**Università di Roma Tor Vergata**

**Corso di Laurea in**

***Scienze e Tecnologie per i Media***

# Funzioni convesse in una variabile

Massimo A. Picardello

CAPITOLO 1

# Funzioni convesse

DEFINIZIONE 1.0.1. **(Convessità)** *Una funzione $\phi$ definita su un intervallo aperto $(a,b)$ è convessa se per ogni $\alpha$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, e per ogni $x, y$ in $(a,b)$ vale la disuguaglianza*

$$\phi(\alpha x + (1-\alpha)y) \leqslant \alpha\phi(x) + (1-\alpha)\phi(y)$$

NOTA 1.0.2. Geometricamente, la proprietà di convessità si esprime dicendo che la corda che unisce ogni coppia di punti del grafico di $\phi$ in $(a,b)$ (di ascisse, diciamo, $x$ e $y$) sta al di sopra del grafico di $\phi$ in $(x,y)$. La proprietà opposta si chiama *concavità*. Le funzioni lineari sono simultaneamente concave e convesse, e sono le uniche funzioni con questa proprietà. □

DEFINIZIONE 1.0.3. *Dati due intervalli $(x,y)$ e $(x',y')$ in $\mathbb{R}$, diciamo che il secondo comincia a destra del primo se $x \leqslant x'$, e finisce a destra del primo se $y \leqslant y'$.*

Con questa notazione si ha:

LEMMA 1.0.4. *Se $\phi$ è convessa in $(a,b)$ e $x$,$y$, $x'$, $y' \in (a,b)$ sono tali che $x < y$, $x' < y'$ e l'intervallo $I_+ \equiv (x',y')$ comincia a destra e finisce a destra di $I_- \equiv (x,y)$, allora la pendenza della corda sottesa dai punti estremi del grafico di $\phi$ in $I_-$ è non superiore a quella della corda sottesa da $\phi$ in $I_+$ (Figura 1):*

$$\frac{\phi(y)-\phi(x)}{y-x} \leqslant \frac{\phi(y')-\phi(x')}{y'-x'}\,.$$

*Dimostrazione.* Per comodità consideriamo solo il caso in cui i quattro punti sono distinti: il caso generale si dimostra allo stesso modo (le disuguaglianza possono essere uguaglianze).

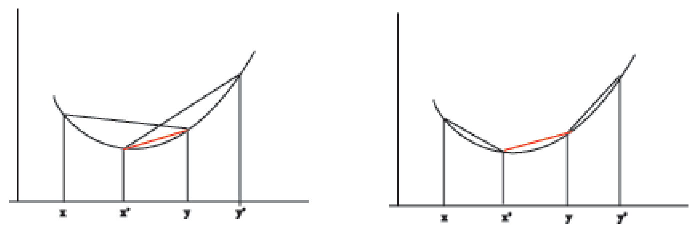


FIGURA 1. La pendenza della corda dell'intervallo di destra è maggiore di quello di sinistra

Supponiamo dapprima che i due intervalli si intersechino, cioè che si abbia $x < x' < y < y'$. In tal caso, in conseguenza della interpretazione geometrica della convessità enunciata nella Nota 1.0.2, il punto $(x', \phi(x'))$ del grafico di $\phi$ sta al di sotto (o meglio, non strettamente al di sopra) della corda che congiunge i punti $(x, \phi(x))$ e $(y, \phi(y))$, e quindi della retta che contiene tale corda. Viceversa il punto $(y', \phi(y'))$ sta al di sopra di tale retta, perché altrimenti la corda da $(x', \phi(x'))$ a $(y', \phi(y'))$ passerebbe al di sopra del punto $(y, \phi(y))$. Questi fatti equivalgono all'enunciato in questo caso.

Se invece $x < y < x' < y'$, allora il punto $(y, \phi(y))$ sta al di sotto (cioè non al di sopra) della retta che congiunge i punti $(x, \phi(x))$ e $(x', \phi(x')$, e quindi la pendenza della corda fra $(x, \phi(x))$ e $(y, \phi(y))$ è non superiore a quella della corda fra $(x, \phi(x))$ e $(x', \phi(x')$. D'altra parte, per lo stesso ragionamento, tale pendenza è non superiore a quella della corda sottesa da $(y, \phi(y))$ e $(x', \phi(x')$, la quale a sua volta è non superiore alla pendenza della corda fra $(y, \phi(y))$ e $(y', \phi(y')$, che infine è non superiore a quella della corda fra $(x', \phi(x'))$ e $(y', \phi(y'))$. Questo completa la dimostrazione. $\square$

DEFINIZIONE 1.0.5. *Siano $\phi$ convessa in $(a, b)$ e $x_0 \in (a, b)$ un punto in cui esistono finite le derivate destra e sinistra di $\phi$. Consideriamo una retta generica che tocca il grafico di $\phi$ in $x_0 \in (a, b)$ (ossia di equazione $y = \phi(x_0) + m(x - x_0)$). Diciamo che una tale retta è* subordinata *a $\phi$ al punto $x_0$ se giace al di sotto del suo grafico, cioè se $\phi(x_0) + m(x - x_0) \leqslant \phi(x)$ per ogni $x \in (a, b)$.*

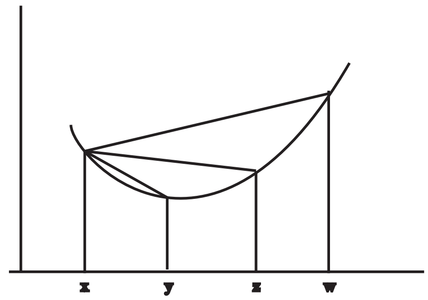


Figura 2. La pendenza delle corde cresce se il punto finale si sposta a destra

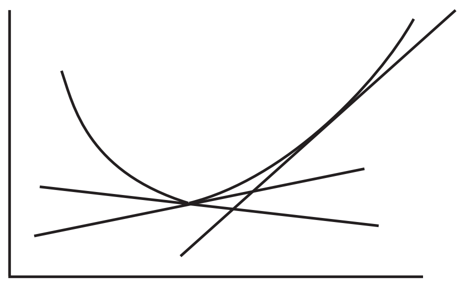

Figura 3. Varie rette subordinate: ai punti di derivabilità c'è solo la tangente

Corollario 1.0.6. *Nella terminologia della precedente Definizione 1.0.5, una retta è subordinata a* $\phi$ *al punto* $x_0$ *se e solo se* $D_-\phi(x_0) \leqslant m \leqslant D_+\phi(x_0)$. *Se le due derivate coincidono, esiste un'unica retta subordinata al punto* $x_0$ *ed è la retta tangente al grafico.*

La geometria delle corde sottese o subordinate al grafico di una funzione convessa è illustrata anche nelle Figure 2 e 3.

Proposizione 1.0.7. *Se* $\phi$ *è convessa in* $(a, b)$, *allora* $\phi$ *è continua in ogni sottointervallo chiuso di* $(a, b)$. *Inoltre le derivate destra* $D_+\phi$ *e sinistra* $D_-\phi$ *esistono ovunque, e sono due funzioni monotòne non decrescenti tali che, per ogni* $x$ *in* $(a, b)$, *si ha* $D_-\phi(x) \leqslant D_+\phi(x)$. *Le due derivate, sinistra e destra, sono uguali in ogni punti in cui una delle due è continua.*

*Dimostrazione.* Fissiamo $a < c < d < b$. Per ogni $x, y$ nell'intervallo chiuso $[c, d]$ segue dal Lemma 1.0.4 che

$$\frac{\phi(c) - \phi(a)}{c - a} \leqslant \frac{\phi(y) - \phi(x)}{y - x} \leqslant \frac{\phi(b) - \phi(d)}{b - d} .$$

Sia $M = \max\left\{\frac{\phi(c)-\phi(a)}{c-a}, \frac{\phi(b)-\phi(d)}{b-d}\right\}$. Allora per ogni $x, y$ in $[c, d]$

$$|\phi(y) - \phi(x)| \leqslant |y - x|$$

e quindi $\phi$ è continua in $[c, d]$.

Ancora per il Lemma 1.0.4, per ogni $x_0$ in $(a, b)$ la funzione rapporto incrementale

$$x \mapsto \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0}$$

è monotòna non decrescente, e quindi, a causa dell'esistenza dei limiti di funzioni monotòne, ha limiti destro e sinistro finiti per $x \to x_0$: pertanto $D_+\phi(x_0)$ e $D_-\phi(x_0)$ esistono finiti per ogni $x_0$ in $(a, b)$, e $D_-\phi(x_0) \leqslant D_+\phi(x_0)$.

Ora prendiamo $a < x_0 < y_0 < b$, e $|h| < y_0 - x_0$. Sia $x = x_0 + h$, $y = y_0 + h$: allora $x < y_0$ e $x_0 < y$, quindi l'intervallo $(y_0, y)$ comincia e finisce a destra di $(x_0, x)$ (la terminologia è quella della Definizione 1.0.3). Ancora dal Lemma 1.0.4 segue che

$$\frac{\phi(x_0 + h) - \phi(x_0)}{h} = \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0} \leqslant \frac{\phi(y) - \phi(y_0)}{y - y_0} = \frac{\phi(y_0 + h) - \phi(y_0)}{h} ,$$

e pertanto ciascuna delle due derivate al punto $x_0$ è non superiore a ciascuna di esse a $y_0$: più precisamente,

$$D_-\phi(x_0) \leqslant D_+\phi(x_0) \leqslant D_-\phi(y_0) \leqslant D_+\phi(y_0) . \tag{1.0.1}$$

Quindi entrambe le derivate sono monotòne. Mostriamo infine che esse sono uguali in ogni punto in cui una di esse è continua. In effetti, se $\lim_{x_0 \to y_0} D_-\phi(x_0) = D_-\phi(y_0)$, allora 1.0.1 implica che anche

$$\lim_{x_0 \to y_0} D_+\phi(x_0) = D_-\phi(y_0) \tag{1.0.2}$$

e quindi anche l'altra derivata ha lo stesso limite a $x_0$, ed allora nessuna delle due può avere salti e, grazie a (1.0.2), devono essere uguali.
□

Abbiamo così provato che la convessità implica la monotonia delle derivate. Viceversa:

PROPOSIZIONE 1.0.8. *Se $\phi$ è continua su $(a, b)$ ed ammette derivata sinistra (oppure destra) non decrescente, allora $\phi$ è convessa.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che la derivata destra di $\phi$ sia non decrescente. In questa dimostrazione, per semplicità, scriviamo *crescente* invece che *non decrescente*, e se necessario denoteremo come *strettamente crescente* le funzioni che finora abbiamo chiamato *crescenti*; analogamente per le funzioni decrescenti.

Dire che $\phi$ è convessa in $(a, b)$ equivale a dire che per ogni $a < x < y < b$ la funzione differenza

$$\psi(t) = \phi[ty + (1-t)x] - t\phi(y) - (1-t)\phi(x)$$

è negativa o nulla nell'intervallo $[0, 1]$. Osserviamo che $\psi(0) = 0 = \psi(1)$, e $t \mapsto D_+\psi(t) = (y-x)D_+\phi[ty + (1-t)x] - \phi(y) + \phi(x)$ è anch'essa una funzione crescente di $t$ in $[0, 1]$.
Poiché $\psi$ è continua ha un punto di massimo. Sia $t_0$ tale punto. Se $t_0 = 1$ allora il valore massimo di $\psi$ è $\psi(1) = 0$, e quindi $\psi$ è negativa o nulla ed il risultato è dimostrato. Se invece $t_0 < 1$ allora $D_+\psi(t_0) = 0$. D'altra parte, poiché $D_+\psi$ è crescente, questo implica $D_+\psi \leqslant 0$ in $[0, t_0]$. Allora $\psi(t_0) \leqslant \psi(0) = 0$, e quindi il massimo valore di $\psi$ è negativo o nullo. □

Una conseguenza immediata di questi due risultati è continuamente usata nello studio del grafico delle funzioni:

COROLLARIO 1.0.9. *Una funzione derivabile due volte è convessa in un intervallo aperto se e solo se ha derivata seconda non negativa in tutto l'intervallo*