Esercizi di richiamo in previsione degli esami di Analisi di Fourier e Metodi Num. per la Grafica

Esercizi di richiamo sul corso di Calcolo

1. (a) Calcolare la primitiva di $\frac{1}{1+s^2}$.
   (b) Calcolare la primitiva di $\frac{s}{1+s^2}$.
   (c) Calcolare la primitiva di $\frac{s^2}{1+s^2}$.
   Suggerimento: si integri per parti.
   (d) Calcolare la primitiva di $\frac{1}{(1+s^2)^2}$.
   Suggerimento: si osservi che

$$\frac{1}{(1+s^2)^2} + \frac{s^2}{(1+s^2)^2} = \frac{1}{1+s^2}$$

   e quindi

$$\int \frac{ds}{(1+s^2)^2} = \int \frac{ds}{1+s^2} + \int \frac{s^2\,ds}{(1+s^2)^2} \,.$$

2. (a) Calcolare l'area della sezione dell'iperboloide $z = xy$ nel dominio $\{x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.
   (b) Calcolare l'area della sezione dell'iperboloide $z = x^2 - y^2$ nel dominio $\{x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

Esercizi di richiamo combinati sui corso di Calcolo 2 ed Analisi di Fourier 1

1. Sia $f_n(x) = 1/(1 + x^2)$.
   (a) La successione $s_n(x) = f_n(x - n)/(n^2)$ è uniformemente convergente sui compatti? E su tutto $\mathbb{R}$?
   (b) La successione $h_n(x) = f_n(x - n)/n$ è uniformemente convergente sui compatti? E su tutto $\mathbb{R}$?
   (c) La successione $g_n(x) = f_n(x - n)$ è uniformemente convergente sui compatti? E su tutto $\mathbb{R}$?

Esercizi di richiamo sul corso di Geometria

1. Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ un sistema di n vettori in $\mathbb{R}^n$. Se per ogni coppia di indici $i \neq j \quad (i, j = 1, \ldots, n)$ i vettori v_i e v_j sono linearmente indipendenti, allora $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è un sistema di vettori linearmente indipendenti? Se sì dimostrarlo, se no costruire un controesempio.

2. Sia A la matrice con coefficienti $a_{ij} = 0$ per ogni $i, j = 1, 2, 3$. Esiste una base di autovettori in cui A è diagonale? Se sì trovare una tale base, se no spiegare perché.

3. Per $i, j = 1, 2, 3$ e $t \in \mathbb{R}$, sia $B(t)$ la matrice tridimensionale i cui coefficienti sono $b_{ij} = 1$ se $i = j$, $b_{12} = \sin t$, $b_{23} = \cos t$, e $b_{ij} = 0$ altrimenti. Per quali valori di t esiste una base composta di autovettori di $B(t)$, e per quali non esiste? Spiegare esaurientemente.

4. Per quali $t \in \mathbb{R}$ ha senso la proiezione centrale con centro $(-t, 0, 0)$ e piano di proiezione $x + y + z = t$? Per ciascun tale valore di t scrivere la matrice di proiezione e trovare il punto di fuga del fascio di rette parallele a $(1, -1, 0)$.