Insegnamento di Calcolo mod.1, a.a. 2009-10
Test n.2, 8 gennaio 2010

Candidato:
Data di nascita:

In questi esercizi, indichiamo con m *il numero del mese di nascita del candidato (da 1 a 12).*

(1) (*i*) Mostrare che la serie

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 - m}}$$

diverge.

(*ii*) Mostrare che la serie a segni alterni

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 - m}}$$

converge *(suggerimento: usare il teorema di Leibnitz; occorre però verificare che le condizioni di questo teorema siano soddisfatte).*

(8 punti)

(2) (*i*) Per la serie dell'ultima parte del problema precedente,

$$S = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 - m}}$$

chiamiamo s_k la somma parziale

$$s_k = \sum_{n=m+1}^{k} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 - m}} \ .$$

Come si maggiora $|S - s_k|$ in base al teorema di Leibnitz?

(*ii*) Qual è il più piccolo valore di k tale che $|S - s_k| < 1/100$?

(11 punti)

(3) Trovare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ per i quali converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n + \frac{m}{n}} \,.$$

(8 punti)

(4) (i) L'equazione

$$e^x = e^{-x^2} \tag{1}$$

ha la radice $x_+ = 0$. Dimostrare che c'è un'altra radice $x_- < 0$.

(Suggerimento: trasformare il problema in una equazione che riguarda la funzione $x + x^2$.)

(ii) Mostrare che

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x^2}}{e^x} = 0$$

e come conseguenza provare che esistono valori $x < 0$ tali che $e^{-x^2} < e^x$.

(iii) Ridimostrare l'esistenza di una radice $x_- < 0$ dell'equazione (1) utilizzando la parte (ii) di questo problema. *(Suggerimento: usare appropriatamente il teorema dei valori intermedi.)*

(iv) Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'equazione

$$e^x = \alpha e^{-x^2}$$

ammette soluzioni reali?

(Suggerimento: come nella parte (i), trasformare il problema in una questione che riguarda i valori della funzione $x - \ln \alpha + x^2$.)

(15 punti)