Insegnamento di Calcolo mod.1 STM, a.a. 2010-11, e
Analisi Matematica 1 SMC
Test finale, 3 febbraio 2011

Candidato:

Data di nascita:

In questi esercizi, indichiamo con m il numero del mese di nascita del candidato (da 1 a 12).
Scrivere il proprio nome e cognome e data di nascita ***dove indicato*** *e riportare nome e cognome sulla prima pagina di tutti i fogli. Consegnare* ***anche la presente pagina*** *degli enunciati.*
Gli studenti che debbono affrontare il test integrativo per il riconoscimento di Calcolo 1 STM da altro Corso di Laurea svolgono solo gli ultimi due problemi.

(1) Studiare la funzione

$$g(x) = \arctan \left| \frac{1 - \ln(mx)}{1 + \ln(mx)} \right|$$

determinandone dominio di definizione, ed ove possibile intervalli di monotonia e di convessità, eventuali massimi e minimi locali, asintoti, punti angolosi e/o cuspidi), e tracciarne il grafico. *(13 punti)*

(2) (*i*) Usando solo i limiti notevoli ed i teoremi sui limiti di polinomi, logaritmi ed esponenziali, calcolare

$$\lim_{t \to -\infty} mt \left(e^{(e^{mt})} - 1 \right) = 0\,.$$

(*ii*) Facendo uso della parte precedente, mostrare che

$$\lim_{x \to 1^+} (x-1) \ln(\ln x) = 0\,.$$

(7 punti; 0 se si usa il teorema di Hospital)

(3) Utilizzando gli sviluppi di Taylor, calcolare

$$\lim_{x \to m^+} \frac{1}{\ln(x-m)} \left(\frac{1}{x-m} - \frac{1}{\arctan(x-m)} \right) .$$

(10 punti; 0 se non sono usati gli sviluppi di Taylor)

(4) (*i*) Per quali $a > 0$ la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^m}{a^n}$$

risulta convergente?

(*ii*) Per quali $z \in \mathbb{C}$ la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^m}{z^n}$$

risulta convergente?

Motivare le risposte. *(6 punti)*