Università di Roma Tor Vergata

Corso di Laurea in

Scienze e Tecnologie per i Media

Definizione di funzione continua e funzioni continue ed invertibili sui compatti

Massimo A. Picardello

CAPITOLO 1

Funzioni continue

Rammentiamo la definizione di continuità ad un punto:

Definizione 1. *Sia* $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$ *e* $x_0 \in D_f$ *un punto di accumulazione. La funzione* f *è continua in* x_0 *se* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$*, ossia se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\delta > 0$ *tale che*

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

(si osservi che la condizione $x \neq x_0$*, che dobbiamo imporre per il calcolo del limite, qui non serve perch'e, per* $x = x_0$*, certamente* $|f(x) - f(x_0) = 0 < \varepsilon$*). In altre parole, la continuità di* f *al punto* x_0 *equivale alla proprietà che, per ogni* $\varepsilon > 0$*, esista* $\delta > 0$ *tale che l'immagine sotto* f *dell'intervallo aperto* $B_\delta(x_0) := (x_0 - \delta,\, x_0 + \delta)$ *è contenuta nell'intervallo aperto* $B_\varepsilon(f(x_0)) := (f(x_0) - \varepsilon,\, f(x_0) + \varepsilon)$*.*
In altre parole, l'insieme dei punti che la funzione f manda nell'intervallo $B_\varepsilon(f(x_0)$ è un intorno aperto di x_0.

Consideriamo ora una funzione f continua in tutto il suo dominio di definizione D: questo significa che f è continua ad ogni punto di D che sia di accumulazione per D. L'ultima formulazione nella definizione precedente equivale a dire:

Corollario 2. *Sia* V *un sottoinsieme aperto dell'immagine di* f*: ovvero, per ogni* $y = f(x) \in \mathrm{Imm}(f)$*,* V *contiene un qualche intervallo* $B(y)$ *centrato in* y*. Allora* f *è continua ovunque se e solo se, per ogni* x *che* f *manda in* V*, esiste un intervallo aperto con centro* x *che* f *manda ancora in* V*.*

Riformuliamo questo concetto mediante la seguente terminologia: Dato un insieme V nell'immagine di f, si chiama *controimmagine* di V, e si indica con $f^{-1}(V)$, l'insieme

$$f^{-1}(V) = \{x \in D_f :\, f(x) \in V\}\,.$$

Si noti che il simbolo $f^{-1}(V)$ ha senso anche quando non esiste la funzione inversa di f: ma se essa esiste, allora $f^{-1}(V)$ coincide con l'immagine di V sotto la funzione inversa f^{-1}.
Con questa terminologia il precedente Corollario diventa:

Proposizione 3. *Una funzione $f : D \mapsto U$ è continua se e solo se la controimmagine $f^{-1}(V)$ di ogni aperto $V \subset U$ è un aperto in D.*

Ma allora,

Corollario 4. *Se f è una funzione invertibile, essa è continua se e solo se la sua funzione inversa f^{-1} manda aperti in aperti.*

CAPITOLO 2

Funzioni continue ed invertibili sui compatti

Rammentiamo i fatti seguenti:

Proposizione 5. (*i*) *Un insieme K si dice sequenzialmente compatto se ogni successione a valori in K ammette una sottosuccessione convergente ad un punto di K.*
Un insieme si dice compatto se da ogni famiglia di aperti la cui unione contiene K si può estrarre una sottofamiglia finita la cui unione contiene ancora K.

(*ii*) *In uno spazio metrico (ad esempio $\mathbb{R}$), ogni insieme compatto è sequenzialmente compatto, e viceversa.*

(*iii*) *In uno spazio metrico (ad esempio $\mathbb{R}$), gli insiemi compatti sono tutti e soli gli insiemi limitati e chiusi.*

(*iv*) *In uno spazio metrico (ad esempio $\mathbb{R}$), un sottoinsieme chiuso di un insieme compatto è anch'esso compatto (nota: questo fatto vale più in generale, non solo su spazi metrici, ma la dimostrazione che stiamo per dare vale solo per spazi metrici).*
Dimostrazione: se $U \subset K$ e K è compatto, allora K è limitato e quindi lo è anche U. Ma allora se U è anche chiuso, esso è un insieme limitato e chiuso e quindi compatto.

(*v*) *L'immagine di un compatto sotto una funzione continua è compatta (questo fatto è un importante che abbiamo dimostrato a suo tempo per spazi metrici).*

Concludiamo con un fatto imprtante: una funzione continua e invertibile su un compatto ha inversa continua. Più dettagliatamente:

Teorema 6. *Sia K un compatto in uno spazio metrico (quindi un insieme limitato e chiuso) e $f : K \mapsto U$ una funzione continua e biunivoca da K ad uno spazio metrico U. Allora la funzione inversa $f^{-1} : U \mapsto K$ è continua.*

Dimostrazione. . Grazie al Corollario 4, si tratta di dimostrare che f manda aperti di K in aperti di U. Allora, sia $V \subset K$ un qualsiasi aperto in K e mostriamo che $f(V)$ è aperto in U, ossia che il suo complementare $\complement\{f(V)\}$ è chiuso in U.

Ma poiché f è biunivoca, il complementare di $f(V)$ è l'immagine sotto f del complementare di V, ossia $\complement\{f(V)\} = f(\complement V)$: infatti, se un punto non sta nell'immagine di V, allora deve essere immagine di qualche punto fuori di V, e viceversa.
Quindi occorre dimostrare che $f(\complement V)$ è chiuso in U. D'altra parte, V è aperto, e quindi $\complement V$ è chiuso in K: ma allora è compatto, in base alla parte (iv) della precedente Proposizione. Ma allora, visto che f è continua, dalla parte (v) della stessa Proposizione segue che $f(\complement V)$ è compatto in U, quindi chiuso, per la parte (iii) della stessa Proposizione.

$\square$