

Insegnamento di Calcolo, a.a. 2009-10 (per STM)
Test finale, 20 settembre 2010

Candidato:

Sia m il numero del mese di nascita del candidato (da 1 a 12)

1. Studiare e disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{\ln |(x - 2m)(x - 1)|}{x - 1}$$

trovando gli eventuali asintoti verticali, orizzontali ed obliqui, ed indicando in che zone si trovano i punti di massimo e minimo (calcolandoli esattamente solo se possibile).

Dal grafico precedente dedurre l'andamento del grafico della funzione composta $\cos(f(x))$. (7 punti)

2. Trovare gli asintoti di

$$g(x) = \sqrt{1 + \ln(1 + e^{mx})^2}$$

(4 punti)

3. Sia $h(x) \sim x^m$ per $x \rightarrow 0$ (ossia, esiste finito e non nullo il limite per $x \rightarrow 0$ di $h(x)/x^m$). Quale è l'ordine di infinitesimo di

$$\sin(1 - \cos(h(x)))$$

per $x \rightarrow 0$?

(5 punti)

4. Determinare per quali $\alpha > 0$ converge la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{n \sin(\frac{1}{n})^\alpha}.$$

(5 punti)

5. Calcolare

$$\int \frac{4x}{x^2 - 6x + 8} dx.$$

(5 punti)

6. Consideriamo la funzione di due variabili reali

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin^7(x^2 + |y|^3)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Dire se f è continua e/o differenziabile in $(0, 0)$. (6 punti)

7. Consideriamo la funzione di due variabili reali

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x + 2y + 9.$$

Determinare tutti i punti critici di f e stabilire se si tratta di massimi/minimi locali o punti di sella. (5 punti)

8. Discutere la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni di variabile reale

$$f_n(x) = e^{-n^2|x|} \sin x.$$

(Suggerimento: Per la convergenza uniforme occorre stimare il valore massimo di $|f_n - f|$, dove f è la funzione limite puntuale. Il punto dove f_n ha il suo massimo si può trovare cercando gli zeri della derivata - ma poi, per stimare il valore massimo, occorre un (facile) sviluppo di Taylor. Una alternativa più semplice per stimare il valore massimo di $|f_n|$ è di stimare separatamente il massimo di $|f_n|$ nei due domini seguenti: nell'intervallo $I_n := \{x : -1/n^2 \leq x \leq 1/n^2\}$ ed in $\mathbb{R} \setminus I_n \equiv \{x : |x| > 1/n\}$. In ciascuno di questi due domini il valore massimo si stima immediatamente grazie alla espressione della funzione ed a considerazioni di monotonia.) (8 punti)

Ogni asserzione o calcolo deve essere sufficientemente giustificata, pena la nullità della corrispondente parte dell'esercizio
La somma dei punteggi supera 30, ma il voto massimo attribuito è comunque 30.