

Insegnamento di Calcolo mod.1, a.a. 2010-11
Test n.3, 28 gennaio 2011

Candidato:

Data di nascita:

In questi esercizi, indichiamo con m il numero del mese di nascita del candidato (da 1 a 12).

(1) (a) Sia

$$f(x) = \frac{(\arctan^2 x - 2x^2 + e^{-x^2} - 1) \sin \frac{1}{x}}{x^m - e^{-\frac{1}{x}}}.$$

Utilizzando gli sviluppi di Taylor, determinare l'ordine di infinitesimo o infinito di f per $x \rightarrow 0^+$ (ossia trovare se esiste β tale che $f(x) \sim x^\beta$ per $x \rightarrow 0^+$, ed in tal caso trovare il valore di β).

(b) Poniamo ora, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$f_\alpha(x) = \frac{(\arctan^2 x - \alpha x^2 + e^{-x^2} - 1) \sin \frac{1}{x}}{x^m - e^{-\frac{1}{x}}}.$$

Come cambia la risposta precedente al variare di $\alpha \neq 2$?

(8 punti)

(2) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$x^3 + mx = \arctan x$$

(5 punti)

(3) Studiare la funzione

$$g(x) = x e^{-\frac{1}{(x-1)^m}}$$

determinandone dominio di definizione, intervalli di monotonia e di convessità, eventuali massimi e minimi locali, asintoti,

punti angolosi e/o cuspidi), e tracciarne il grafico. *(10 punti)*

- (4) Grazie alla stima del resto di Taylor in forma di Lagrange per la funzione $f(x) = 2\sqrt{1+x}$ sviluppata con centro in 0, si possono trovare stime per eccesso dell'errore $|E_0(1/5)| = |\sqrt{5}-2|$ e $|E_1(1/5)| = |\sqrt{5}-2-f'(0)1/5|$. Trovare il segno di $E_0(1/5)$ ed $E_1(1/5)$ ed i valori numerici delle stime per eccesso di $|E_0(1/5)|$ e $|E_1(1/5)|$. *(12 punti)*