Insegnamento di Calcolo mod.1, a.a. 2009-10
Test n.1, 11 dicembre 2009

Candidato:
Data di nascita:

In questi esercizi, indichiamo con m il numero del mese di nascita del candidato (da 1 a 12).

(1) (*i*) Mostrare che

$$\frac{1}{1-mx} - 1 \sim x$$

(ossia che $\frac{1}{1-mx}$ è infinitesimo *dello stesso ordine di* x) per $x \to 0$.

(*ii*) Mostrare che

$$\frac{1}{1-mx} - 1 - mx \sim x^2$$

per $x \to 0$.

(6 punti)

(2) (*i*) Calcolare il limite di

$$\frac{\sqrt{1-mx}-1}{x}$$

per $x \to 0$.

(*ii*) Mostrare che

$$\sqrt{1-mx} - 1 \approx -\frac{mx}{2}$$

(ossia che il rapporto dei membri sinistro e destro tende a 1) per $x \to 0$. *(Suggerimento: moltiplicare numeratore e denominatore di 2.(i) per $\sqrt{1-mx}+1$).*

(*iii*) Combinare gli enunciati degli esercizi 2.(*ii*) e 1.(*i*) per mostrare che

$$\sqrt{1-mx} = 1 - \frac{mx}{2} - \frac{m^2x^2}{8} + o(x^2)$$

per $x \to 0$. *(Suggerimento: manipolare* $\sqrt{1-mx} - 1 + \frac{mx}{2} = \sqrt{1-mx} - (1 + -\frac{mx}{2})$ *in maniera analoga al punto precedente.*

(10 punti)

(3) (i) Usare il limite notevole (dato per noto)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \tag{1}$$

per calcolare il limite di

$$\frac{e^y - 1}{y} \tag{2}$$

per $y \to 0$. *(Suggerimento: rammentiamo che questo esempio è incluso nel libro di testo, ed è risolto in base alla sostituzione* $y = \ln(1+x)$*. È indispensabile spiegare in base a quale teorema questa sostituzione permette di ricondurre il limite (2) a (1).)*

(ii) Da (i) e dal limite notevole $\lim_{y \to 0^+} y \ln y = 0$ (dato per noto), dedurre (con un'altra opportuna sostituzione) che

$$\lim_{t \to -\infty} t \left(e^{(e^t)} - 1 \right) = 0\,.$$

(iii) Da (ii) dedurre che

$$\lim_{x \to 1^+} (x-1) \ln(\ln x) = 0\,.$$

(9 punti)

(4) (i) Calcolare gli (eventuali) asintoti della funzione

$$f(x) = \sqrt{m + x^2}$$

per $x \to \pm\infty$.

(ii) La funzione

$$g(x) = \sqrt{m + x^{m+2}}$$

ha asintoti per $x \to +\infty$, e se sì quali?

(8 punti)

(5) (*i*) Calcolare l'ordine di infinitesimo rispetto a $1/n$, per $n \to +\infty$, di
$$\frac{1}{\sqrt[4]{n^2-1}}\,.$$
(*ii*) Trovare per quali $\alpha > 0$ converge la serie
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}\ \frac{1}{\sqrt[4]{n^2-1}}\,.$$
(Suggerimento: usare il teorema del confronto asintotico.)

(*ii*) Trovare per quali $\beta > 0$ converge la serie
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,\ln^\beta(n)}\ \frac{1}{\sqrt[4]{n^2-1}}\,.$$
(12 punti)

(6) Per quali $a > 0$ la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a^n}$$
risulta convergente? Motivare la risposta. *(5 punti)*