn - \rho\nu = TZ + V\dfrac{dZ}{d\tau} \\ R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos(SC) = r^2T^2 + 2sTV + \left(\dfrac{ds}{d\tau} + \dfrac{1}{r}\right)V^2. \end{cases}$$

Nelle quali equazioni le quantità:

$$X, Y, Z, \frac{dX}{d\tau}, \frac{dY}{d\tau}, \frac{dZ}{d\tau}$$

appartengono all' istante dal quale si comincia a contare il tempo τ.

Assumasi ora per quest' istante il momento in cui fu fatta la seconda osservazione, cioè l' osservazione di mezzo; per questa osservazione avremo allora $\tau = 0$, e in conseguenza nelle formule (4) $T = 1$, $V = 0$; quindi avremo per questa osservazione il sistema delle quattro equazioni seguenti:

$$(10)\quad \begin{cases} Rl - \rho\lambda = X \\ Rm - \rho\mu = Y \\ Rn - \rho\nu = Z \\ R^2 + \rho^2 - 2R\cos(SC) = r^2. \end{cases}$$

Per la prima osservazione fatta al tempo $\tau_{,}$, avanti l'osservazione di mezzo, indicando con un apice posto in basso le quantità corrispondenti, e rappresentando con V, il valore di V in cui siasi posto $\tau_{,}$ invece di τ, avremo:

$$(11)\quad \begin{cases} R_{,}l_{,} - \rho_{,}\lambda_{,} = XT_{,} - \dfrac{dX}{d\tau}V_{,} \\ R_{,}m_{,} - \rho_{,}\mu_{,} = YT_{,} - \dfrac{dY}{d\tau}V_{,} \\ R_{,}n_{,} - \rho_{,}\nu_{,} = ZT_{,} - \dfrac{dZ}{d\tau}V_{,} \\ R_{,}^2 + \rho_{,}^2 - 2R_{,}\rho_{,}\cos(S_{,}C_{,}) = r_{,}^2T_{,}^2 - 2sT_{,}V_{,} + \left(\dfrac{ds}{d\tau_{,}} + \dfrac{1}{r_{,}}\right)V_{,}^2 \end{cases}$$

E per la terza osservazione fatta con tempo τ' dopo l'osservazione di mezzo, indicando con un apice posto in alto alle lettere, le quantità analoghe alle precedenti; si avrà:

$$(12)\quad \begin{cases} R'l' - \rho'\lambda' = XT' + \dfrac{dX}{d\tau}V' \\ R'm' - \rho'\mu' = YT' + \dfrac{dY}{d\tau}V' \\ R'n' - \rho'\nu' = ZT' + \dfrac{dZ}{d\tau}V' \\ R'^2 + \rho'^2 - 2R'\rho'\cos(S'C') = r'^2T'^2 + 2sT'V' + \left(\dfrac{ds}{d\tau'} + \dfrac{1}{r'}\right)V'^2 \end{cases}$$

Le equazioni (10), (11) e (12) che contengono i dati delle osservazioni in unione alle leggi del moto dei corpi attratti dal sole sono le fondamentali, cioè le equazioni delle quali dobbiamo trarre la soluzione del problema che trattiamo.

Per procedere in questa soluzione cominciamo dall' eliminare dalle (11) e (12) le coordinate X, Y, Z, e poi le velocità $\frac{dX}{d\tau}, \frac{dY}{d\tau}, \frac{dZ}{d\tau}$; si otterrà primieramente:

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{dX}{d\tau} = \dfrac{(R'l' - \rho'\lambda')T_{,} - (R_{,}l_{,} - \rho_{,}\lambda_{,})T'}{V} \\ \dfrac{dY}{d\tau} = \dfrac{(R'm' - \rho'\mu')T_{,} - (R_{,}m_{,} - \rho_{,}\mu_{,})T'}{V} \\ \dfrac{dZ}{d\tau} = \dfrac{(R'n' - \rho'\nu')T_{,} - (R_{,}n_{,} - \rho_{,}\nu_{,})T'}{V} \end{cases}$$

ove si è posto:

$$V = V_{,}T' + V'T_{,};$$

si avrà poi:

$$(14)\quad \begin{cases} X = \dfrac{(R'l' - \rho'\lambda')\,V_{,} + (R_{,}l_{,} - \rho_{,}\lambda_{,})\,V'}{V} \\ Y = \dfrac{(R'm' - \rho'\mu')\,V_{,} + (R_{,}m_{,} - \rho_{,}\mu_{,})\,V'}{V} \\ Z = \dfrac{(R'n' - \rho'\nu')\,V_{,} + (R_{,}n_{,} - \rho_{,}\nu_{,})\,V'}{V} \end{cases}$$

Paragonando questi valori di X, Y, Z con quelli dati dalle (10) si ottengono le tre equazioni fondamentali:

$$(15)\quad \begin{cases} (R_{,}l_{,} - \rho_{,}\lambda_{,})\,V' - (Rl - \rho\lambda)\,V + (R'l' - \rho'\lambda')\,V_{,} = 0 \\ (R_{,}m_{,} - \rho_{,}\mu_{,})\,V' - (Rm - \rho\mu)\,V + (R'm' - \rho'\mu')\,V_{,} = 0 \\ (R_{,}n_{,} - \rho_{,}\nu_{,})\,V' - (Rn - \rho\nu)\,V + (R'n' - \rho'\nu')\,V_{,} = 0 \end{cases}$$

Poichè le quantità $T_{,}$, $V_{,}$ e T', V' non contengono secondo le loro espressioni (4) che gli intervalli cogniti $\tau_{,}$ e τ', e le tre incognite r, s, $\frac{ds}{d\tau}$: e di più le quantità R, $R_{,}$, R' sono pure espresse dalla quarta equazione dei sistemi segnati (10), (11) e (12) in funzione di queste stesse tre incognite, così le precedenti equazioni si potrebbero ridurre a non contenere che le medesime incognite, le quali potrebbero perciò determinarsi colla risoluzione delle ultime tre equazioni ottenute. Tale è lo spirito del metodo più generale indicato da Lagrange: ma per la pratica val meglio valersi di alcune combinazioni che la forma speciale delle premesse equazioni ammette.

Intanto sarà bene di fare osservare preventivamente che non volendo spingere, nel valutare le quantità $V_{,}$, $T_{,}$, V', T' e quindi anche la V, l'approssimazione al di là delle terze potenze dei tempi, esse non vengono a contenere propriamente che l'incognita r.

Avanti di passare ad eseguire le combinazioni citate conviene che fis-

siamo i valori dei coseni l, m, n; λ, μ, ν contenuti nelle precedenti equazioni con una scelta appropriata degli assi coordinati.

Per tale oggetto immaginiamo di avere segnato su di un globo celeste i tre luoghi geocentrici della cometa $C_{,}$, C, C', come sono dati dalle osservazioni colle opportune correzioni, e di più di aver segnati ancora i tre luoghi corrispondenti del sole calcolati col mezzo delle tavole solari. Vedasi la Figura [1], nella quale è rappresentata una parte della superficie della volta celeste vista dal lato da cui apparirebbe concava. Se prendiamo per piano delle coordinate xy l'eclittica $\gamma\sigma$ e supponiamo che l'asse delle x passi per il luogo del sole nella seconda osservazione, sarà facile di verificare che dinotando con L e Λ la longitudine e la latitudine osservata della cometa, e con ε la longitudine corrispondente del sole, ponendo un'apice in basso alle quantità relative alla prima osservazione, lasciando senza apici le quantità relative alla seconda osservazione, e ponendo un'apice in alto alle quantità relative alla osservazione terza, si avrà;

$$(16)\quad \begin{cases} l_{,} = \cos\Lambda_{,}\cos(L_{,} - \varepsilon) = \cos S\,C_{,} \\ m_{,} = \cos\Lambda_{,}\,\mathrm{sen}\,(L_{,} - \varepsilon) = \mathrm{sen}\,S\,C_{,}\cos S'\,S\,C_{,} \\ n_{,} = \mathrm{sen}\,\Lambda_{,} = \mathrm{sen}\,S\,C_{,}\,\mathrm{sen}\,S'\,S\,C_{,} \\ l = \cos\Lambda\cos(L - \varepsilon) = \cos S\,C \\ m = \cos\Lambda\,\mathrm{sen}\,(L - \varepsilon) = \mathrm{sen}\,S\,C\cos S'\,S\,C \\ n = \mathrm{sen}\,\Lambda = \mathrm{sen}\,S\,C\,\mathrm{sen}\,S'\,S\,C \\ l' = \cos\Lambda'\cos(L' - \varepsilon) = \cos S\,C' \\ m' = \cos\Lambda'\,\mathrm{sen}\,(L' - \varepsilon) = \mathrm{sen}\,S\,C'\cos S'\,S\,C' \\ n' = \mathrm{sen}\,\Lambda' = \mathrm{sen}\,S\,C'\,\mathrm{sen}\,S'\,S\,C' \\ \lambda_{,} = \cos(\varepsilon_{,} - \varepsilon) = \cos(S\,S_{,}) \qquad \lambda = 1 \\ \mu_{,} = \mathrm{sen}\,(\varepsilon_{,} - \varepsilon) = \mathrm{sen}\,(S\,S_{,}) \qquad \mu = 0 \\ \nu_{,} = 0 \qquad \nu = 0 \\ \lambda' = \cos(\varepsilon' - \varepsilon) = \cos S\,S' \\ \mu' = \mathrm{sen}\,(\varepsilon' - \varepsilon) = \mathrm{sen}\,S\,S' \\ \nu' = 0 \end{cases}$$

In queste formule i lati $SC_{,}$, SC, SC' sono gli archi che uniscono sulla sfera celeste il luogo del sole nell'osservazione di mezzo con i tre luoghi

[1] [Non abbiamo trovato copie di questa memoria corredate della figura cui si accenna: ma non è difficile al lettore ricostruirla dal contesto dello scritto.]

della cometa. Questi archi devono sempre essere presi minori di 180°, e saranno maggiori di 90° quando i valori dei loro coseni risultino negativi. Gli angoli $S'SC_{,}$, $S'SC$, $S'SC'$ sono quelli che i suddetti archi fanno coll'eclittica da quella parte in cui i segni dello zodiaco progrediscono, cioè nel verso in cui procede il movimento apparente del sole. Si trova comodo di contare questi angoli da 0° a 360° considerandoli maggiori di 180° quando gli archi corrispondenti $SC_{,}$, SC, SC' giacciano nell'emisfero australe.

Gli archi $SS_{,}$, SS' sono le differenze delle longitudini del sole, cioè

$$SS' = \varepsilon' - \varepsilon$$
$$SS_{,} = \varepsilon - \varepsilon_{,}$$

essendo $\varepsilon_{,}$, ε, ε' le tre longitudini del sole respettivamente corrispondenti alla 1.ª alla 2.ª ed alla 3.ª osservazione [1].

Per mezzo delle precedenti equazioni saremo dunque in grado di calcolare i coseni l, m, n e λ, μ, ν; ovvero gli archi $SC_{,}$, SC, ed SC'. I valori degli angoli $S'SC_{,}$, $S'SC$, $S'SC'$ si otterranno dividendo l'una per l'altra le due ultime equazioni dei tre primi gruppi delle equazioni (16). Però invece di questi angoli converrà meglio mettere i loro respettivi supplementi $\gamma SC_{,}$, γSC, $\gamma SC'$ che non sono altro che gli angoli che gli archi i quali uniscono sulla sfera celeste il luogo del sole nell'osservazione di mezzo con i tre luoghi della cometa, fanno coll'eclittica dalla parte contraria al movimento del sole. Nel sostituire questi secondi ai primi angoli bisognerà aver cura di cambiare convenientemente il segno alle corrispondenti rette trigometriche. Colla divisione anzidetta si ottiene intanto:

$$(17)\quad \begin{cases} \operatorname{cotg} \gamma SC_{,} = -\operatorname{cotg} \Lambda_{,} \operatorname{sen} (L_{,} - \varepsilon_{,}) \\ \operatorname{cotg} \gamma SC = -\operatorname{cotg} \Lambda \operatorname{sen} (L - \varepsilon) \\ \operatorname{cotg} \gamma SC' = -\operatorname{cotg} \Lambda' \operatorname{sen} (L' - \varepsilon'), \end{cases}$$

Visto come debbano calcolarsi le quantità che entrano come dati delle osservazioni nelle nostre equazioni (13) e (15), progrediamo ora alle combinazioni che si possono fare di queste equazioni per ottenere la più semplice e diretta soluzione del problema che ci occupa.

[1] Le tre quantità $\varepsilon_{,}$, ε ed ε' devono essere crescenti, e se una fosse minore della precedente, vorrebbe dire che il sole in quell'intervallo è passato per lo *zero* di Ariete e si dovrebbe a quella longitudine minore della precedente aggiungere 360°.

Ponendo per l, m, n; λ, μ, ν le loro espressioni (16) nelle equazioni (13) e (15) avremo:

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{dX}{d\tau} = \cos (SC') \dfrac{T_{,}}{V} R' - \cos (SC_{,}) \dfrac{T'}{V} R_{,} - \cos (SS') \dfrac{T_{,}}{V} \rho' + \cos (SS_{,}) \dfrac{T'}{V} \rho_{,} \\ \dfrac{dY}{d\tau} = -\operatorname{sen}(SC') \cos \gamma SC' \dfrac{T_{,}}{V} R' + \operatorname{sen}(SC_{,}) \cos \gamma SC_{,} \dfrac{T'}{V} R_{,} - \operatorname{sen}(SS') \dfrac{T_{,}}{V} \rho' - \operatorname{sen}(SS_{,}) \dfrac{T'}{V} \\ \dfrac{dZ}{d\tau} = \operatorname{sen} (SC') \operatorname{sen} \gamma SC' \dfrac{T_{,}}{V} R' - \operatorname{sen} (SC_{,}) \operatorname{sen} \gamma SC_{,} \dfrac{T'}{V} R_{,} \end{cases}$$

$$(18')\quad \begin{cases} \{R_{,}\cos(SC_{,}) - \rho_{,}\cos(SS_{,})\} V' - \{R\cos(SC) - \rho\} V + \{R'\cos(SC') - \rho'\cos(SS')\} V_{,} = 0 \\ \{-R_{,}\operatorname{sen}(SC_{,})\cos\gamma SC_{,} + \rho_{,}\operatorname{sen}(SS_{,})\} V' + R\operatorname{sen}(SC)\cos\gamma SC . V + \{-R'\operatorname{sen}(SC')\cos\gamma SC' \\ \qquad - \rho'\operatorname{sen}(SS')\} V_{,} = 0 \\ R_{,}\operatorname{sen}(SC_{,})\operatorname{sen}\gamma SC_{,} . V' - R\operatorname{sen}(SC)\operatorname{sen}\gamma SC . V + R'\operatorname{sen}(SC')\operatorname{sen}\gamma SC' . V_{,} = 0 . \end{cases}$$

Eliminando prima R' e poi $R_{,}$ dalle due ultime equazioni, si ottiene:

$$R' = \frac{\operatorname{sen} (SC) \operatorname{sen} C'SC}{\operatorname{sen} (SC_{,}) \operatorname{sen} C'SC_{,}} \cdot \frac{V}{V'} R \frac{\operatorname{sen} \gamma SC'}{\operatorname{sen}(SC_{,}) \operatorname{sen} C'SC_{,}} \cdot \frac{1}{V'} \{-\rho_{,}\operatorname{sen}(SS_{,}) V' + \rho' \operatorname{sen}(SS') V_{,}\}$$

$$R_{,} = \frac{\operatorname{sen} (SC) \operatorname{sen} CSC_{,}}{\operatorname{sen}(SC') \operatorname{sen} C'SC_{,}} \cdot \frac{V}{V'} R + \frac{\operatorname{sen} \gamma SC_{,}}{\operatorname{sen}(SC') \operatorname{sen} C'SC_{,}} \cdot \frac{1}{V_{,}} \{-\rho_{,}\operatorname{sen}(SS_{,}) V' + \rho' \operatorname{sen} (SS') V_{,}\}$$

ove si è posto

$$\begin{aligned} C\,SC' &= \gamma\,SC' - \gamma\,SC \\ C_{,}SC' &= \gamma\,SC' - \gamma\,SC_{,} \\ C_{,}SC &= \gamma\,SC - \gamma\,SC_{,} . \end{aligned}$$

Se sostituiamo ora questi valori di R, ed R' tanto nelle (18) che nella prima delle (18') si avrà per la distanza della cometa dalla terra

$$(20)\quad \left\{ \begin{aligned} & \left\{\operatorname{cotg}(SC) - \operatorname{cotg}(SC_{,}) \frac{\operatorname{sen} C'SC}{\operatorname{sen} S'CC_{,}} - \operatorname{cotg}(SC') \frac{\operatorname{sen} CSC_{,}}{\operatorname{sen} C'SC_{,}}\right\} V . R \operatorname{sen} (SC) - \rho V \\ & - \left\{\operatorname{cotg}(SS_{,}) + \operatorname{cotg}(SC_{,}) \frac{\operatorname{sen} \gamma SC'}{\operatorname{sen} C'SC_{,}} - \operatorname{cotg}(SC') \frac{\operatorname{sen} \gamma SC_{,}}{\operatorname{sen} C'SC_{,}}\right\} V' \rho_{,} \operatorname{sen} (SS_{,}) \\ & + \left\{\operatorname{cotg}(SS') + \operatorname{cotg}(SC_{,}) \frac{\operatorname{sen} \gamma SC'}{\operatorname{sen} C'SC_{,}} - \operatorname{cotg}(SC') \frac{\operatorname{sen} \gamma SC_{,}}{\operatorname{sen} C'SC_{,}}\right\} V_{,} \rho' \operatorname{sen} (SS') \end{aligned} \right\} = 0$$

e per le tre velocità della cometa corrispondenti all' istante dell' osservazione media, avremo:

$$
(21)\quad
\begin{cases}
\dfrac{dX}{d\tau} = \dfrac{\operatorname{sen}(SC)}{\operatorname{sen}C'SC_{,}}\left\{\operatorname{cotg}(SC')\operatorname{sen}CSC_{,}\dfrac{T_{,}}{V_{,}} - \operatorname{cotg}(SC_{,})\operatorname{sen}C'SC\dfrac{T'}{V'}\right\}R \\
\quad + \dfrac{1}{\operatorname{sen}C'SC_{,}}\left\{\operatorname{cotg}(SC')\operatorname{sen}\gamma SC_{,}\dfrac{T_{,}}{V_{,}} + \operatorname{cotg}(SC_{,})\operatorname{sen}\gamma SC'\dfrac{T'}{V'}\right\}\left\{-\rho_{,}\operatorname{sen}(SS_{,})\dfrac{V'}{V} + \rho'\operatorname{sen}(SS')\dfrac{V_{,}}{V}\right\} \\
\quad - \left\{\rho'\cos(SS')\dfrac{T_{,}}{V_{,}} - \rho_{,}\cos(SS_{,})\dfrac{T'}{V}\right\} \\
\dfrac{dY}{d\tau} = \dfrac{\operatorname{sen}(SC)}{\operatorname{sen}(C'SC_{,})}\left\{-\cos\gamma SC'\operatorname{sen}CSC_{,}\dfrac{T_{,}}{V_{,}} + \cos\gamma SC_{,}\operatorname{sen}C'SC_{,}\dfrac{T'}{V'}\right\}R \\
\quad + \dfrac{1}{\operatorname{sen}C'SC_{,}}\left\{-\cos\gamma SC'\operatorname{sen}\gamma SC_{,}\dfrac{T_{,}}{V_{,}} + \cos\gamma SC_{,}\operatorname{sen}\gamma SC'\dfrac{T'}{V'}\right\}\left\{-\rho_{,}\operatorname{sen}(SS_{,})\dfrac{V'}{V} + \rho'\operatorname{sen}(SS')\dfrac{V_{,}}{V}\right\} \\
\quad - \left\{\rho'\operatorname{sen}(SS')\dfrac{T_{,}}{V} + \rho_{,}\operatorname{sen}(SS_{,})\dfrac{T'}{V}\right\} \\
\dfrac{dZ}{d\tau} = \dfrac{\operatorname{sen}(CS)}{\operatorname{sen}C'SC_{,}}\left\{\operatorname{sen}\gamma SC'\operatorname{sen}CSC_{,}\dfrac{T_{,}}{V_{,}} - \operatorname{sen}\gamma SC_{,}\operatorname{sen}C'SC\dfrac{T'}{V'}\right\}R \\
\quad + \dfrac{\operatorname{sen}\gamma SC_{,}\operatorname{sen}\gamma SC'}{\operatorname{sen}C'SC_{,}}\left\{\dfrac{T_{,}}{V_{,}} + \dfrac{T'}{V'}\right\}\left\{-\rho_{,}\operatorname{sen}(SS_{,})\dfrac{V'}{V} + \rho'\operatorname{sen}(SS')\dfrac{V_{,}}{V}\right\}.
\end{cases}
$$

Ora è noto (*vedi figura*) che se i due punti C_0 ed N giacciono sul circolo massimo passante per C' e $C_{,}$, e respettivamente sopra i circoli SC ed S'γ si ha per ciascuno di questi due punti la corrispondente equazione:

$$\operatorname{cotg}(SC_{,})\operatorname{sen}C'SC - \operatorname{cotg}(SC_0)\operatorname{sen}C'SC_{,} + \operatorname{cotg}(SC')\operatorname{sen}CSC_{,} = 0$$

$$\operatorname{cotg}(SN)\operatorname{sen}C'SC - \operatorname{cotg}(SC_{,})\operatorname{sen}\gamma SC' + \operatorname{cotg}(SC')\operatorname{sen}\gamma SC_{,} = 0 \quad [1]$$

[1] Infatti dal triangolo $C_{,}SC_0$ si ha

$$\cos C_0C_{,} = \cos SC_0\cos SC_{,} + \operatorname{sen}SC_0\operatorname{sen}SC_{,}\cos CSC_{,}, \quad \operatorname{sen}C_0C_{,} = \frac{\operatorname{sen}CSC_{,}\operatorname{sen}C_{,}S}{\operatorname{sen}C_{,}C_0S}$$

le quali danno

$$
(a')\quad
\begin{cases}
\operatorname{cotg}SC_0 = \dfrac{\operatorname{cotg}(SC_{,})\operatorname{sen}C'SC}{\operatorname{sen}C'SC_{,}} + \dfrac{\operatorname{cotg}(SC')\operatorname{sen}CSC_{,}}{\operatorname{sen}C'SC_{,}} \\
\operatorname{cotg}SN = \dfrac{\operatorname{cotg}(SC_{,})\operatorname{sen}\gamma SC'}{\operatorname{sen}C'SC_{,}} - \dfrac{\operatorname{cotg}(SC')\operatorname{sen}\gamma SC_{,}}{\operatorname{sen}C'SC_{,}}
\end{cases}
$$

e dal triangolo $C'SC_0$ si ha analogamente

$$\cos C_0C_{,} = \cos SC_0\cos SC' + \operatorname{sen}SC_0\operatorname{sen}SC'\cos CSC'$$

$$\operatorname{sen}C_0C' = \frac{\operatorname{sen}CSC'\operatorname{sen}SC'}{\operatorname{sen}C'C_0S}$$

e dal triangolo $C_{,}SC'$ si ha pure

$$\operatorname{sen}C_{,}C' = \frac{\operatorname{sen}C_{,}SC'\operatorname{sen}SC_{,}}{\operatorname{sen}C_{,}C'S}$$

Ma $C_{,}C' = C_{,}C_0 + C'C_0$

dunque

$$\operatorname{sen}C_{,}C' = \operatorname{sen}C_{,}C_0\cos C'C_0 + \operatorname{cos}C_{,}C_0\operatorname{sen}C'C_0\,;$$

e sostituendo in queste equazioni i valori trovati

$$\frac{\operatorname{sen}CSC_{,}\operatorname{sen}C'S}{\operatorname{sen}C_{,}C_0S}\cos SC_0\cos SC' + \frac{\operatorname{sen}CSC_{,}\operatorname{sen}C_{,}S}{\operatorname{sen}C_{,}C_0S}\operatorname{sen}SC_0\operatorname{sen}SC'\cos CSC'$$
$$+ \frac{\operatorname{sen}CSC'\operatorname{sen}SC'}{\operatorname{sen}C'C_0S}\cos SC_0\cos SC_{,} + \frac{\operatorname{sen}CSC'\operatorname{sen}SC'}{\operatorname{sen}C'C_0S}\operatorname{sen}SC_0\operatorname{sen}SC_{,}\cos CSC_{,}$$
$$= \frac{\operatorname{sen}C_{,}SC'\operatorname{sen}SC_{,}}{\operatorname{sen}C_{,}C'S}.$$

Ma i due angoli $C_{,}C_0S$ e $C'C_0S$ sono supplementari e quindi si ha

$$\operatorname{sen}C_{,}C_0S = \operatorname{sen}C'C_0S\,;$$

laonde moltiplicando nella precedente equazione per $\operatorname{sen}C'C_0S$ e dividendo per $\operatorname{sen}SC_0$ si ottiene

$$\operatorname{sen}CSC_{,}\operatorname{sen}SC_{,}S\operatorname{cotg}SC_0\cos SC' + \operatorname{sen}CSC_{,}\operatorname{sen}SC_{,}S\operatorname{sen}SC'\cos CSC'$$
$$+ \operatorname{sen}CSC'\operatorname{sen}SC'\operatorname{cotg}SC_0\cos SC_{,} + \operatorname{sen}CSC'\operatorname{sen}SC'\operatorname{sen}SC_{,}\cos CSC_{,}$$
$$= \frac{\operatorname{sen}C_{,}SC'\operatorname{sen}SC_{,}}{\operatorname{sen}C_{,}C'S}\cdot\frac{\operatorname{sen}C'C_0S}{\operatorname{sen}SC_0}\,;$$

dividendo per $\operatorname{sen}SC_{,}\operatorname{sen}SC'$

se γ è il punto, sulla sfera celeste, ove giace il *zero* di Ariete, o il punto dell' equinozio di Primavera, si ha quindi:

$$SN + SS' = SN + s' - s = SN + \gamma S' - \gamma S = S'N$$

e di più si ha ancora:

$$SC - SC_0 = C_0C \ .$$

Ma ora in virtù delle (a') la (20) diviene:

$$\left.\begin{array}{l} \{\cot g\,(SC) - \cot g\,(SC_0)\}\,V\,R\,\mathrm{sen}\,(SC) - \rho\,V \\ + \{\cot g\,(SS_,) + \cot g\,(SN)\}\,V'\,\rho_,\,\mathrm{sen}\,(SS_,) \\ + \{\cot g\,(SS') + \cot g\,(SN)\}\,V_,\,\rho'\,\mathrm{sen}\,(SS_,) \end{array}\right\} = 0$$

$$\begin{array}{l} \mathrm{sen}\,CSC_,\,\cot g\,SC_0\,\cot g\,SC' + \mathrm{sen}\,CSC_,\,\cos CSC' \\ + \mathrm{sen}\,CSC'\,\cot g\,SC_0\,\cot g\,SC_, + \mathrm{sen}\,CSC'\,\cos CSC_, \\ = \dfrac{\mathrm{sen}\,C_,SC\,\mathrm{sen}\,C'C_0S}{\mathrm{sen}\,C_,C'S\,\mathrm{sen}\,SC_0\,\mathrm{sen}\,SC'}\,; \end{array}$$

ma dal triangolo C_0SC' si ha

$$\mathrm{sen}\,SC' = \frac{\mathrm{sen}\,CC_0S}{\mathrm{sen}\,C_,C'S}\,.\,\mathrm{sen}\,SC_0\ ;$$

sostituendo questo valore nel denominatore del 2.° membro della precedente equazione esso si riduce a

$$\frac{\mathrm{sen}\,C_,SC'}{\mathrm{sen}^2\,SC_0}$$

e poichè

$$C_,SC' = CSC_, + CSC'$$

e quindi

$$\mathrm{sen}\,C_,SC' = \mathrm{sen}\,CSC_,\,\cos CSC' + \cos CSC_,\,\mathrm{sen}\,CSC'$$

la detta equazione si trasforma in

$$\mathrm{sen}\,CSC_,\,\cot g\,S_0C\,\cot g\,SC' + \mathrm{sen}\,CSC'\,\cot g\,SC_0\,\cot g\,SC_, + \mathrm{sen}\,C_,SC'\left(1 - \frac{1}{\mathrm{sen}^2\,SC_0}\right) = 0$$

e poichè

$$1 - \frac{1}{\mathrm{sen}^2\,SC_0} = -\cot g^2\,SC_0\ ;$$

si ha finalmente l'equazione del testo,

ossia:

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\dfrac{\cos(SC)\,\mathrm{sen}\,(SC_0) - \cos(SC_0)\,\mathrm{sen}\,(SC)}{\mathrm{sen}\,(SC)\,\mathrm{sen}\,(SC_0)}\right\} V\,R\,\mathrm{sen}\,(SC) - \rho V \\ + \left\{\dfrac{\cos(SS_,)\,\mathrm{sen}\,(SN) + \cos(SN)\,\mathrm{sen}\,(SS_,)}{\mathrm{sen}\,(SS_,)\,\mathrm{sen}\,(SN)}\right\} V'\,\rho_,\,\mathrm{sen}\,(SS_,) \\ + \left\{\dfrac{\cos(SS')\,\mathrm{sen}\,(SN') + \cos(SN)\,\mathrm{sen}\,(SS')}{\mathrm{sen}\,(SS')\,\mathrm{sen}\,(SN)}\right\} V_,\,\rho'\,\mathrm{sen}\,(SS') \end{array}\right\} = 0$$

da cui:

$$\frac{\mathrm{sen}\,(CC_0)}{\mathrm{sen}\,(SC_0)}\,\frac{R}{\rho} = \frac{\rho_,\,\mathrm{sen}\,(S_,N)}{\rho\,\mathrm{sen}\,(SN)}\,\frac{V'}{V} + \frac{\rho'\,\mathrm{sen}\,(S'N)}{\rho\,\mathrm{sen}\,(SN)}\,\frac{V_,}{V} - 1$$

ma:

$$-1 = -\frac{T_,V' + T'V_,}{V} = -\frac{V'}{V} - \frac{V_,}{V} + (1 - T_,)\frac{V'}{V} + (1 - T')\frac{V'}{V}$$

laonde sostituendo questo valore di -1 nella precedente, risulta l'equazione

$$(b)\ \frac{R}{\rho} = \frac{\mathrm{sen}\,(SC_0)}{\mathrm{sen}\,(C_0C)}\left\{(1 - T_,)\frac{V'}{V} + \left(\frac{\rho_,\mathrm{sen}(S_,N)}{\rho\,\mathrm{sen}\,(SN)} - 1\right)\frac{V'}{V} + (1 - T')\frac{V_,}{V} + \left(\frac{\rho'\mathrm{sen}\,(S'N)}{\rho\,\mathrm{sen}\,(SN)} - 1\right)\frac{V_,}{V}\right\}.$$

Le equazioni (20) e (21) sono preparate in modo che sono atte a somministrare le espressioni delle componenti della velocità della cometa secondo i tre assi, e della distanza della medesima dalla terra da potersi usare anche per le successive approssimazioni. Per bene intendere l'uso che se ne può fare, conviene che premettiamo le seguenti considerazioni.

Gli intervalli di tempo fra le osservazioni, essendo supposti di pochi giorni, i valori di τ corrispondenti a questi intervalli che abbiamo rappresentato con $\tau_,$ e τ' saranno due quantità piccole. Ciò posto, chiameremo quantità piccole di primo ordine quelle che sono dell'ordine di grandezza di questi intervalli $\tau_,$ e τ'; chiameremo quantità piccole di secondo ordine quelle che sono della grandezza dei quadrati degli stessi intervalli; di terzo ordine quelle dei cubi ec.

Secondo queste definizioni, è facile vedere che $V_{,}$, V', e V saranno quantità di primo ordine. Gli angoli $C\,SC_{,}$, $C'SC$, $C'SC_{,}$ saranno pure quantità di primo ordine perchè sono le differenze di angoli analoghi delle tre osservazioni, e le loro grandezze saranno all'incirca proporzionali a $\tau_{,}$, τ' e $\tau_{,} + \tau'$.

Gli archi SS, ed SS' saranno pure del primo ordine, e con poca differenza respettivamente proporzionali a $\tau_{,}$ e τ'.

L'arco $CC_{,}$ sarà comunemente una quantità di secondo ordine, perchè non si scosterà molto dalla perpendicolare sul lato $C_{,}C'$ del triangolo $C_{,}CC'$, i lati del quale $C_{,}C$, $C'C$ e $C_{,}C'$ sono quantità di primo ordine, ed in cui gli angoli $C'C_{,}C$, $C_{,}C'C$ saranno pure di primo ordine, poichè il movimento apparente di un corpo celeste in un piccolo intervallo di tempo poco si scosta da un circolo massimo della sfera.

Parimente si debbono considerare come quantità di primo ordine le due:

$$\frac{\rho_{,}\,\text{sen}\,S_{,}N}{\rho\,\text{sen}\,SN} - 1\,, \quad \frac{\rho''\,\text{sen}\,S'N}{\rho\,\text{sen}\,SN} - 1\,;$$

perchè i numeratori delle due frazioni differiscono dal denominatore comune soltanto di quantità di primo ordine: il 1° all'incirca di una quantità proporzionale a $\tau_{,}$ ed il 2° di una quantità proporzionale a τ'.

Queste relazioni sono evidenti per sè medesime; ma se si volessero provare analiticamente, basterebbe considerare le quantità $\gamma\,SC_{,}$, $\gamma\,S_{,}$, $\rho\,\text{sen}\,NS$ ec., come funzioni del tempo, e svilupparle in serie per le potenze di $\tau_{,}$ e τ' corrispondentemente alla prima e alla terza osservazione, e farne le differenze.

Di più se indichiamo con h e k due quantità funzioni di r, $s\frac{ds}{d\tau}$ e dell'intervallo di tempo, è facile vedere che potremo porre:

$$T_{,} = 1 - \frac{h_{,}\tau_{,}^2}{2r^3}$$

$$T' = 1 - \frac{h'\tau'^2}{2r^3}$$

$$V_{,} = \tau_{,}\left(1 - \frac{k_{,}\tau_{,}^2}{br^3}\right)$$

$$V' = \tau'\left(1 - \frac{k'\tau'^2}{br^3}\right)$$

$$V = T_{,}V' + V_{,}T' = (\tau_{,} + \tau')\left(1 - \frac{k(\tau_{,} + \tau')^2}{br^3}\right)$$

e quando nel calcolare i valori di $T_{,}$, T', $V_{,}$, V' e V non si volesse spingere l'approssimazione più in là delle quantità di 2.° ordine si potrà prendere $h_{,} = h' = 1$, $k_{,} = k' = 0$.

Premesse queste considerazioni si potrà riconoscere che se facciamo nelle (21) $T_{,} = T' = 1$; $V_{,} = \tau_{,}$; $V' = \tau'$, $V = \tau_{,} + \tau'$ non si verranno a trascurare che delle quantità di primo ordine in confronto di quantità finite, e che gli errori si ridurranno al secondo ordine quando sia $\tau_{,} = \tau'$.

Potremo dunque per approssimazione, ponendo per brevità

$$(19)\quad \begin{cases} a = \dfrac{\text{sen}\,SC}{\text{sen}\,C_{,}SC'}\left\{\dfrac{\text{cotg}\,SC'\,\text{sen}\,C_{,}SC}{\tau_{,}} - \dfrac{\text{cotg}\,SC_{,}\,\text{sen}\,CSC'}{\tau'}\right\} \\ b = \dfrac{\text{sen}\,SC}{\text{sen}\,C'SC_{,}}\left\{-\dfrac{\cos\gamma\,SC'\,\text{sen}\,C_{,}SC}{\tau_{,}} + \dfrac{\cos\gamma\,SC_{,}\,\text{sen}\,CSC'}{\tau'}\right\} \\ c = \dfrac{\text{sen}\,SC}{\text{sen}\,C_{,}SC'}\left\{\dfrac{\text{sen}\,\gamma\,SC'\,\text{sen}\,C_{,}SC}{\tau_{,}} - \dfrac{\text{sen}\,\gamma\,SC_{,}\,\text{sen}\,CSC'}{\tau'}\right\} \end{cases}$$

assumere:

$$(19)'\quad \begin{cases} \dfrac{dX}{d\tau} = a\,R - \dfrac{\rho'\cos SS' - \rho_{,}\cos SS_{,}}{\tau_{,} + \tau'} \\ \dfrac{dY}{d\tau} = b\,R - \dfrac{\rho'\,\text{sen}\,SS' + \rho_{,}\,\text{sen}\,SS_{,}}{\tau_{,} + \tau'} \\ \dfrac{dZ}{d\tau} = c\,R \end{cases}$$

trascurando gli altri termini, perchè $\rho'\,\text{sen}\,SS'\frac{V_{,}}{V} + \rho_{,}\,\text{sen}\,SS_{,}\frac{V'}{V}$ è di secondo ordine e si riduce al quarto quando $\tau_{,} = \tau'$.

Parimente trascurando nella (20) le quantità di primo ordine in confronto delle quantità finite, potremo mettere $h_{,} = h' = 1$ nei valori di T, e T', e prendere $V_{,} = \tau_{,}$, $V' = \tau'$, $V = \tau_{,} + \tau'$, e si avrà per approssimazione:

$$(20)' \quad \frac{R}{\rho} = \frac{\operatorname{sen} SC_0}{\operatorname{sen} C_0C}\left\{\frac{\tau'\tau'}{2r^3} + \left(\frac{\rho_{,} \operatorname{sen}(S_{,}N)}{\rho \operatorname{sen}(SN)} - 1\right)\frac{\tau'}{\tau_{,} + \tau'} + \left(\frac{\rho' \operatorname{sen}(S'N)}{\rho \operatorname{sen}(SN)} - 1\right)\frac{\tau_{,}}{\tau_{,} + \tau'}\right\}.$$

Le equazioni (19)' e (20)' rispetto alla prima approssimazione si possono semplificare ancora ponendole sotto una forma che ci dispensa dal calcolo dei luoghi S, ed S' del sole corrispondenti alle osservazioni estranee. Poichè la terra e a cometa si muovono intorno al sole per la stessa forza attrattiva di quest'astro, se si chiamano ξ, $\varkappa$, e ζ le coordinate rettangole della terra attorno al sole nell'istante dell'osservazione media, e si indicano con θ e γ ciò che divengono le funzioni T e V quando si cambiano gli elementi dell'orbita della cometa in quelli della terra, avremo conformemente alle equazioni (*a*):

$$-\rho\lambda = \xi\theta + \frac{d\xi}{d\tau}\gamma, \quad -\rho\mu = \varkappa\theta + \frac{d\varkappa}{d\tau}\gamma, \quad -\rho\nu = \zeta\theta + \frac{d\zeta}{d\tau}\gamma.$$

Poichè riferendo queste equazioni successivamente alla 1.ª, alla 2.ª ed alla 3.ª osservazione esse non differirebbero da quelle segnate (10), (11) e (12) se non in quanto le quantità X, Y, Z, T e V sarebbero sostituite da ξ, $\varkappa$, ζ, θ e γ, e che la R vi sarebbe nulla, quindi è chiaro che eseguendo per queste nuove equazioni le operazioni che abbiamo fatte in quelle ora citate, si arriverà a dei resultamenti analoghi, i quali si otterranno facendo i cambiamenti delle lettere che abbiamo accennato; così che invece delle (21) avremo le equazioni seguenti:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = -\left(\rho' \cos(SS')\frac{\theta_{,}}{\gamma} - \rho_{,} \cos(SS_{,})\frac{\theta'}{\gamma}\right).$$

$$\frac{d\varkappa}{d\tau} = -\left(\rho' \operatorname{sen}(SS')\frac{\theta_{,}}{\rho} + \rho_{,} \operatorname{sen}(SS_{,})\frac{\theta'}{\gamma}\right)$$

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = 0.$$

E poichè nella (*b*) nel nostro caso si ha $R = 0$, $\frac{\operatorname{sen} SC_0}{\operatorname{sen} C_0C} = 1$, essa si ridurrà a

$$(1 - \theta_{,})\gamma' + (1 - \theta')\gamma_{,} = -\left\{\frac{\rho_{,} \operatorname{sen}(S_{,}N)}{\rho \operatorname{sen}(SN)} - 1\right\}\gamma' - \left\{\frac{\rho' \operatorname{sen}(S'N)}{\rho \operatorname{sen}(SN)} - 1\right\}\gamma_{,}.$$

Nelle prime tre equazioni potremo assumere con sufficiente approssimazione $\theta_{,} = \theta' = 1$, e $\gamma = \tau_{,} + \tau'$ ed avremo:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = -\frac{\rho' \cos SS' - \rho_{,} \cos SS_{,}}{\tau_{,} + \tau'}$$

$$\frac{d\varkappa}{d\tau} = -\frac{\rho' \operatorname{sen} SS' + \rho_{,} \operatorname{sen} SS_{,}}{\tau_{,} + \tau'}$$

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = 0$$

e nell'ultima delle precedenti equazioni si potrà porre:

$$\theta_{,} = 1 - \frac{\tau_{,}^2}{2\rho^3}, \quad \theta' = 1 - \frac{\tau'^2}{2\rho^3}$$

$$\gamma_{,} = \tau_{,}, \quad \gamma' = \tau', \quad \gamma = \tau_{,} + \tau'$$

e quindi diverrà:

$$\frac{\tau_{,}\tau'}{2\rho^3} = \left(\frac{\rho_{,} \operatorname{sen}(S_{,}N)}{\rho \operatorname{sen}(SN)} - 1\right)\frac{\tau'}{\tau_{,} + \tau'} + \left(\frac{\rho' \operatorname{sen}(S'N)}{\rho \operatorname{sen}(SN)} - 1\right)\frac{\tau_{,}}{\tau_{,} + \tau'}$$

e le (19)' e la (20)' diverranno:

$$(19)'' \quad \begin{cases} \dfrac{dX}{d\tau} = aR + \dfrac{d\xi}{d\tau} \\[2ex] \dfrac{dY}{d\tau} = bR + \dfrac{d\varkappa}{d\tau} \\[2ex] \dfrac{dZ}{d\tau} = cR \end{cases}$$

$$(20)'' \qquad \frac{R}{\rho} = \frac{\operatorname{sen}(SC_0)}{\operatorname{sen}(CC_0)} \cdot \frac{\tau, \tau'}{z} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{\rho^3} \right)$$

Le componenti $\frac{d\xi}{d\tau}, \frac{d\varkappa}{d\tau}$ delle velocità della terra contenute nelle precedenti equazioni (19)'' si possono calcolare per mezzo delle seguenti formule del movimento ellittico:

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau} = -\frac{e \operatorname{sen}(f-\varepsilon)}{\sqrt{1-e^2}}, \quad \frac{d\varkappa}{d\tau} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{\rho}$$ [1]

dove e dinota l'eccentricità dell'orbita terrestre ed f la longitudine del perielio. Al principio dell'anno 1801 si aveva l'eccentricità $e = 0{,}0168532$ e la longitudine del perielio $f = 99^\circ\, 30'\, 5''$.

L'eccentricità diminuisce di 0,0000418 in un secolo e la longitudine del perielio aumenta di $1'\, 2''$ in un anno.

La riduzione delle (21) alla forma (19)'' non potrà essere adottata per le approssimazioni successive, nelle quali sarà più esatto impiegare i luoghi del sole come son dati dalle tavole solari, o da una buona effemeride.

Si fa ora manifesto che la (20)'' e le (19)'' e le equazioni (10) che colle denominazioni introdotte si riducono a

$$(10)' \qquad \begin{cases} X = R\cos(SC) - \rho \\ Y = -R\operatorname{sen}(SC)\cos\gamma SC \\ Z = R\operatorname{sen}(SC)\operatorname{sen}\gamma SC \\ r^2 = R^2 - 2R\rho\cos(SC) + \rho^2 \end{cases}$$

ci somministrano comodamente la 1.ª soluzione approssimata del problema.

Infatti introducendo il valore di r dato dalla quarta delle precedenti

[1] Vedi Pontécoulant, *Sistème du Monde*; Vol. I, pag. 26. Per la scelta da noi fatta degli assi coordinati, bisogna porre nelle formule del Pontécoulant $A = 0$, ed $\omega = f - \varepsilon$.

equazioni nella (20)'', essa non conterrà altra incognita che la R che sarà perciò determinabile colla risoluzione di questa equazione. Trovata la R le precedenti equazioni (10)' ci daranno i valori di X, Y, Z e le equazioni (19)'' quelli di $\frac{dX}{d\tau}, \frac{dY}{d\tau}, \frac{dZ}{d\tau}$ e coi valori di queste sei quantità determineremo tutti gli elementi dell'orbita del corpo attratto mediante alcune formule semplicissime che diamo nel Capitolo seguente.

II

Formule che danno gli elementi dell'orbita descritta da una cometa, in funzione delle coordinate e delle velocità della cometa stessa.

Dimostriamo ora in qual modo conosciute che sieno le coordinate e le velocità del corpo attratto relative ad un certo istante si possano determinare gli elementi dell'orbita che quel corpo descrive intorno al sole.

Riprendiamo perciò le equazioni fondamentali:

$$(2) \qquad \frac{d^2x}{d\tau^2} = -\frac{x}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{d\tau^2} = -\frac{y}{r^3}, \quad \frac{d^2z}{d\tau^2} = -\frac{z}{r^3}.$$

Moltiplicando la prima di queste equazioni per y e sottraendola dalla seconda moltiplicata per x, e più integrando l'equazione risultante si otterrà:

$$(a) \qquad \begin{cases} x\dfrac{dy}{d\tau} - y\dfrac{dx}{d\tau} = C' \\ \text{e in un modo analogo si otterranno le due seguenti equazioni:} \\ x\dfrac{dz}{d\tau} - z\dfrac{dx}{d\tau} = C'' \\ y\dfrac{dz}{d\tau} - z\dfrac{dy}{d\tau} = C''' \end{cases}$$

ove C', C'', e C''' rappresentano le tre costanti introdotte dalla integrazione, le quali dipenderanno dalle circostanze iniziali del movimento e che si tratta appunto di determinare.

Dalle tre precedenti equazioni si ricavano:

$$(b) \qquad C' z - C'' y + C''' x = 0 .$$

Le equazioni (a) ci dicono che le aeree descritte, nelle diverse proiezioni dell'orbita, sono proporzionali al tempo, e l'equazione (b) esprime che l'orbita è situata in un piano.

L'intersezione del piano dell'orbita col piano delle $x\,y$ cioè col piano dell'eclittica si otterrà facendo nella (b) $z = 0$ dal che si ottiene:

$$\frac{y}{x} = \frac{C'''}{C''} ,$$

ma rammentiamoci ora che in principio abbiam preso per asse delle x una retta che passando per il centro della terra andava al luogo che il centro del sole occupava nell'istante dell'osservazione di mezzo, e per asse dalle y una retta situata sopra l'eclittica e perpendicolare all'asse delle x; si avrà dunque che $\frac{y}{x}$ rappresenterà la tangente dell'angolo che la linea d'intersezione del piano dell'orbita col piano dell'eclittica, ossia la linea dei nodi, fa coll'asse delle x: e se a quest'angolo che indicheremo con $\Omega_{,}$ si aggiungerà adunque la longitudine del sole per l'istante dell'osservazione di mezzo, la quale longitudine del sole l'abbiamo chiamata ε, si avrà che $\Omega_{,} + \varepsilon$ sarà la longitudine di uno dei nodi dell'orbita descritta dal corpo attratto. Poichè dunque, per le denominazioni che abbiamo detto di adottare, si ha:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang} \Omega_{,}$$

ne risulterà:

$$C''' = C'' \operatorname{tang} \Omega_{,} .$$

Con un raggio eguale all'*unità* immaginiamo descritti sul piano dell'eclittica un arco che partendo dall'asse delle x vada ad incontrare la linea dei nodi; le coordinate del piano dell'orbita corrispondenti all'estremità di questo arco saranno rappresentate dalle seguenti equazioni:

$$x = \cos \Omega_{,} \;,\; y = \operatorname{sen} \Omega_{,} \;,\; z = \frac{C''}{C'} \sin \Omega_{,} - \frac{C'''}{C'} \cos \Omega_{,}$$

laonde:

$$\frac{dz}{d\Omega_{,}} = \left(\frac{C''}{C'} \cos \Omega_{,} + \frac{C'''}{C'} \operatorname{sen} \Omega_{,} \right) ,$$

ma dal calcolo differenziale sappiamo che $\frac{dz}{d\Omega_{,}}$ rappresenta la tangente dell'inclinazione del piano dell'orbita sul piano dell'eclittica: chiamando i questa inclinazione, si avrà dunque:

$$\operatorname{tang} i = \frac{C''}{C'} \cos \Omega_{,} + \frac{C'''}{C'} \operatorname{sen} \Omega_{,} = \frac{C''}{C' \cos \Omega_{,}}$$

e quindi:

$$C'' = C' \cos \Omega_{,} \operatorname{tag} i \;,\; C''' = C' \operatorname{sen} \Omega_{,} \operatorname{tang} i \;,$$

e le (a) si trasformano in

$$(c) \qquad \begin{cases} x \dfrac{dy}{d\tau} - y \dfrac{dx}{d\tau} = C' \\[2ex] x \dfrac{dz}{d\tau} - z \dfrac{dx}{d\tau} = C' \cos \Omega_{,} \operatorname{tang} i \\[2ex] y \dfrac{dz}{d\tau} - z \dfrac{dy}{d\tau} = C' \operatorname{sen} \Omega_{,} \operatorname{tang} i \end{cases}$$

Determiniamo ora il valore di C'.

Perciò risaliamo alle equazioni (2) e moltiplichiamo la prima per $2x$, la seconda per $2y$, la terza per $2z$, sommiamole e integriamo la loro somma: rammentandoci che $x \frac{dx}{d\tau} + y \frac{dy}{d\tau} + z \frac{dz}{d\tau} = r dr$ si avrà:

$$(d) \qquad \frac{dx^2}{d\tau^2} + \frac{dy^2}{d\tau^2} + \frac{dz^2}{d\tau^2} - \frac{2}{r} + h = 0 ,$$

h essendo una costante arbitraria.

Ma se si sommano le tre equazioni (a) dopo di averle elevate a quadrato e si pone $k^2 = C'^2 + C''^2 + C'''^2$, si ottiene:

$$x^2\left(\frac{dy^2}{d\tau^2}+\frac{dz^2}{d\tau^2}\right)+y^2\left(\frac{dx^2}{d\tau^2}+\frac{dz^2}{d\tau^2}\right)+z^2\left(\frac{dx^2}{d\tau^2}+\frac{dy^2}{d\tau^2}\right)$$
$$-2\left(xy\frac{dx}{d\tau}\frac{dy}{d\tau}+xz\frac{dx}{d\tau}\frac{dz}{d\tau}+yz\frac{dy}{d\tau}\frac{dz}{d\tau}\right)=k^2$$

equazione che si può anche scrivere nel modo seguente:

$$(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{dx^2}{d\tau^2}+\frac{dy^2}{d\tau^2}+\frac{dz^2}{d\tau^2}\right)-\left(x\frac{dx}{d\tau}+y\frac{dy}{d\tau}+z\frac{dz}{d\tau}\right)^2=k^2$$

oppure:

$$(e)\qquad r^2\left(\frac{dx^2}{d\tau^2}+\frac{dy^2}{d\tau^2}+\frac{dz^2}{d\tau^2}\right)-\frac{r^2\,dr^2}{d\tau^2}=k^2.$$

Se si elimina $\frac{dx^2}{d\tau^2}+\frac{dy^2}{d\tau^2}+\frac{dz^2}{d\tau^2}$ fra questa equazione e la (d) e si ricava poi il valore di $d\tau$ si ottiene:

$$(f)\qquad d\tau=\frac{r\,dr}{\sqrt{2r-hr^2-k^2}}.$$

Questa equazione dà τ e quindi il tempo $t=\tau\sqrt{g}$ in funzione di r, e reciprocamente r in funzione del tempo t.

Se si indica ora con dv l'angolo infinitamente piccolo compreso fra due raggi consecutivi r ed $r+dr$, il quadrato dell'elemento della traiettoria sarà eguale a $dr^2+r^2dv^2$, di modo che si avrà:

$$\frac{dx^2}{d\tau^2}+\frac{dy^2}{d\tau^2}+\frac{dz^2}{d\tau^2}=dr^2+r^2dv^2$$

sostituendo questo valore nell'equazione (e) essa diviene $r^4dv^2=k^2d\tau^2$ dalla quale si trae:

$$dv=\frac{k\,d\tau}{r^2}.$$

La quantità $\frac{1}{2}r^2dv$ rappresenta l'area elementare descritta dal raggio vettore r nell'istante $d\tau$; questa area è dunque proporzionale all'elemento del tempo, e in conseguenza in un tempo finito essa è proporzionale al tempo.

Se nell'equazione precedente si sostituisce per $d\tau$ il suo valore (f) si avrà:

$$(g)\qquad dv=\frac{k\,dr}{r\sqrt{2r-hr^2-k^2}}.$$

Abbiamo già visto che l'orbita è una curva piana; ne segue dunque che l'angolo v esprime la longitudine del raggio vettore r contata nel piano di questa curva a partire da una linea fissa: l'equazione precedente darà dunque integrandola la relazione che deve esistere fra la longitudine e il raggio vettore, cioè darà l'equazione polare della curva descritta. I valori massimo e minimo di r saranno determinati dall'equazione:

$$2r-hr^2-k^2=0,$$

così che la somma dei due detti valori sarà eguale a $\frac{2}{h}$ e il loro prodotto a $\frac{k^2}{h}$. Se dunque si indica con $a(1+e)$ il valore più grande e con $a(1-e)$ il valore più piccolo, si avrà:

$$\frac{1}{h}=a\qquad \frac{k^2}{h}=a^2(1-e^2)$$

da cui si ricava:

$$(m)\qquad h=\frac{1}{a},\quad k=\sqrt{a(1-e^2)}.$$

La costante a è la semisomma dei valori estremi di r, ossia la distanza media dal sole al corpo attratto; ae è la semidifferenza dei detti valori.

Se in luogo delle costanti h e k si sostituiscono i valori precedenti nell'equazione (g), essa diviene:

$$dv = \frac{\sqrt{a(1-e^2)}\,dr}{r\sqrt{2r - \frac{1}{a}r^2 - a(1-e^2)}},$$

alla quale può darsi la forma:

$$dv = -\frac{\frac{a(1-e^2)}{e}\,d\frac{1}{r}}{\sqrt{1-\left(\frac{a(1-e^2)\frac{1}{r}-1}{e}\right)^2}}$$

e integrando

$$v = \omega + \arccos\left(\frac{a(1-e^2)\frac{1}{r}-1}{e}\right),$$

ove ω è una costante arbitraria.

Si avrà dunque reciprocamente:

$$(n) \qquad r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v-\omega)}.$$

Questa equazione è quella delle sezioni coniche, l'origine del raggio vettore r essendo al fuoco. La costante a è dunque il semigrande asse della curva ed e è la sua eccentricità.

In forza della (m) l'equazione (d) si trasforma nella seguente:

$$(o) \qquad \frac{dx^2}{d\tau^2} + \frac{dy^2}{d\tau^2} + \frac{dz^2}{d\tau^2} = \frac{2}{r} - \frac{1}{a},$$

nella quale come abbiamo detto la quantità a rappresenta il semigrande asse della sezione conica descritta intorno al sole dal corpo attratto.

Se questa sezione è un circolo a sarà eguale ad r; se la sezione è una parabola $a = \infty$. Dunque si avrà:

per il circolo $\frac{dx^2}{d\tau^2} + \frac{dy^2}{d\tau^2} + \frac{dz^2}{d\tau^2} = \frac{1}{r}$,

per la parabola $\frac{dx^2}{d\tau^2} + \frac{dy^2}{d\tau^2} + \frac{dz^2}{d\tau^2} = \frac{2}{r}$.

Dimostrata così l'equazione (o) possiamo ora passare alla determinazione della costante C′ che entra nelle equazioni (c). Perciò noteremo che il primo membro dell'equazione (o) è eguale a $\frac{dr^2}{d\tau^2} + r^2\frac{dv^2}{d\tau^2}$, moltiplicando da una parte e dall'altra per r^2, e mettendo in luogo di $\frac{dr}{d\tau}$ il suo valore s, si deduce:

$$r^4\frac{dv^2}{d\tau^2} = 2r - \frac{r^2}{a} - s^2.$$

Ma l'area $\frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{d\tau} - y\frac{dx}{d\tau}\right)$ è la proiezione, sul piano dell'eclittica, dell'area $\frac{1}{2}r^2dv$ descritta nel piano dell'orbita; ed essendo l'inclinazione di questi due piani i si ha dunque:

$$r^2\frac{dv}{d\tau} = \left(x\frac{dy}{d\tau} - y\frac{dx}{d\tau}\right)\frac{1}{\cos i} = \frac{C'}{\cos i}.$$

da cui:

$$C'^2 = \cos^2 i\left(2r - \frac{r^2}{a} - s^2\right).$$

Se si chiama q la distanza perielia, avremo, quando $r = q$, $s = 0$ e quindi si avrà in generale:

$$C' = \pm\cos i\sqrt{\left(2q - \frac{q^2}{a}\right)}.$$

e nel caso particolare dell'orbita parabolica sarà:

$$C' = \pm \cos i \sqrt{2q}$$

Le equazioni (c) diverranno dunque:

$$(p)\quad \begin{cases} x\dfrac{dy}{d\tau} - y\dfrac{dx}{d\tau} = \pm \cos i \sqrt{2q} \\[2ex] x\dfrac{dz}{d\tau} - z\dfrac{dx}{d\tau} = \pm \operatorname{sen} i \cos \Omega_{,} \sqrt{2q} \\[2ex] y\dfrac{dz}{d\tau} - z\dfrac{dy}{d\tau} = \pm \operatorname{sen} i \operatorname{sen} \Omega_{,} \sqrt{2q}\,. \end{cases}$$

Facciamo prima di servirsi di questa equazione la distinzione fra moto *diretto* e moto *retrogrado*. Un osservatore che fosse situato nel sole vedrebbe *tutti* i pianeti aggirarsi intorno a lui con moti più o meno veloci ma che tutti si compiono in modo che tutti i pianeti vanno dalla destra alla sinistra del detto osservatore. Nessuno dei pianeti finora conosciuti fa eccezione a questa regola. Non così accade delle comete; alcune di queste si muovono nello stesso senso dei pianeti, cioè dalla destra alla sinistra per un osservatore situato nel sole; altre invece si muovono dalla sinistra alla destra rispetto allo stesso osservatore. Le prime si dicono *dirette*, le seconde *retrograde*. Se si suppone però che il piano in cui si muove una cometa di moto retrogrado giri di 90° intorno alla sua intersezione col piano dell'eclittica sarà facile il riconoscere che allora anche quella cometa viene ad avere un moto diretto; sicchè invece di fare la distinzione fra moto diretto e retrogrado come fanno molti autori noi considereremo sempre le comete come aventi moto diretto e solo considereremo la inclinazione maggiore di 90° nel caso che si abbia realmente moto retrogrado [1]. Per

[1] Quando una Cometa ha moto *diretto* si intende per longitudine del perielio della sua orbita la somma della distanza angolare del perielio dal nodo ascendente (la qual distanza chiamasi l'*argomento di latitudine del perielio*) con la longitudine del nodo ascendente. Quando invece la cometa ha moto *retrogrado* per longitudine del perielio si intende la differenza fra la longitudine del nodo ascendente e l'*argomento di latitudine del perielio*. Noi però che non facciamo la distinzione di moto

riconoscere poi se il moto di una cometa è diretto o retrogrado, basterà osservare al segno del valore del binomio $x\dfrac{dy}{d\tau} - y\dfrac{dx}{d\tau}$; se questo segno sarà positivo il moto sarà diretto, se negativo, il moto sarà retrogrado; poichè il detto binomio rappresenta il doppio della proiezione dell'area descritta dalla cometa fatta sul piano xy cioè sul piano dell'eclittica, e quindi il segno del detto binomio ci fa conoscere se questa proiezione cresce e diminuisce col tempo, cioè se il moto è diretto o retrogrado.

Premesso tutto questo vediamo come dalle (p) si possano ricavare i valori dei tre elementi dell'orbita i, Ω e q.

Quelle equazioni ci danno subito:

$$(q)\quad \operatorname{tang} \Omega_{,} = -\frac{y\dfrac{dz}{d\tau} - z\dfrac{dy}{d\tau}}{z\dfrac{dx}{d\tau} - x\dfrac{dz}{d\tau}},$$

ma a questa equazione soddisfa tanto il valore $\Omega_{,}$ che il valore $180 + \Omega_{,}$, si toglierà però questa ambiguità calcolando la inclinazione i colla seguente formula:

retrogrado, prenderemo sempre la longitudine del perielio nel primo dei modi anzidetti.

Se poi si vuol trasformare il valore della longitudine del perielio dal caso che sia fatta la detta distinzione, al caso che quella distinzione non si faccia, o viceversa; allora si devono tenere le seguenti regole:

1° *Caso*. Se sia data la longitudine π del perielio nel caso che sia fatta la distinzione di moto retrogrado, e che si voglia il valore di questo elemento senza fare una tale distinzione; allora la longitudine π data si dovrà sottrarre dalla data longitudine Ω (aggiungendo ad Ω, se sia necessario, 360°); e quindi l'angolo ottenuto, che non sarà altro che l'argomento di latitudine del perielio, si dovrà aggiungere alla longitudine Ω del nodo ascendente.

2.° *Caso*. Se sia data la longitudine π del perielio senza fare la distinzione di moto retrogrado, e che si voglia la stessa longitudine nel caso di fare la distinzione suddetta; allora dalla longitudine π data, bisognerà togliere Ω, e quindi l'angolo ottenuto, che non sarà altro che l'argomento di latitudine del perielio, dovrà togliersi da Ω (aggiungendo ad Ω, se sia necessario, 360°).

$$(r) \qquad \operatorname{tang} i = -\frac{z\dfrac{dx}{d\tau} - x\dfrac{dz}{d\tau}}{x\dfrac{dy}{d\tau} - y\dfrac{dx}{d\tau}} \cdot \frac{1}{\cos \Omega_{,}},$$

e si prenderà per $\Omega_{,}$ quell'angolo che rende tang i positiva nel caso del moto diretto e negativa nel caso del moto retrogrado. Quando $\cos \Omega_{,}$ fosse molto piccolo, allora sarebbe preferibile di calcolare tang i con quest'altra formula:

$$(s) \qquad \operatorname{tang} i = \frac{y\dfrac{dz}{d\tau} - z\dfrac{dy}{d\tau}}{x\dfrac{dy}{d\tau} - y\dfrac{dx}{d\tau}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} \Omega_{,}}.$$

Conosciuto $\Omega_{,}$, supponendo che le tre coordinate e le tre velocità sieno relative all'osservazione di mezzo si avrà poi la longitudine del nodo ascendente dalla equazione:

$$(t) \qquad \Omega = \Omega_{,} + \varepsilon .$$

Notisi però che questo valore di Ω sarà la longitudine del nodo ascendente quando la latitudine della cometa nell'osservazione di mezzo sarà boreale, che se fosse invece australe, allora il detto valore di Ω sarebbe la longitudine del nodo discendente e bisognerebbe aggiungere ad esso 180° per avere la longitudine del nodo ascendente.

Determinati $\Omega_{,}$ ed i si avrà la distanza perielia dalla equazione:

$$(u) \qquad \sqrt{q} = \frac{x\dfrac{dy}{d\tau} - y\dfrac{dx}{d\tau}}{\cos i \sqrt{2}}.$$

Questa distanza perielia si può trovare anche indipendentemente dai detti due angoli mediante la seguente equazione:

$$(v) \qquad 2q = \left(x\frac{dy}{d\tau} - y\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(y\frac{dz}{d\tau} - z\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(z\frac{dx}{d\tau} - x\frac{dz}{d\tau}\right)^2,$$

che resulta evidentemente dalle equazioni (p).

Il valore del raggio vettore corrispondente all'osservazione di mezzo si ha dalla formula già dimostrata:

$$(x) \qquad r = \frac{\rho \operatorname{sen} SC}{\operatorname{sen} \chi},$$

conosciuto il valore di r, e della distanza perielia q si ha poi nella parabola il valore dell'anomalia ω cioè dell'angolo che il raggio vettore r fa colla distanza perielia dalla formula:

$$(y) \qquad \cos^2 \tfrac{1}{2}\omega = \frac{q}{r}.$$

Si avrà poi l'angolo che la proiezione di r sul piano delle $x\,y$ fa coll'asse delle x dalla formula:

$$(z) \qquad \operatorname{tang} \varphi = \frac{y}{x},$$

dalla quale dovremo prendere fra i due angoli φ e $180 + \varphi$ che vi soddisfano, quello che rende sen φ del medesimo segno di Y e cos φ del medesimo segno di X.

Trovato l'angolo φ si otterrà poi la distanza angolare e della cometa dal nodo ascendente, mediante la formula che risulta subito dalla risoluzione di un triangolo sferico:

$$(\alpha) \qquad \operatorname{tang} e = \frac{\operatorname{tang}(f - \Omega_{,})}{\cos i}.$$

E quindi la longitudine π del perielio sarà data da

(β) $\Pi = \Omega + C + \omega$ se la Cometa non ha passato il perielio.

(γ) $\Pi = \Omega + C - \omega$ se la Cometa ha già passato il perielio.

Per conoscere poi se la cometa ha passato o non ha passato il perielio nell'istante corrispondente alla seconda osservazione basterà osservare al

segno del trinomio $X\frac{dX}{d\tau}+Y\frac{dY}{d\tau}+Z\frac{dZ}{d\tau}$ il quale come abbiamo detto è eguale ad $r\frac{dr}{d\tau}$, se dunque il segno di questo trinomio sarà negativo vorrà dire che $\frac{dr}{d\tau}$ è negativo (r è sempre positivo) cioè che il raggio vettore va diminuendo, ossia che la cometa si avvicina al perielio per il quale non è anche passata; se invece il segno del trinomio sarà positivo la cometa avrà già passato il perielio.

Per trovare poi il tempo del passaggio al perielio, quando sia stata determinata la ω mediante la formula (y), si farà uso della Tavola di Barker, cioè della TAVOLA DEL MOTO DELLE COMETE NELLE ORBITE PARABOLICHE, che è riportata in tutti i Corsi di Astronomia.

III

Correzione degli elementi dell'Orbita per mezzo di un numero qualunque di osservazioni.

Sieno x, y, z le coordinate della cometa prese in un sistema di assi ortogonali aventi la loro origine nel sole ed essendo il piano xy quello dell'eclittica e l'asse delle x la retta che dal sole va allo *zero* di Ariete. Sieno ξ e ζ le coordinate della terra. R la distanza della cometa dalla terra, ed l, m, n i tre coseni degli angoli che la R fa con i tre assi.

Si avrà in generale:

$$(1)\qquad x-\xi=l\,R\,,\quad y-\zeta=m\,R\,,\quad z=n\,R\,.$$

Indichiamo con α, α_1, α_2 i coseni degli angoli che la distanza perielia fa con i tre assi: con β, β_1, β_2 i coseni degli angoli che il parametro fa con gli stessi assi: e con γ, γ_1, γ_2 i coseni che con questi assi fa la perpendicolare al piano dell'orbita. Avremo allora, indicando con X ed Y le coordinate della cometa prese nel piano dell'orbita in modo che la loro origine sia nel sole e l'asse X ed Y respettivamente nella direzione della distanza perielia e del parametro:

$$x=\alpha X+\beta Y\,;\quad y=\alpha_1 X+\beta_1 Y\,;\quad Z=\alpha_2 X+\beta_2 Y$$

e le equazioni (1) diverranno:

$$(2)\qquad \alpha X+\beta Y=lR+\xi\,,\quad \alpha_1 X+\beta_1 Y=mR+\zeta\,,\quad \alpha_2 X+\beta_2 Y=nR$$

Le quantità che entrano nei primi membri di queste equazioni dipendono tutte dagli elementi dell'orbita già determinata e che si tratta di correggere. Se infatti si chiama r la distanza della cometa dal sole ed ω l'anomalia vera corrispondente si avrà:

$$(3)\qquad X=r\cos\omega\,,\quad Y=r\,\mathrm{sen}\,\omega\,.$$

Indicando poi con n l'angolo che la distanza perielia fa colla linea dei nodi dell'orbita già determinata dalla parte del nodo ascendente; con Ω la longitudine di questo nodo; e con i la inclinazione dell'orbita sull'eclittica: le formule di Eulero per la trasformazione delle coordinate danno:

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned}
\alpha &= \cos\omega\cos\Omega-\mathrm{sen}\,\omega\,\mathrm{sen}\,\Omega\cos i\\
\alpha_1 &= \cos\omega\,\mathrm{sen}\,\Omega+\mathrm{sen}\,\omega\cos\Omega\cos i\\
\alpha_2 &= \mathrm{sen}\,\omega\,\mathrm{sen}\,i\\
\beta &= -\mathrm{sen}\,\omega\cos\Omega-\cos\omega\,\mathrm{sen}\,\Omega\cos i\\
\beta_1 &= -\mathrm{sen}\,\omega\,\mathrm{sen}\,\Omega+\cos\omega\cos\Omega\cos i\\
\beta_2 &= \cos\omega\,\mathrm{sen}\,i\\
\gamma &= \mathrm{sen}\,i\,\mathrm{sen}\,\Omega\\
\gamma_1 &= -\mathrm{sen}\,i\cos\Omega\\
\gamma_2 &= \cos i\,.
\end{aligned}\right.$$

Nei secondi membri poi delle equazioni (2) le tre quantità l, m, n dipendono dalle osservazioni. Chiamando infatti L e λ la longitudine e la latitudine della cometa determinate in una certa osservazione, si avrà:

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned}
l &= \cos\lambda\cos L\\
m &= \cos\lambda\,\mathrm{sen}\,L\\
n &= \mathrm{sen}\,\lambda
\end{aligned}\right.$$

Le coordinate ξ ed ζ della terra si trovano colle tavole del sole; poichè si ha:

$$\xi = -\rho \cos \varepsilon \,, \quad \zeta = -\rho \operatorname{sen} \varepsilon \,,$$

ove ρ rappresenta la distanza dalla terra al sole nell'ipotesi che sia eguale ad *uno* la distanza media dal sole alla terra; ed ε rappresenta la longitudine del sole. La R poi dipende dall'orbita già calcolata.

Se quest'orbita soddisfacesse alla osservazione che si considera, ponendo nella equazione (2) le quantità che da essa si deducono e quelle somministrate dall'osservazione, quelle equazioni sarebbero esattamente soddisfatte; ma se l'orbita non soddisfa all'osservazione, allora i primi membri delle dette equazioni non resulteranno eguali ai secondi membri; e si tratta appunto di fare cambiare gli elementi dell'orbita in modo che quelle equazioni sieno soddisfatte. Chiamando q, c ed e la distanza perielia, il tempo del passaggio al perielio e l'eccentricità, le due coordinate X ed Y saranno funzioni di questi tre elementi; mentre i coseni α, α_1, α_2, β, β_1, β_2 sono funzioni di ω, Ω ed i. Facendo dunque variare tutti e sei gli elementi dell'orbita già trovata si dovranno determinare le loro variazioni dalle equazioni seguenti:

$$(7)\quad \begin{cases} \alpha X+\beta Y+\alpha\left(\frac{dX}{dq}dq+\frac{dX}{dc}dc+\frac{dX}{de}de\right)+\beta\left(\frac{dY}{dq}dq+\frac{dY}{dc}dc+\frac{dY}{de}de\right) \\ \qquad +X\left(\frac{d\alpha}{d\omega}d\omega+\frac{d\alpha}{d\Omega}d\Omega+\frac{d\alpha}{di}di\right)+Y\left(\frac{d\beta}{d\omega}d\omega+\frac{d\beta}{d\Omega}d\Omega+\frac{d\beta}{di}di\right)=lR+\xi \\ \alpha_1 X+\beta_1 Y+\alpha_1\left(\frac{dX}{dq}dq+\frac{dX}{dc}dc+\frac{dX}{de}de\right)+\beta_1\left(\frac{dY}{dq}dq+\frac{dY}{dc}dc+\frac{dY}{de}de\right) \\ \qquad +X\left(\frac{d\alpha_1}{d\omega}d\omega+\frac{d\alpha_1}{d\Omega}d\Omega+\frac{d\alpha_1}{di}di\right)+Y\left(\frac{d\beta_1}{d\omega}d\omega+\frac{d\beta_1}{d\Omega}d\Omega+\frac{d\beta_1}{di}di\right)=mR+\zeta \\ \alpha_2 X+\beta_2 Y+\alpha_2\left(\frac{dX}{dq}dq+\frac{dX}{dc}dc+\frac{dX}{de}de\right)+\beta_2\left(\frac{dY}{dq}dq+\frac{dY}{dc}dc+\frac{dY}{de}de\right) \\ \qquad +X\left(\frac{d\alpha_2}{d\omega}d\omega+\frac{d\alpha_2}{d\Omega}d\Omega+\frac{d\alpha_2}{di}di\right)+Y\left(\frac{d\beta_2}{d\omega}d\omega+\frac{d\beta_2}{d\Omega}d\Omega+\frac{d\beta_2}{di}di\right)=nR\,. \end{cases}$$

Per comodo e simmetria di calcolo sostituiamo alle tre variazioni $d\omega$, $d\Omega$ e di altre tre incognite, che indicheremo con $d\varkappa$, $d\pi$, $d\sigma$, le quali siano legate alle precedenti dalle tre equazioni che appresso [1]:

$$(8)\quad \begin{cases} d\varkappa = \beta d\alpha + \beta_1 d\alpha_1 + \beta_2 d\alpha_2 \\ -d\pi = \alpha d\gamma + \alpha_1 d\gamma_1 + \alpha_2 d\gamma_2 \\ d\sigma = \gamma d\mu + \gamma_1 d\beta_1 + \gamma_2 d\beta_2 \end{cases}$$

nelle quali si ha:

$$(9)\quad \begin{cases} d\alpha=\frac{d\alpha}{d\omega}d\omega+\frac{d\alpha}{d\Omega}d\Omega+\frac{d\alpha}{di}di\,, \quad d\alpha_1=\frac{d\alpha_1}{d\omega}d\omega+\frac{d\alpha_1}{d\Omega}d\Omega+\frac{d\alpha_1}{di}di\,, \quad d\alpha_2=\frac{d\alpha_2}{d\omega}d\omega+\frac{d\alpha_2}{d\Omega}d\Omega+\frac{d\alpha_2}{di}di \\ d\beta=\frac{d\beta}{d\omega}d\omega+\frac{d\beta}{d\Omega}d\Omega+\frac{d\beta}{di}di\,, \quad d\beta_1=\frac{d\beta_1}{d\omega}d\omega+\frac{d\beta_1}{d\Omega}d\Omega+\frac{d\beta_1}{di}di\,, \quad d\beta_2=\frac{d\beta_2}{d\omega}d\omega+\frac{d\beta_2}{d\Omega}d\Omega+\frac{d\beta_2}{di}di \\ d\gamma=\frac{d\gamma}{d\omega}d\omega+\frac{d\gamma}{d\Omega}d\Omega+\frac{d\gamma}{di}di\,, \quad d\gamma_1=\frac{d\gamma_1}{d\omega}d\omega+\frac{d\gamma_1}{d\Omega}d\Omega+\frac{d\gamma_1}{di}di\,, \quad d\gamma_2=\frac{d\gamma_2}{d\omega}d\omega+\frac{d\gamma_2}{d\Omega}d\Omega+\frac{d\gamma_2}{di}di\,. \end{cases}$$

Ma dalle (4) si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{d\omega} &= -\operatorname{sen}\omega\cos\Omega-\cos\omega\operatorname{sen}\Omega\cos i=\beta \\ \frac{d\alpha}{d\Omega} &= -\cos\omega\operatorname{sen}\Omega-\operatorname{sen}\omega\cos\Omega\cos i=-\alpha_1 \\ \frac{d\alpha}{di} &= \operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\Omega\operatorname{sen} i=\gamma\operatorname{sen}\omega \\ \frac{d\alpha_1}{d\omega} &= -\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\Omega+\cos\omega\cos\Omega\cos i=\beta_1 \\ \frac{d\alpha_1}{d\Omega} &= \cos\omega\cos\Omega-\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\Omega\cos i=\alpha \\ \frac{d\alpha_1}{di} &= -\operatorname{sen}\omega\cos\Omega\operatorname{sen} i=\gamma_1\operatorname{sen}\omega \end{aligned}$$

[1] Dalla Meccanica si sa che le tre quantità $d\varkappa$, $d\pi$, $d\sigma$ che soddisfano alle equazioni (8) rappresentano le tre rotazioni istantanee che i tre assi coordinati fanno intorno agli assi stessi.

$$\frac{d\alpha_2}{d\omega} = \cos\omega \operatorname{sen} i = \beta_2$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha_2}{d\Omega} &= 0 \\ \frac{d\alpha_2}{di} &= \operatorname{sen}\omega \cos i = \gamma_2 \operatorname{sen}\omega \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{d\beta}{d\omega} = -\cos\omega\cos\Omega + \operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\Omega\cos i = -\alpha$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\beta}{d\Omega} &= \operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\Omega - \cos\omega\cos\Omega\cos i = -\beta_1 \\ \frac{d\beta}{di} &= \cos\omega\operatorname{sen}\Omega\operatorname{sen} i = \gamma\cos\omega \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{d\beta_1}{d\omega} = -\cos\omega\operatorname{sen}\Omega - \operatorname{sen}\omega\cos\Omega\cos i = -\alpha_1$$

$$\frac{d\beta_1}{d\Omega} = -\operatorname{sen}\omega\cos\Omega - \cos\omega\operatorname{sen}\Omega\cos i = \beta$$

$$\frac{d\beta_1}{di} = -\cos\omega\cos\Omega\operatorname{sen} i = \gamma_1\cos\omega$$

$$\frac{d\beta_2}{d\omega} = -\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen} i = -\alpha$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\beta_2}{d\Omega} &= 0 \\ \frac{d\beta_2}{di} &= \cos\omega\cos i = \gamma_2\cos\omega \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{d\gamma}{d\omega} = 0$$

$$\frac{d\gamma}{d\Omega} = \operatorname{sen} i\cos\Omega = -\gamma_1$$

$$\frac{d\gamma}{di} = \cos i\operatorname{sen}\Omega = \gamma_2\operatorname{sen}\Omega$$

$$\frac{d\gamma_1}{d\omega} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\gamma_1}{d\Omega} &= \operatorname{sen} i\operatorname{sen}\Omega = \gamma \\ \frac{d\gamma_1}{di} &= \cos i\cos\Omega = -\gamma_2\cos\Omega \end{aligned}\right\} \qquad (o)$$

$$\frac{d\gamma_2}{d\omega} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\gamma_2}{d\Omega} &= 0 \\ \frac{d\gamma_2}{di} &= -\operatorname{sen} i\,. \end{aligned}\right\} \qquad (o1)$$

Ma in virtù delle (o) le equazioni (8) si riducono:

$$d\varkappa = \left(\beta\frac{d\alpha}{d\omega} + \beta_1\frac{d\alpha_1}{d\omega} + \beta_2\frac{d\alpha_2}{d\omega}\right)d\omega + \left(\beta\frac{d\alpha}{d\Omega} + \beta_1\frac{d\alpha_1}{d\Omega} + \beta_2\frac{d\alpha_2}{d\Omega}\right)d\Omega + \left(\beta\frac{d\alpha}{di} + \beta_1\frac{d\alpha_1}{di} + \beta_2\frac{d\alpha_2}{di}\right)di\,,$$

$$-d\pi = \left(\alpha\frac{d\gamma}{d\omega} + \alpha_1\frac{d\gamma_1}{d\omega} + \alpha_2\frac{d\gamma_2}{d\omega}\right)d\omega + \left(\alpha\frac{d\gamma}{d\Omega} + \alpha_1\frac{d\gamma_1}{d\Omega} + \alpha_2\frac{d\gamma_2}{d\Omega}\right)d\Omega + \left(\alpha\frac{d\gamma}{di} + \alpha_1\frac{d\gamma_1}{di} + \alpha_2\frac{d\gamma_2}{di}\right)di\,,$$

$$d\sigma = \left(\gamma\frac{d\beta}{d\omega} + \gamma_1\frac{d\beta_1}{d\omega} + \gamma_2\frac{d\beta_2}{d\omega}\right)d\omega + \left(\gamma\frac{d\beta}{d\Omega} + \gamma_1\frac{d\beta_1}{d\Omega} + \gamma_2\frac{d\beta_2}{d\Omega}\right)d\Omega + \left(\gamma\frac{d\beta}{di} + \gamma_1\frac{d\beta_1}{di} + \gamma_2\frac{d\beta_2}{di}\right)di\,.$$

Queste tre equazioni colla sostituzione dei valori di α, α_1, α_2, β, β_1, ec. $\frac{d\alpha}{d\omega}$, $\frac{d\alpha_1}{d\omega}$, $\frac{d\alpha_2}{d\omega}$, $\frac{d\alpha}{d\Omega}$ ec. si trasformano nelle seguenti:

$$d\varkappa = (\beta^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2)\,d\omega + (-\beta\alpha_1 + \beta_1\alpha)\,d\Omega + (\beta\gamma + \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2)\operatorname{sen}\omega\,di\,,$$

$$d\sigma = (-\gamma\alpha - \gamma_1\alpha_1 - \gamma_2\alpha_2)\,d\omega + (-\gamma\beta_1 + \gamma_1\beta)\,d\Omega + (\gamma^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2)\cos\omega\,di\,,$$

$$-d\pi = (-\alpha\gamma_1 + \alpha_1\gamma)\,d\Omega + (\cos i\operatorname{sen}\Omega - \alpha_1\cos i\cos\Omega - \alpha_2\operatorname{sen} i)\,di\,.$$

Ma:

$$\beta^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1\,;\quad \alpha\beta_1 - \beta\alpha_1 = \cos i\,;\quad \beta\gamma + \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 = 0\,,$$

$$\gamma\alpha + \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 = 0\,;\quad \beta\gamma_1 - \gamma\beta_1 = \operatorname{sen} i\operatorname{sen}\omega\,;\quad \gamma^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1\,,$$

$$\gamma\alpha_1 - \alpha\gamma_1 = \operatorname{sen} i\cos\omega\,;\quad \alpha\cos i\operatorname{sen}\Omega - \alpha_1\cos i\cos\Omega - \alpha_2\operatorname{sen} i = -\operatorname{sen}\omega\,,$$

dunque:

$$(9)' \quad \begin{cases} d\varkappa = d\omega + \cos i\, d\Omega \\ d\sigma = \operatorname{sen} i \operatorname{sen} \omega\, d\Omega + \cos \omega\, di \\ d\pi = -\operatorname{sen} i \cos \omega\, d\Omega + \operatorname{sen} \omega\, di \end{cases}$$

dalle quali si ottiene:

$$(10) \quad \begin{cases} d\omega = d\varkappa - \cos i\, d\Omega \\ di = \operatorname{sen} \omega\, d\pi + \cos \omega\, d\sigma \\ d\Omega = \dfrac{\operatorname{sen} \omega\, d\sigma - \cos \omega\, d\pi}{\operatorname{sen} i} \end{cases}$$

Sostituendo questi valori e quelli delle derivate di α nel coefficiente della X nella 1.ª equazione delle (7), quella parentesi si riduce a:

$$(-\operatorname{sen}\omega\cos\Omega - \cos\omega\operatorname{sen}\Omega\cos i)dx - \cos i(-\operatorname{sen}\omega\cos\Omega - \cos\omega\operatorname{sen}\Omega\cos i)\frac{\operatorname{sen}\omega d\sigma - \cos\omega d\sigma}{\operatorname{sen} i}$$

$$+(-(\cos\omega\operatorname{sen}\Omega - \operatorname{sen}\omega\cos\Omega\cos i)\frac{\operatorname{sen}\omega d\sigma - \cos\omega d\sigma}{\operatorname{sen} i} + \operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\Omega\operatorname{sen} i(\operatorname{sen}\omega d\pi + \cos\omega d\sigma)$$

ossia:

$$\beta dx + \frac{d\sigma}{\operatorname{sen} i}\Big\{\cos i\operatorname{sen}^2\omega\cos\Omega + \cos^2 i\operatorname{sen}\omega\cos\omega\operatorname{sen}\Omega - \operatorname{sen}\omega\cos\omega\operatorname{sen}\Omega - \operatorname{sen}^2\omega\cos i\cos\Omega$$

$$+ \operatorname{sen}^2 i \operatorname{sen}\omega\cos\omega\operatorname{sen}\Omega\Big\},$$

$$+\frac{d\pi}{\operatorname{sen} i}\Big\{-\cos i\operatorname{sen}\omega\cos\omega\cos\Omega - \cos^2 i\cos^2\omega\operatorname{sen}\Omega + \cos^2\omega\operatorname{sen}\Omega + \operatorname{sen}\omega\cos\omega\cos i\cos\Omega$$

$$+ \operatorname{sen}^2\omega\operatorname{sen}\Omega\operatorname{sen}^2 i\Big\};$$

ove la 1.ª parentesi va a *zero*, e la 2.ª si riduce a $\operatorname{sen}^2 i \operatorname{sen}\Omega$ ossia a $\operatorname{sen} i \,.\, \gamma$ e quindi i termini in X nella 1.ª delle equazioni (7) saranno:

$$X(\beta\, d\varkappa + \gamma\, d\sigma)$$

Con analoghe sostituzioni e riduzioni per il coefficiente della Y nella detta equazione; si trova che i termini in Y sono:

$$Y(-\alpha\, d\varkappa + \gamma\, d\sigma).$$

E facendo altrettanto per le due altre equazioni (7) si trova che queste, mediante le fatte posizioni, prendono la forma seguente:

$$\alpha X + \beta Y + \alpha\left(\frac{dX}{dq}dq + \frac{dX}{dc}dc + \frac{dX}{de}de - Y\,d\varkappa\right) + \beta\left(\frac{dY}{dq}dq + \frac{dY}{dc}dc + \frac{dY}{de}de + X\,d\varkappa\right)$$
$$+ \gamma X d\pi + \gamma Y d\sigma = lR + \xi,$$

$$\alpha_1 X + \beta_1 Y + \alpha_1\left(\frac{dX}{dq}dq + \frac{dX}{dc}dc + \frac{dX}{de}de - Y\,d\varkappa\right) + \beta_1\left(\frac{dY}{dq}dq + \frac{dY}{dc}dc + \frac{dY}{de}de + X\,d\varkappa\right)$$
$$+ \gamma_1 X d\pi + \gamma_1 Y d\sigma = mR + \zeta,$$

$$\alpha_2 X + \beta_2 Y + \alpha_2\left(\frac{dX}{dq}dq + \frac{dX}{dc}dc + \frac{dX}{de}de - Y\,d\varkappa\right) + \beta_2\left(\frac{dY}{dq}dq + \frac{dY}{dc}dc + \frac{dY}{de}de + X\,d\varkappa\right)$$
$$+ \gamma_2 X d\pi + \gamma_2 Y d\sigma = nR,$$

Moltiplicando successivamente queste equazioni la 1.ª per α, la 2.ª per α_1, la 3.ª per α_2; e poi per β, β_1, β_2, e per γ, γ_1, γ_2 e sommando si ottiene:

$$(11) \quad \begin{cases} \dfrac{dX}{dq}dq + \dfrac{dX}{dc}dc + \dfrac{dX}{de}de - Y\,d\varkappa = \cos A.\,R + \mathbf{X} - X \\ \dfrac{dY}{dq}dq + \dfrac{dY}{dc}dc + \dfrac{dY}{de}de + X\,d\varkappa = \cos B.\,R + \mathbf{Y} - Y \\ X\,d\varkappa + Y\,d\sigma = \cos C.\,R + \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Ove si è posto:

$$(12) \quad \begin{cases} \cos A = \alpha l + \alpha_1 m + \alpha_2 n \\ \cos B = \beta l + \beta_1 m + \beta_2 n \\ \cos C = \gamma l + \gamma_1 m + \gamma_2 n \end{cases}$$

$$(13) \quad \begin{cases} \mathbf{X} = \alpha\xi + \alpha_1\zeta \\ \mathbf{Y} = \beta\xi + \beta_1\zeta \\ \mathbf{Z} = \gamma\xi + \gamma_1\zeta \end{cases}$$

Laonde A, B, C rappresentano gli angoli che la distanza R della cometa dalla terra fa con i tre assi coordinati; cioè coll'asse maggiore dell'orbita, col parametro, e colla perpendicolare al piano dell'orbita. E **X, Y, Z** rappresentano le tre proiezioni della distanza ρ della terra dal sole fatte sopra gli stessi tre assi coordinati.

Ogni osservazione della quale ci serviamo per la correzione dell'orbita condurrà a tre equazioni della forma (11) e quindi risolvendo tutte le equazioni risultanti col metodo dei minimi quadrati, se ne ricaveranno i valori delle *sei* correzioni dq, dc, de, $d\varkappa$, $d\pi$, $d\sigma$; e quindi dalle formule (10) avremo le correzioni $d\omega$, di, $d\Omega$. Applicando poi le correzioni così ottenute, per i *sei* elementi dell' orbita agli elementi dell' orbita dalla quale ci siamo partiti avremo l'*orbita corretta*.

Non ci tratteremo a trovare le espressioni delle derivate delle coordinate X ed Y in funzione dei parametri dell'orbita, perchè quelle espressioni sono facilissime a determinarsi.

NOTA

Ecco le espressioni delle derivate $\frac{dX}{dq}$, $\frac{dX}{dc}$, $\frac{dX}{de}$ ec., quando, partendosi da una parabola, si vuol conoscere, se l' orbita corretta, resta sempre parabolica, o pure è ellittica, od anche iperbolica.

Posto

$$\Omega = \operatorname{tang} \frac{1}{2} \omega$$

$$M = \frac{9}{10} \sqrt{\frac{g}{2\, q^3}} \cdot \frac{1}{1 + \Omega^2} \cdot \Omega^2 (t - c)$$

$$N = -\frac{2}{5} q\, \Omega^4$$

$$M' = \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{\Omega^2} \cdot M$$

$$N' = 1 - \Omega^2$$

$$P = \frac{1}{2} q\, \Omega + \frac{9}{10} q\, \Omega^3$$

$$Q = -\frac{M}{\Omega}$$

$$P' = -\frac{M'}{\Omega}$$

$$Q' = 2\, \Omega$$

si ha

$$\frac{dX}{dq} = M' + N' \qquad \frac{dY}{dq} = P' + Q'$$

$$\frac{dX}{dc} = \frac{20}{9} \cdot \frac{1}{\Omega^2} \cdot \frac{1}{(t-c)} \cdot M \qquad \frac{dY}{dc} = -\frac{dX}{dc} \cdot \frac{1}{\Omega}$$

$$\frac{dX}{de} = M + N \qquad \frac{dY}{de} = P + Q$$

Nelle quali si ha

$$\log \sqrt{g} = 8{,}2355814$$

w anomalia *vera* nell 'orbita, corrispondente al tempo dell' osservazione che si considera.

$(t-c)$ tempo trascorso fra il tempo del passaggio al perielio, e il tempo dell'osservazione che si considera.

Ω e $(t-c)$ devono essere presi negativi per le osservazioni avanti il tempo del passaggio al perielio, e positivi per le osservazioni dopo il passaggio al perielio.

Se la correzione de risulta *zero*, vuol dire che l' orbita corretta è sempre una parabola : se poi la correzione de ha un valore, si intende che quella correzione va fatta alla eccentricità della parabola, cioè ad $e = 1$; e l'orbita corretta sarà una ellisse, od una iperbola secondo che de sarà negativa, o positiva.