JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

OU

RECUEIL MENSUEL

DE MÉMOIRES SUR LES DIVERSES PARTIES DES MATHÉMATIQUES;

Publié

PAR JOSEPH LIOUVILLE,
Membre de l'Académie des Sciences et du Bureau des Longitudes.

TOME XX. — ANNÉE 1855.

PARIS,
MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1855

NOTE

Sur l'intégration des équations différentielles de la Dynamique, présentée au Bureau des Longitudes le 29 juin 1853;

Par M. J. LIOUVILLE.

Dans le Rapport qui précède, sur le Mémoire de M. Edmond Bour, j'ai parlé d'un théorème que j'ai donné il y a deux ans dans mon cours au Collége de France, puis communiqué au Bureau des Longitudes. L'extrait suivant du procès-verbal de la séance du 29 juin 1853, que je dois à l'obligeance du Secrétaire du Bureau, M. Daussy, contient textuellement la Note que j'ai présentée à ce corps savant.

BUREAU DES LONGITUDES.

Paris, le 28 mars 1855.

Le Secrétaire du Bureau des Longitudes certifie que ce qui suit est extrait du procès-verbal de la séance du Bureau du mercredi 29 juin 1853.

« M. Liouville communique la Note ci-jointe sur l'intégration des équations de la
» Dynamique. Il y ajoute verbalement tous les développements nécessaires pour en
» expliquer l'utilité et les applications.

Note sur les équations de la Dynamique; *par* M. J. Liouville.

(Communiquée au Bureau des Longitudes, le mercredi 29 juin 1853.)

» Considérons les équations de la Dynamique, ou plutôt le système plus général
» d'équations différentielles que voici :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dV}{dx'}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dV}{dy'}, \ldots, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{dV}{dz'},$$

$$\frac{dx'}{dt} = -\frac{dV}{dx}, \qquad \frac{dy'}{dt} = -\frac{dV}{dy}, \ldots, \qquad \frac{dz'}{dt} = -\frac{dV}{dz},$$

» V étant une fonction donnée quelconque de t, x, y, ..., x', y', ...; admettons » qu'on ait trouvé la moitié des intégrales de ce système

$$\alpha = \varphi(t, x, y, \ldots, x', y', \ldots),$$
$$\beta = \psi(t, x, y, \ldots, x', y', \ldots),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\gamma = \varpi(t, x, y, \ldots, x', y', \ldots),$$

» et supposons que toutes les quantités (β, α), (γ, β), ..., (α, γ), ..., où nous » prenons

$$(\alpha, \beta) = \frac{d\alpha}{dx'}\cdot\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dx}\cdot\frac{d\beta}{dx'} + \frac{d\alpha}{dy'}\cdot\frac{d\beta}{dy} - \frac{d\alpha}{dy}\cdot\frac{d\beta}{dy'} + \ldots$$
$$+ \frac{d\alpha}{dz'}\cdot\frac{d\beta}{dz} - \frac{d\alpha}{dz}\cdot\frac{d\beta}{dz'},$$

» soient égales à zéro. Je dis que si, cela étant, les équations intégrales trouvées peu- » vent fournir les valeurs de x', y', ..., z', en t, x, y, ..., z, la quantité

$$x'dx + y'dy + \ldots + z'dz - \mathrm{V}\,dt$$

» sera une différentielle exacte par rapport à x, y, ..., z, t. Soit $d\mathrm{S}$ cette différen- » tielle; S contiendra les constantes α, β, ..., γ; et le système complet des inté- » grales de nos équations différentielles sera

$$\frac{d\mathrm{S}}{dx} = x', \quad \frac{d\mathrm{S}}{dy} = y', \ldots, \quad \frac{d\mathrm{S}}{dz} = z',$$
$$\frac{d\mathrm{S}}{d\alpha} = -\alpha', \quad \frac{d\mathrm{S}}{d\beta} = -\beta', \ldots, \quad \frac{d\mathrm{S}}{d\gamma} = -\gamma',$$

» α', β', ..., γ', étant de nouvelles constantes arbitraires.

» Il n'y aura à cet énoncé qu'un très-léger changement à faire si les intégrales don- » nées $\alpha = \varphi$, $\beta = \psi$, ..., $\gamma = \varpi$, au lieu de fournir x', y', ..., z', fournissaient » les valeurs d'une moitié quelconque des quantités x, y, ..., z, x', y', ..., z', » en fonction de t et des autres, pourvu que dans cette moitié il n'y ait que des lettres » de nom différent comme x', y', ..., z. J'ai donné de longs développements sur » toutes ces questions dans mes leçons au Collége de France.

» Le 29 juin 1853.

» *Signé* J. LIOUVILLE. »

P. DAUSSY.