Insegnamento di Calcolo , a.a. 2009-10
Test finale primo modulo, 5 febbraio 2010

Candidato:
Data di nascita:

In questi esercizi, indichiamo con m il numero del mese di nascita del candidato (da 1 a 12).

(1) Sia

$$f(x) = m \sin(|x|^x)$$

se $x \neq 0$. La funzione f è estendibile in maniera continua a $x = 0$? Una volta estesa (se possibile), in quali punti questa funzione è derivabile? Studiarne qualitativamente il grafico, trovando indicativamente i punti di massimo e minimo locale (calcolare esattamente solo quelli per cui è possibile farlo, ma questi calcolarli tutti). *(9 punti)*

(2) Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$. Si consideri la funzione

$$f(x) = f_{a,b,c}(x) := \begin{cases} b(x-c)^2 & \text{se } x < a \\ 2m\sqrt{x} & \text{se } x \geqslant a \end{cases}$$

Trovare, se esistono, valori di a, b e c per i quali la funzione f è continua e derivabile ovunque, oppure dimostrare che non esistono. *(8 punti)*

(3) Trovare il polinomio di Taylor di grado 3 con centro in 0 di $e^{(e^{mx}-1)}$. *(6 punti)*

(4) Trovare quale è il grado di un opportuno sviluppo di Taylor che permetta di calcolare $\sqrt[3]{1001}$ con un errore inferiore a 10^{-3} (specificare la funzione da sviluppare, e scegliere il centro di sviluppo che risolve il problema con il grado più basso). Si noti che non viene richiesto il valore approssimato di $\sqrt[3]{1001}$, ma solo il grado del polinomio di Taylor. *(9 punti)*

(5) La restrizione della funzione $h(x) = \sqrt{x}$ all'intervallo $I = (0, 1)$ è uniformemente continua in I? È lipschitziana in I? Spiegare le risposte. *(6 punti)*

(6) Determinare se convergono le serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

e

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n^2)}$$

motivando le risposte (si citino esplicitamente i criteri di convergenza utilizzati). *(7 punti)*