COMPTE RENDU

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 18 JUILLET 1836.

VICE-PRÉSIDENTE DE M. MAGENDIE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS
DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Lettre de M. JACOBI.*

« Parmi les vérités nouvelles dont les mathématiques se sont enrichies de temps en temps, il y en a auxquelles on n'a pu parvenir qu'en surmontant de grandes difficultés, et dont la découverte paraît être réservée aux esprits supérieurs qui président au développement de la science. Il y en a d'autres dont la découverte n'a pas le mérite des difficultés vaincues, mais qui étant à la portée de tout le monde dès qu'elles ont été une fois trouvées, se sont soustraites pendant long-temps aux soins des savants, je ne sais par quel accident, peut-être même à cause de leur facilité. Dans une lettre antérieure j'ai communiqué à l'illustre Académie, en profitant du titre de son correspondant, un exemple de cette seconde espèce, découverte curieuse et qui précisément dans le même temps a été jugée impossible dans les Transactions philosophiques par l'illustre Ivory. Permettez-moi, Monsieur, d'ajouter à cet exemple les suivants.

» Considérons le mouvement libre d'un point dans un plan et dans le

cas de la conservation des forces vives. On a dans ce cas les équations différentielles,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dU}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dU}{dy},$$

et le principe des forces vives conservées s'exprime par l'équation,

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] = U + h,$$

U étant une fonction quelconque de x et de y , et h étant une constante arbitraire. Lagrange a donné cette forme aux équations différentielles du mouvement dans le cas des forces centrales ou parallèles et constantes. Mais la même forme offre généralement des facilités pour l'intégration, qui n'ont pas encore été remarquées.

» Supposons, comme une seconde intégrale des équations différentielles proposées, $F\left(x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = a$, a étant une nouvelle constante arbitraire; au moyen de cette équation et de celle des forces vives on pourra exprimer les valeurs des différentielles $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ par x et y et par les deux constantes arbitraires a et h . Soient $\frac{dx}{dt} = x'$, $\frac{dy}{dt} = y'$ ces valeurs; on prouve aisément les propositions suivantes:

» 1°. L'expression $x'dx + y'dy$ est une différentielle exacte; donc aussi ses différentielles prises par rapport aux constantes arbitraires a et h , seront des différentielles exactes;

» 2°. Les expressions

$$\frac{dx'}{da} dx + \frac{dy'}{da} dy, \quad \frac{dx'}{dh} dx + \frac{dy'}{dh} dy,$$

étant des différentielles exactes, on aura l'équation de l'orbite cherchée et l'expression du temps au moyen des équations,

$$b = \int \left(\frac{dx'}{da} dx + \frac{dy'}{da} dy \right),$$

$$t + \tau = \int \left(\frac{dx'}{dh} dx + \frac{dy'}{dh} dy \right),$$

dans lesquelles b et τ sont deux nouvelles constantes arbitraires.

» Une seconde remarque, que j'ajouterai, se rapporte à la théorie analytique du système solaire. Considérons le mouvement d'un point sans masse tournant autour du Soleil et troublé par une planète dont l'orbite

est supposée circulaire. Soient x, y, z , les coordonnées rectangulaires du point, en prenant le plan de l'orbite de la planète pour celui des x et y , et le Soleil pour centre des coordonnées; soit a , la distance de la planète troublante au Soleil, $n't$ son anomalie, m' sa masse, M la masse du Soleil, on aura l'équation rigoureuse:

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] - n' \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) =$$

$$\frac{M}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} + m' \left\{ \frac{1}{[x^2 + y^2 + z^2 - 2a(x \cos n't + y \sin n't) + a^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{x \cos n't + y \sin n't}{a^2} \right\} + \text{const.}$$

» C'est donc une nouvelle équation intégrale, qui dans le problème des trois corps subsistera entre les termes indépendants de l'excentricité de la planète troublante, et qui est rigoureuse pour toutes les puissances de la masse de cette dernière. Dans la théorie de la Lune il faut mettre la Terre au lieu du Soleil et prendre celui-ci pour le corps troublant. »