Insegnamento di Calcolo , a.a. 2011-12
Test finale primo modulo, 4 settembre 2012

*In questi esercizi, indichiamo con m il numero del mese di nascita del candidato (da 1 a 12). Scrivere le risposte su questi stessi fogli, separatamente per ogni domanda. Scrivere il nome e cognome **dove richiesto**.*

Candidato:

(1) Mostrare che l'equazione

$$x \sin x + \cos x = 1$$

ha esattamente una radice in ciascuno degli intervalli $[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi]$.
Suggerimento: per semplicità, si usi il fatto che $h(x) = x \sin x + \cos x$ è una funzione pari. Si mostri che h è monotona in $[0, \frac{\pi}{2} + k\pi]$ e in $[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi]$ per $k \geq 1$. Si usi il teorema dei valori intermedi per concludere la dimostrazione. (8 punti)

Candidato:

(2) Studiare qualitativamente la funzione

$$f(x) = \frac{x - \sin x}{\cos x}$$

determinando dominio di definizione e asintoti verticali, e tracciarne il grafico, localizzando qualitativamente ed approssimativamente i punti di massimo e minimo. Si dimostri che questa funzione ha uno ed un solo punto di massimo oppure uno ed un solo punto di minimo in ciascuno degli intervalli $[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$. Per quali k si hanno i massimi e per quali i minimi?

Suggerimento: per l'ultima domanda si usi il risultato del problema precedente. Verrà attribuito punteggio parziale a chi risolverà il problema solo per $k = 0$. (10 punti)

Candidato:

- (3) Trovare l'ordine di infinitesimo per $x \rightarrow 0$ della funzione

$$e^{e^{mx}-1} - 1,$$

senza calcolare derivate, ma solo usando il ben noto sviluppo di McLaurin della funzione esponenziale. È cruciale che si tenga traccia degli ordini degli infinitesimi che vengono via via trascurati: altrimenti non verrà attribuito punteggio. (7 punti)

Candidato:

- (4) Trovare quale è il grado di un opportuno sviluppo di Taylor che permetta di calcolare $\sqrt{35}$ con un errore inferiore a 10^{-2} (specificare la funzione da sviluppare, e scegliere il centro di sviluppo che risolve il problema con il grado più basso). Si noti che non viene richiesto il valore approssimato di $\sqrt{35}$, ma solo il grado del polinomio di Taylor. *(9 punti)*

Candidato:

(5) Determinare se converge la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + \sin \frac{1}{n}}{n - \sin \frac{1}{n}}.$$

(6 punti)